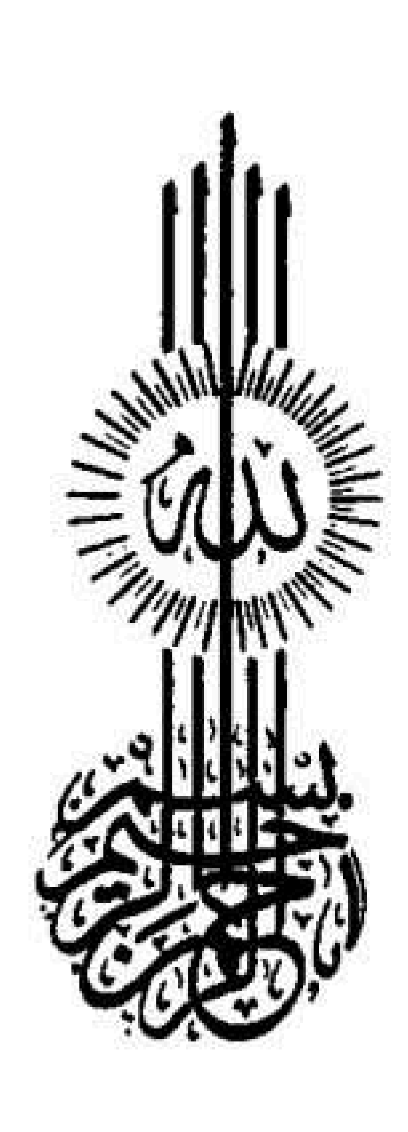
تطبيقات في حساب
التفاضل والتكامل

تأليف

د. إبراهيم ديب سرميني

د. سلمان بن عبدالرحمن السلمان







https://t.me/kotokhatab

تطبيقات في
حساب التفاضل والتكامل

تأليف

د. إبراهيم ديب سرميني

الجمعية السعودية للعلوم الرياضية

جامعة الملك سعود

د. سلمان بن عبدالرحمن السلمان

قسم الرياضيات – كلية العلوم

جامعة الملك سعود



فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

سرميني، إبراهيم ديب

تطبيقات في حساب التفاضل والتكامل./ إبراهيم ديب سرميني؛ سلمان عبدالرحمن السلمان.- الرياض، ١٤٣٩هـ

٥٣٨ ص؛ ١٧سم × ٢٤سم

ردمك: ٦-٦٣٢-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

١- التفاضل والتكامل أ. السلمان، سلمان عبدالرحمن (مؤلف مشارك)

ب. العنوان

ديوي ٥١٥ ١٤٣٩/٥٥٠٦

رقم الإيداع: ١٤٣٩/٥٥٠٦

ردمك: ٦-٦٣٢-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

نشر هذا الكتاب بناءً على موافقة المجلس العلمي في اجتماعه السادس عشر للعام الدراسي ١٤٣٧/١٤٣٨هـ المعقود بتاريخ ٥/٨/١٤٣٨هـ الموافق ١/٥/٢٠١٧م، بعد استيفائه شروط التحكيم العلمي بالجامعة.



المقدمـة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على نبينا محمد الأمين الذي أرسل هداية للعالمين. لقد حث الإسلام على القراءة والتعلم فكان أول ما أنزل على رسولنا محمد (صلى الله عليه وسلم) قوله تعالى : ﴿ ٱقْرَأْ بِٱسْمِ رَبِّكَ ٱلَّذِى خَلَقَ ﴿١﴾ ﴾، وقد حث الرسول عليه الصلاة والسلام على طلب العلم ورغب فيه بقوله :" من سلك طريقا يلتمس فيه علما سهل الله له طريقا إلى الجنة" ، فانطلاقا من هذا المبدأ الذي نؤمن به وندعو إليه غيرنا قمنا بتأليف كتابنا هذا الذي أسميناه تطبيقات في حساب التفاضل والتكامل ويتكون الكتاب من الفصول التالية:

الفصل الأول: المستقيمات والنسب المثلثية للزوايا.

الفصل الثاني: المتباينات.

الفصل الثالث: الدوال الحقيقية.

الفصل الرابع: النهايات.

الفصل الخامس: الاتصال.

الفصل السادس: المشتقات.

الفصل السابع: خواص الدوال القابلة للاشتقاق.

الفصل الثامن: رسم المنحنيات.

الفصل التاسع: التطبيقات.

الفصل العاشر: الدوال الأسية واللوغارتمية – التكامل.

الفصل الحادي عشر: القطوع المخروطية.

الفصل الثاني عشر: الدوال في عدة متغيرات.

الفصل الثالث عشر: المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى .

الفصل الرابع عشر: المعادلات الوسيطية والإحداثيات القطبية.

الفصل الخامس عشر: الدوال الزائدية.

الفصل السادس عشر: قاعدة لوبيتال.

الفصل السابع عشر: التكاملات المعتلة.

الفصل الثامن عشر: تطبيقات في حساب التكامل باستخدام الإحداثيات الوسيطية والقطبية

ملحق: جداول الصيغ الرياضية – تمارين عامة – نماذج اختبارات.

ثبت المصطلحات: (عربي – إنجليزي) و(إنجليزي – عربي).

مراجع الكتاب

ومن أهم سمات هذا الكتاب ما يلي:

١-يتضمن ما يربو على مائتين وتسعة وثمانين (٢٨٩) مثال محلول، وأغلب هذه الأمثلة مكون من عدة فقرات.

٢-يتضمن ما يزيد على ألف ومئة وستة عشر (١١١٦) تمرين (أو مسألة لفظية) ومعظم هذه التمارين يتكون من عدة فقرات.

٣-يتضمن سبعة (٧) نماذج من نماذج الاختبارات النهائية مع الإجابات لجميع الأسئلة الموضوعية (الاختيارية).

٤-يتضمن الكتاب مسائل لفظية كثيرة ومتنوعة (بعضها محلول على هيئة أمثلة) تخدم تخصصات متعددة كالفيزياء والهندسة والكيمياء وعلم النبات، فضلا عن الرياضيات التطبيقية.

٥-كتبت فصول الكتاب بصورة متسلسلة وبطريقة تجعل مادة الكتاب مستقلة بنفسها مما يريح القارئ من عناء الرجوع إلى ما سبق أن درسه فيما قبل الجامعة.

٦-يساعد الطالب غير المتخصص في الرياضيات لكون مادة الكتاب قدمت بشكل مبسط دون اللجوء للتعمق في النظريات الرياضية.

٧-يساعد الطالب المتخصص بالرياضيات لكون مادة الكتاب تعطيه موجزاً متكاملا لأهم ما تجب معرفته لطالب الرياضيات في السنة الأولى من الدراسة الجامعية أو ما يعادلها من كليات أو معاهد أخرى.

٨-يشمل الكتاب في طبعته الرابعة جميع مفردات بل محتويات أكثر من مقرر في الرياضيات في جامعة الملك سعود.

٩-إن الزيادة المضافة في الطبعة الرابعة تزيد عن سابقتها بنسبة ٥٦٪.

ولعله من المفيد أن نشير إلى أن مادة هذا الكتاب ظهرت بهذه الصورة بعد تدريسها لمرات عديدة من قبل عدة أساتذة أفاضل بقسم الرياضيات في جامعة الملك سعود فلهم منا جزيل الشكر والامتنان على ما أسدوه لنا من ملحوظات قيمة ترفع من قيمة الكتاب .

ونحن إذ نقدم هذا الكتاب للقارئ العربي سواء كان أستاذا أم طالبا فلنا أمل ورجاء في إهداء ما يستطيع أن يهديه لنا من ملحوظات بناءة تصب في خدمة تحسين الكتاب ليخدم أمتنا العربية وليكون إضافة طيبة للمكتبة العربية وله من الله الجزاء الأوفى. نسأل الله العون والتوفيق لما يحبه ويرضاه وأن يجعل عملنا هذا في موازين أعمالنا، إنه سميع مجيب.

المؤلفان

المحتويات
CONTENTS

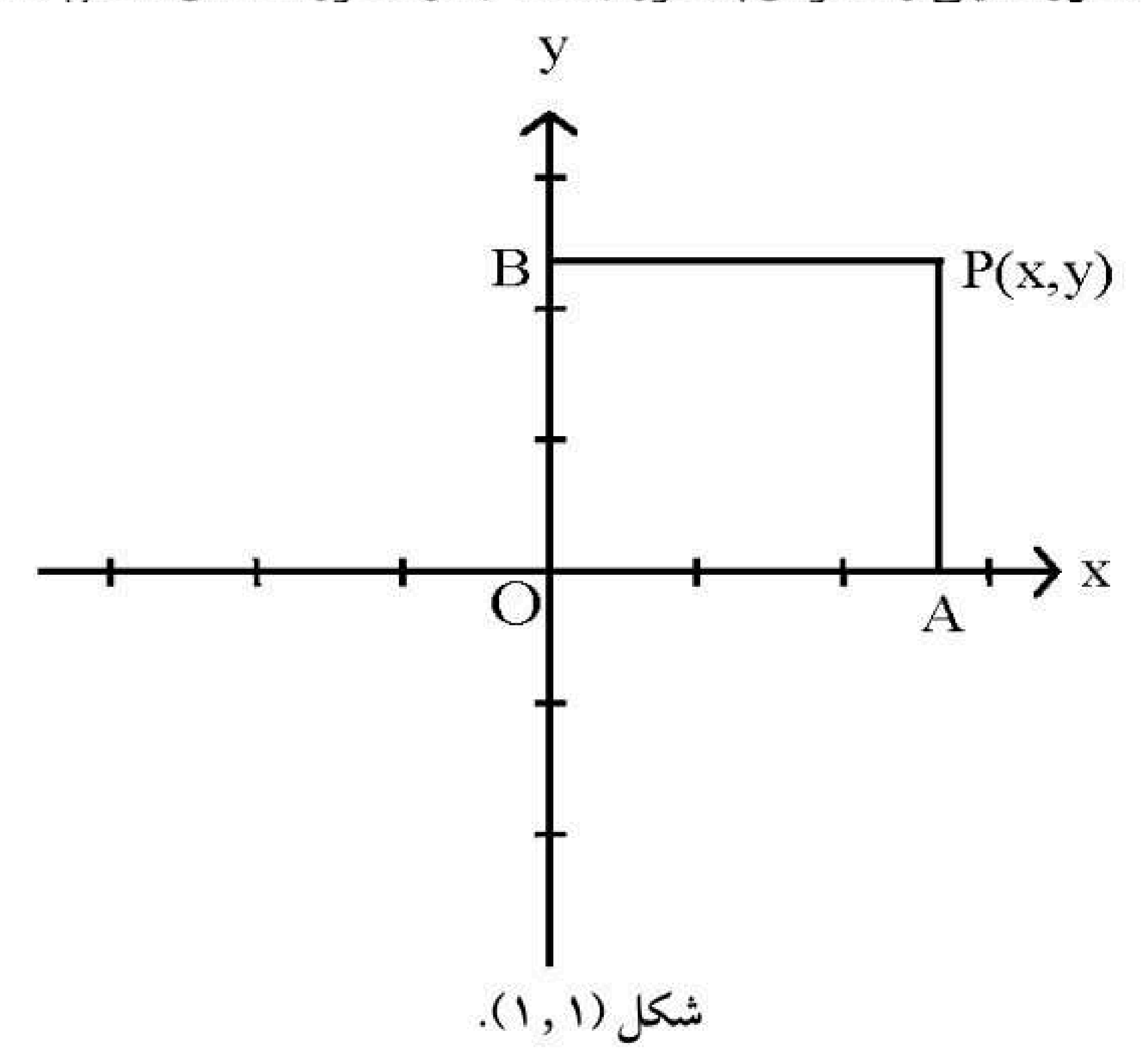
الفصل الأول

المستقيمات والدوال المثلثية

THE LINES AND TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

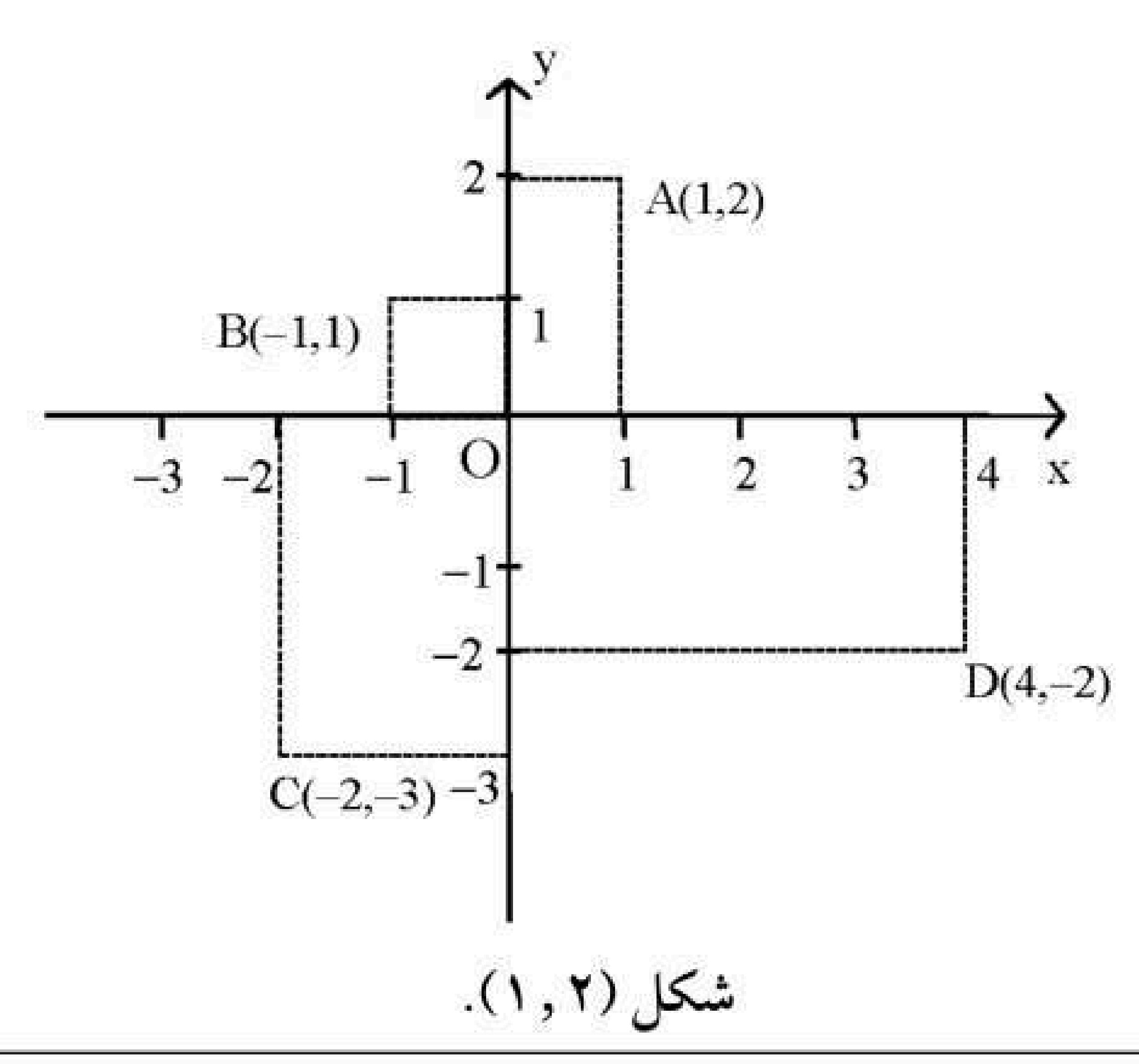
(١ , ١) المستقيمات في المستوى

نحدد عادة نقاط المستوي xy (xy-plane) بنسبها إلى مجموعة إحداثية متعامدة (rectangular coordinate system) مكونة من محورين إحداثيين متعامدين ومتلاقيين في نقطة O (Origin Point). نسمي هذه النقطة **"نقطة الأصل"** (مبدأ الإحداثيـــــات)، كما نسمي المحورين: **الأفقي بالمحــور x** (x-axis) **أو المحور السينى** والعمودى بالمحور y (y-axis) أو المحور الصادى، شكل (١ , ١).



شكل (١ , ١).

تتحدد النقطة P في هذا المستوي بزوج مرتب (ordered pair) من الأعداد الحقيقية (x,y). الإحداثي x يحدد النقطة A مسقط P على المحور x، الإحداثي y يحدد النقطة B مسقط P على المحور y. فمثــلا النقــاط A(1,2)، B(−1,1)، C(−2,−3)، D(4,−2) تتحدد كما في الشكل (٢ , ١).



شكل (٢ , ١).

تعريف (١ , ١) (Definition)

يُعــرَّف البعــد بــين نقطتــين: $B(x_2, y_2), A(x_1, y_1)$ في المسـتوي الإقليدي بالصيغة:

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad (١ , ١)$$

شكل (٣ , ١).

فمثلا البعد بين النقطتين: $A(3,5), B(6,9)$ ، هو:

$$d(A,B) = \sqrt{(6-3)^2 + (9-5)^2}$$
$$= \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

تعريف (٢ , ١)

المستوي الإقليدي (Euclidean plane) هو مجموعة كل الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية من الشكل (x,y) والتي عُرِّف البعد بين أي نقطتين منه بالصيغة (١ , ١).

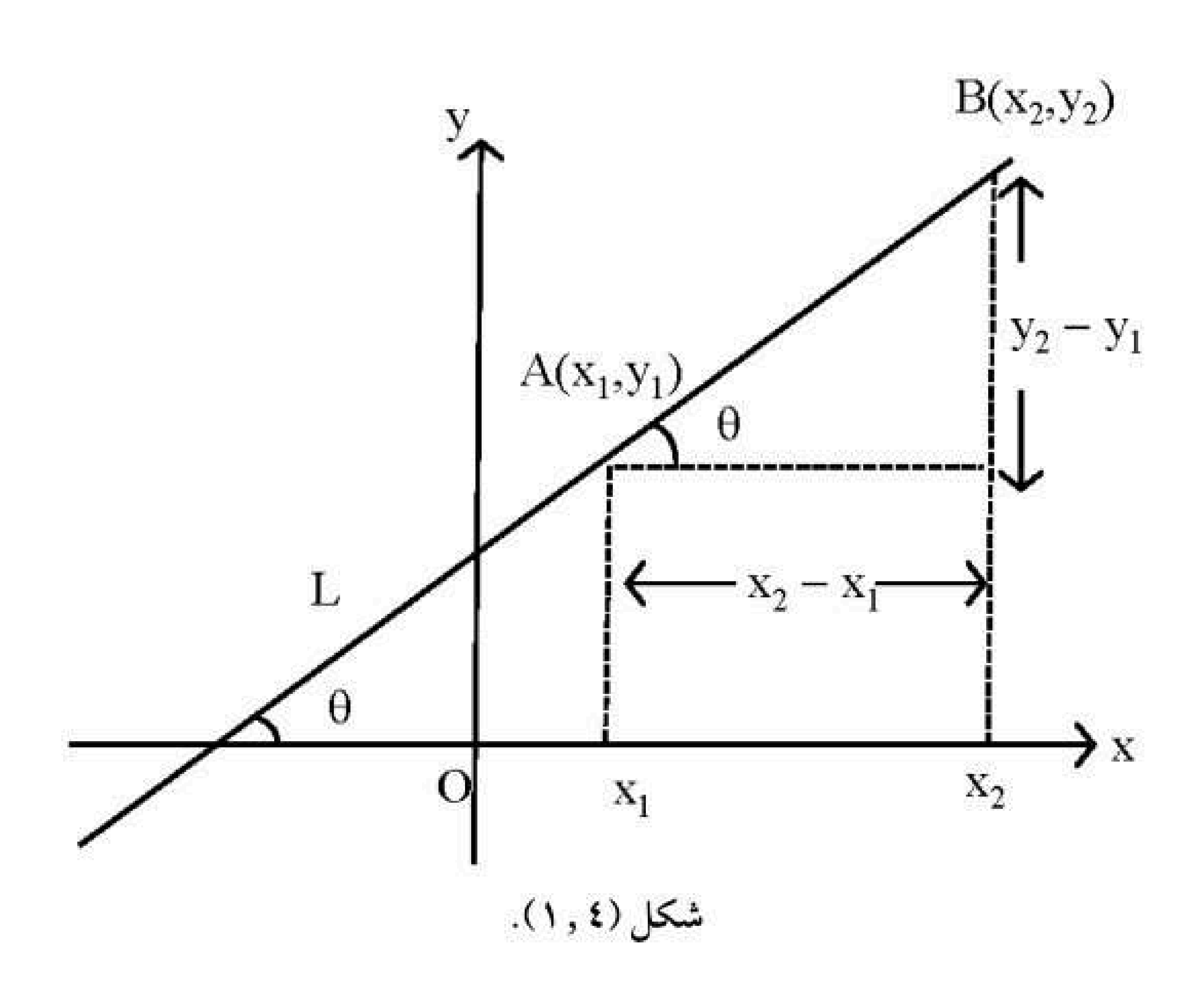
ملحوظة (١ , ١) (Remark)

لنذكر هنا بأن البعد بين نقطتين A,B والذي رمزنا له بالرمز d(A,B) يرمز له أيضًا بالرمز $|AB|$ والذي صادفناه أثناء دراستنا في المرحلة الثانوية.

تعريف (٣ , ١)

ميل مستقيم (Slope of a line) **L (لا يوازي المحور y)** نرمز له بالرمز m ويساوي ظل الزاوية التي يصنعها هذا المستقيم مع المحور x (رمزنا للظل بالرمز tan).

$$m = \tan\theta \qquad (١ , ٢)$$



شكل (٤ , ١).

تؤخذ θ زاوية مستقيم مع المحور x عادة محققة للشرط:

$$\pi > \theta \geq 0$$

من الواضح أن:

$$m = \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$$

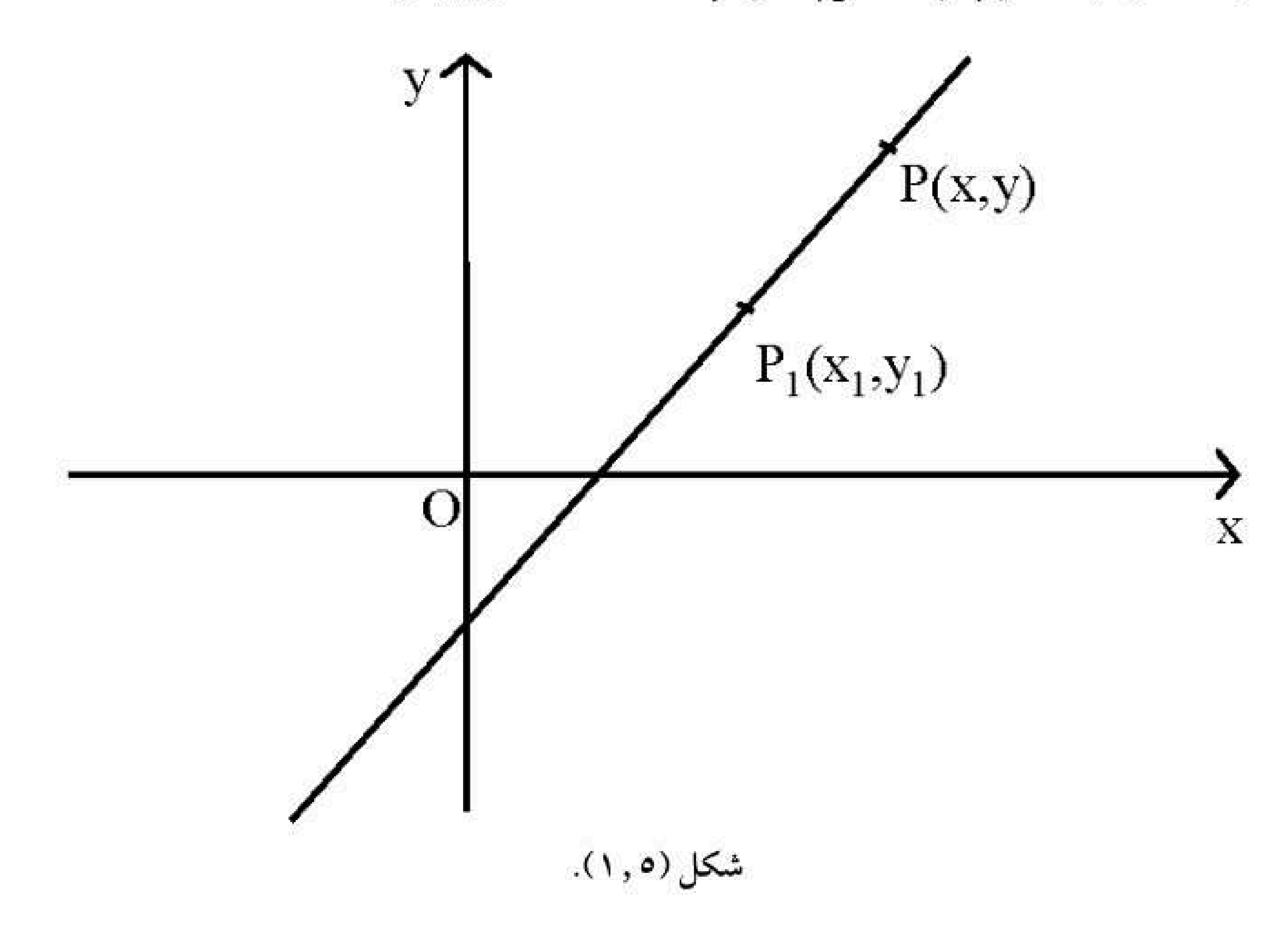
انظر الشكل (٤ , ١) .

إذن صيغة الميل (The slope formula) **تعطى بالمساواة:**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (١ , ٣)$$

وهذا المقدار يرتبط بالزاوية θ ولا يتغير مهما كان موضع النقطتين A,B على المســـتقيم L. والصيغة (٣ , ١) لا تتغير إذا كانت θ زاوية منفرجة.

معادلة (Equation) **مستقيم ميله معلوم m وعُلِمت نقطة منه** $P_1(x_1, y_1)$



شكل (٥ , ١).

بفرض أن P(x,y) نقطة ما من هذا المستقيم، فإن ميل المستقيم m يساوي:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad (١,٤)$$

هذه المعادلة تمثل **معادلة مستقيم عُلِم ميله m ونقطة منه** $P_1(x_1, y_1)$

نتيجة (١,١)

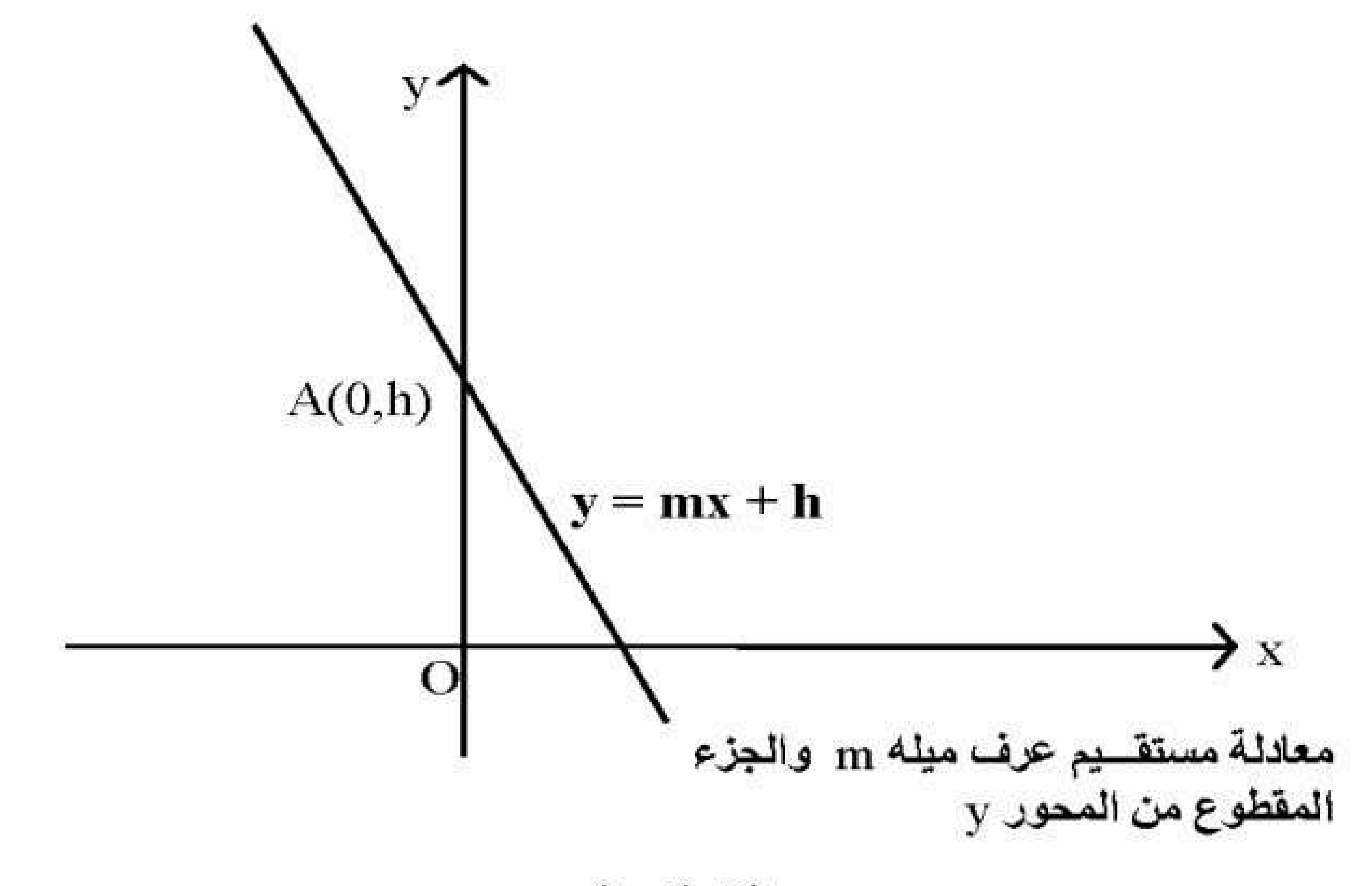
إذا علمت نقطتان $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ من مستقيم فإن معادلة المستقيم (١,٤) تصبح على الشكل:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad (١,٥)$$

نتيجة (١,٢)

إذا كانت A(0,h) نقطة (Point) تقاطع مستقيم (Line) مع المحور y وكان ميله معروفا ويساوي m فإن معادلته تكتب على الشكل:

$$m = \frac{y - h}{x - 0} \text{ ، ومنــــه: } \quad y = mx + h \quad (١,٦)$$



شكل (١,٦).

مــثــال (١ , ١)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين: $A(1,2)$ ، $B(-1,4)$

الحـــل

الميل يساوي: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2-4}{1+1} = -1$

وحسب (٤ , ١)، فإن معادلة المستقيم:

$$\frac{y-2}{x-1} = -1 \Rightarrow y = -x+3$$

نتيجــة (٣ , ١)

تكتب المعادلة (٥ , ١) على الشكل:

$$\boxed{ax+by+c=0} \qquad (١ , ٧)$$

حيث a,b,c ثوابت حقيقية والثابتان a,b لا يساويان الصفر معا. **المعادلة** (٧ , ١) تمثل المعادلة العامة للمستقيم (The general equation of line) .

إذا كانت $b \neq 0$ فإن المعادلة (٧ , ١) تكتب على الشكل:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

إذن ميل المستقيم (٧ , ١) في حالته العامة يساوي:

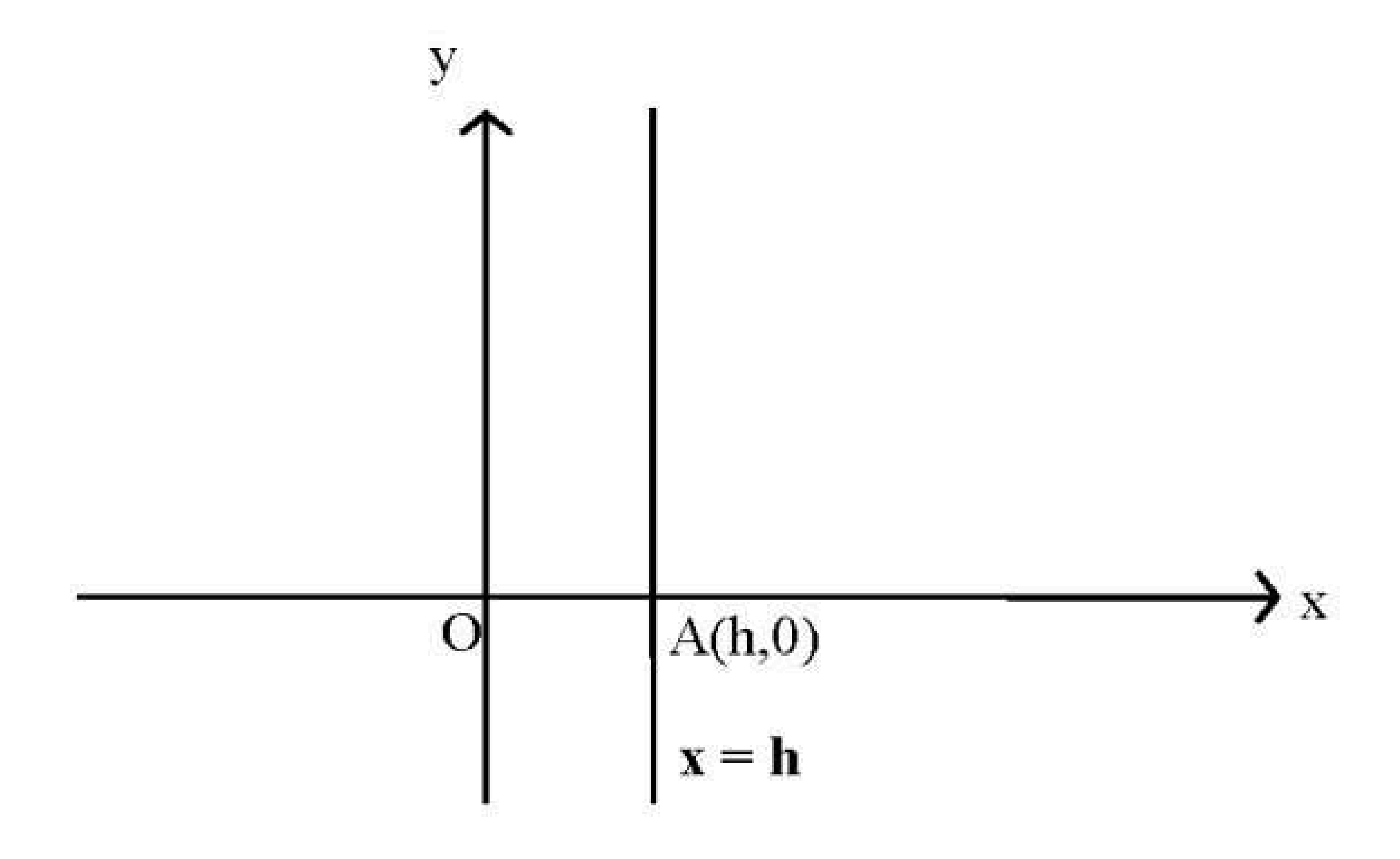
$$\boxed{m = -\frac{a}{b}} \qquad (١ , ٨)$$

حالات خاصـــة:

أ) إذا كانت: $b = 0$ ، فإن المعادلة العامة للمستقيم تأخذ الشكل:

$$\boxed{x = h} \quad (h \text{ ثابت}) \qquad (١ , ٩)$$

وهي تمثل مستقيما عموديا (Vertical line) على المحور x، ويقطع المحور x عند النقطة A(h,o)، وميله هو غير معرف(Undefined).

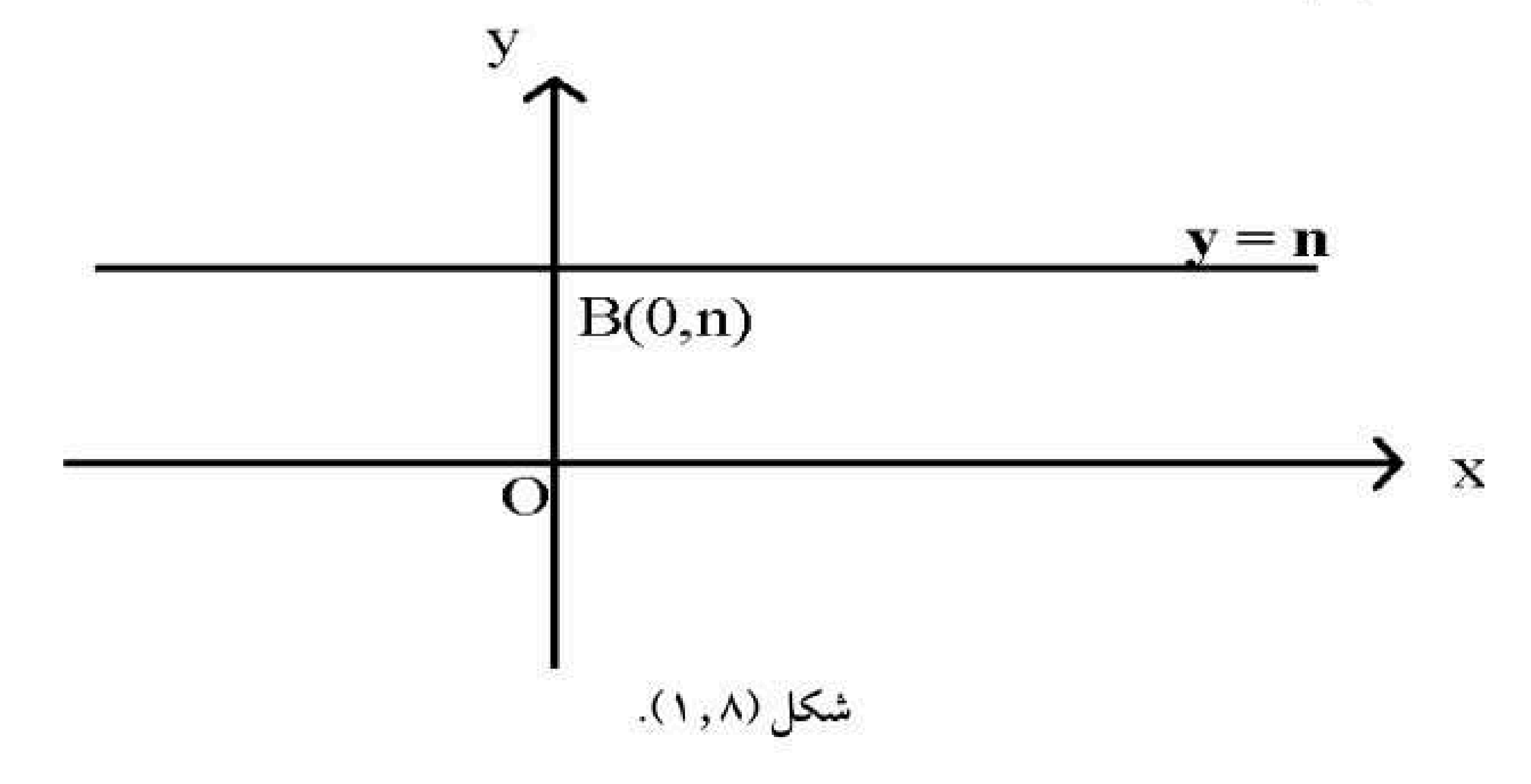


شكل (١,٧).

ب) إذا كانت $a = 0$ في المعادلة العامة لمستقيم، فإن المعادلة تأخذ الشكل:

$$\boxed{y = n} \quad (n \text{ ثابت}) \qquad (١,١٠)$$

وهي **تمثل مستقيما أفقيا** (Horizontal line) **يوازي المحور x** ميله يساوي الصفر ويقطع المحور y عند النقطة (0,n) .

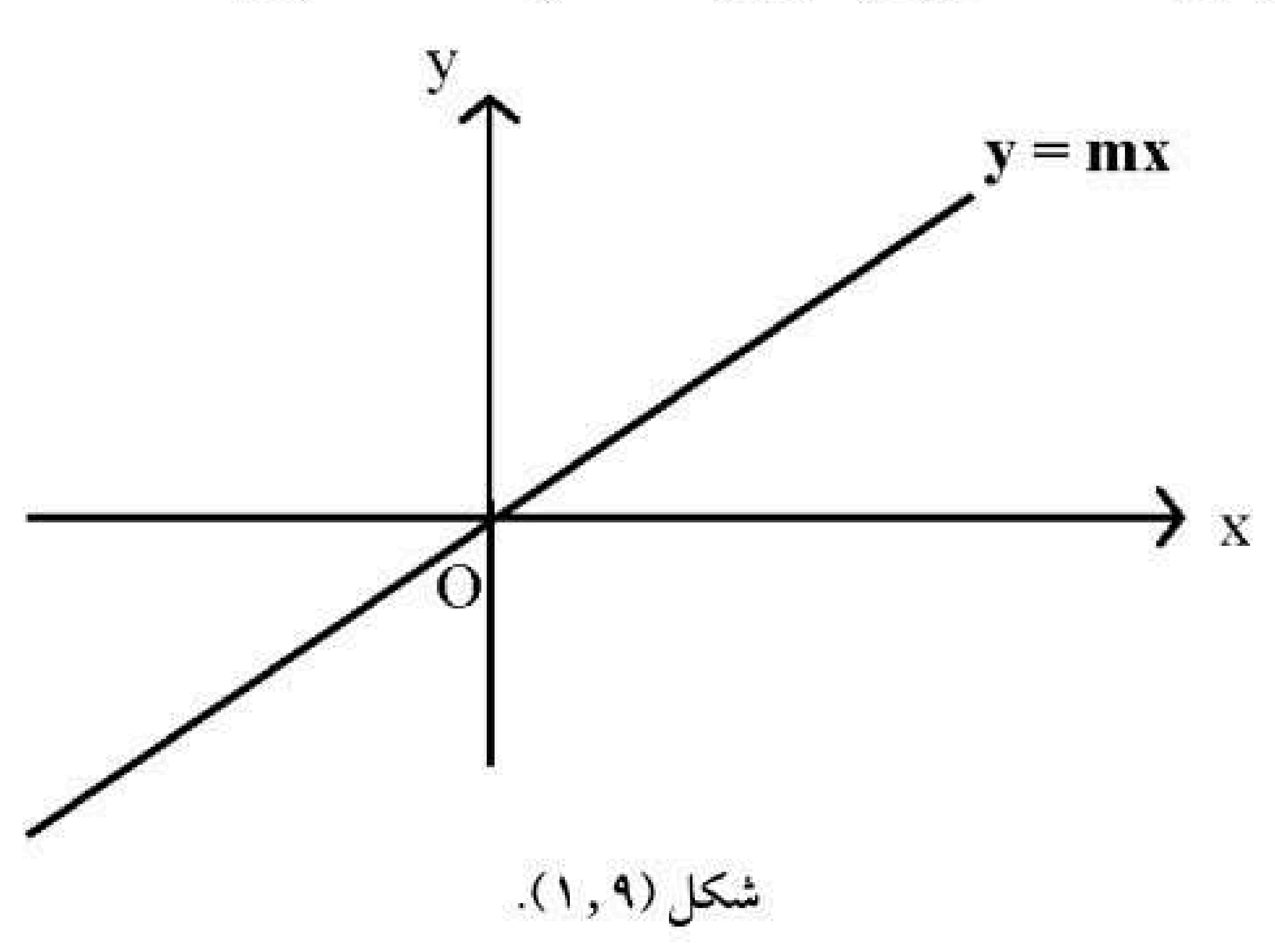


شكل (١,٨).

جـ) إذا كانت $c = 0$ في المعادلة العامة لمستقيم، فإن المعادلة تأخذ الشكل:

$$y = mx \tag{١,١١}$$

وهي **تمثل مستقيما يمر بنقطة الأصل** ويكفى لرسمه معرفة نقطة أخرى تحققه.



شكل (١,٩).

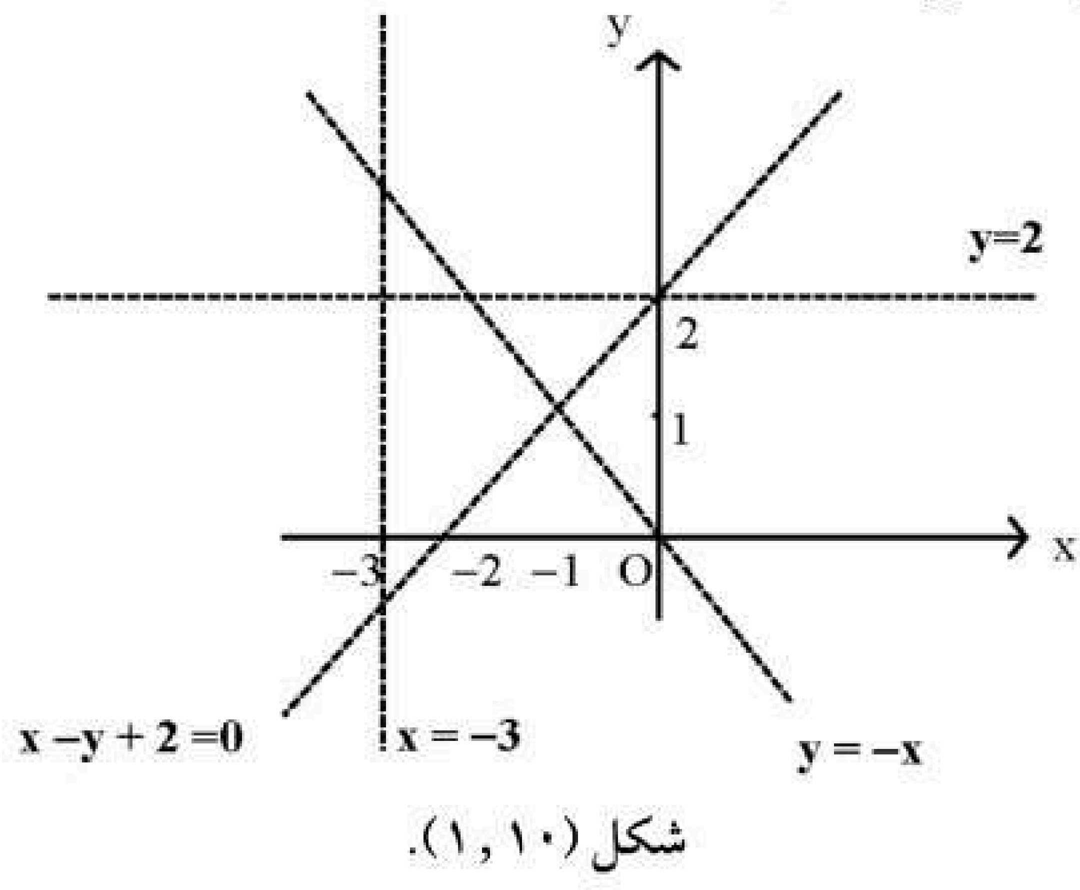
مــثــال (١,٢)

ارسم في المستوي الإقليدي المستقيمات التالية:

$x - y + 2 = 0$ ، $y = -x$ ، $y = 2$ ، $x = -3$

الحــــل

تتحدد المستقيمات كما فى الشكل (١,١٠).

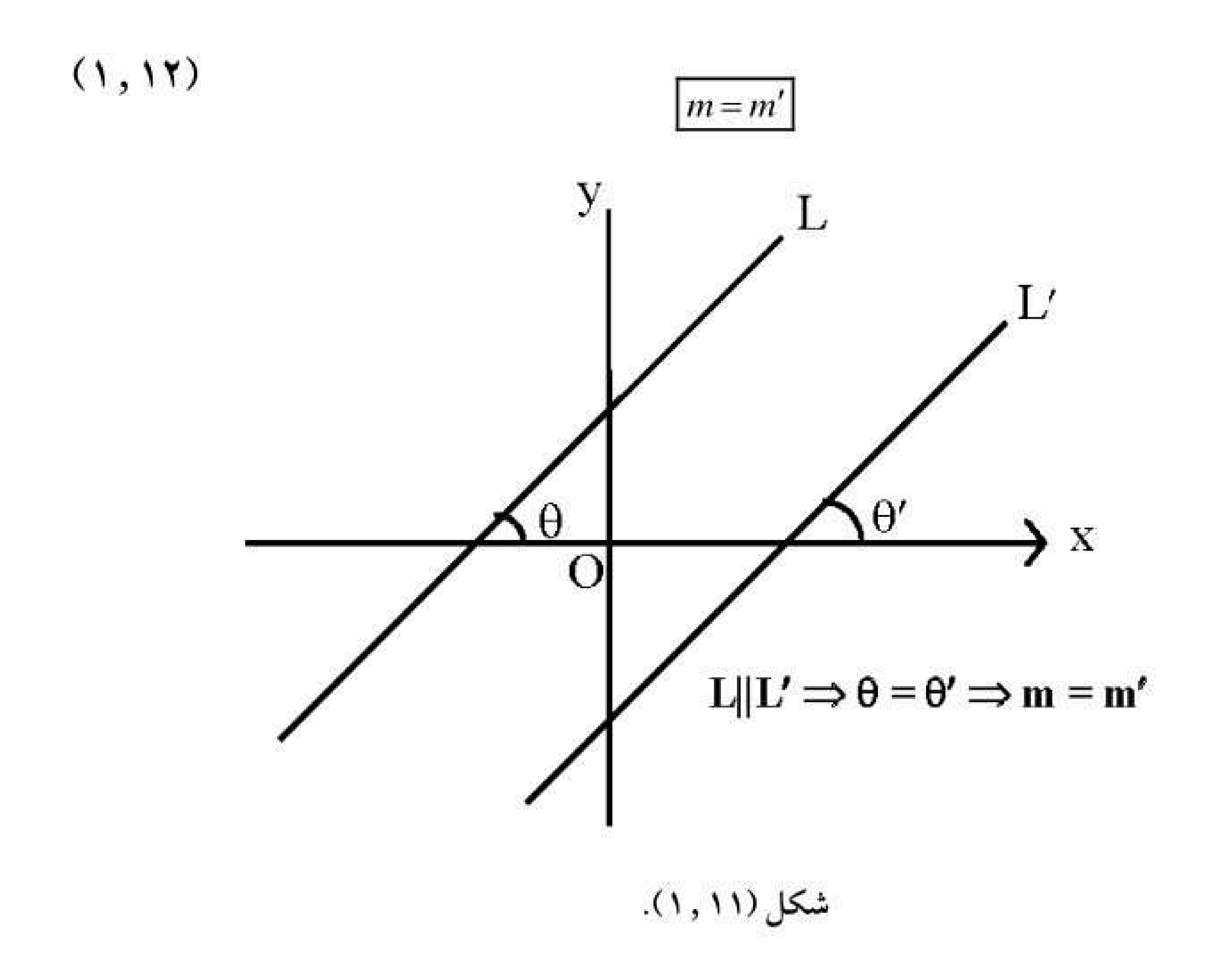


شكل (١,١٠).

لاحظ أن المستقيم $y=-x$ يمر بنقطة الأصل والنقطة $(-1,1)$. وأن المستقيم $x-y+2=0$ يقطع محوري الإحداثيات في النقطتين $(0,2)$ ، $(-2,0)$.

المستقيمات المتوازية والمتعامدة (parallel and perpendicular lines) **: من الملاحظ أن المستقيمين L, L' المتوازيين** (parallel) **ميلاهما واحد:**

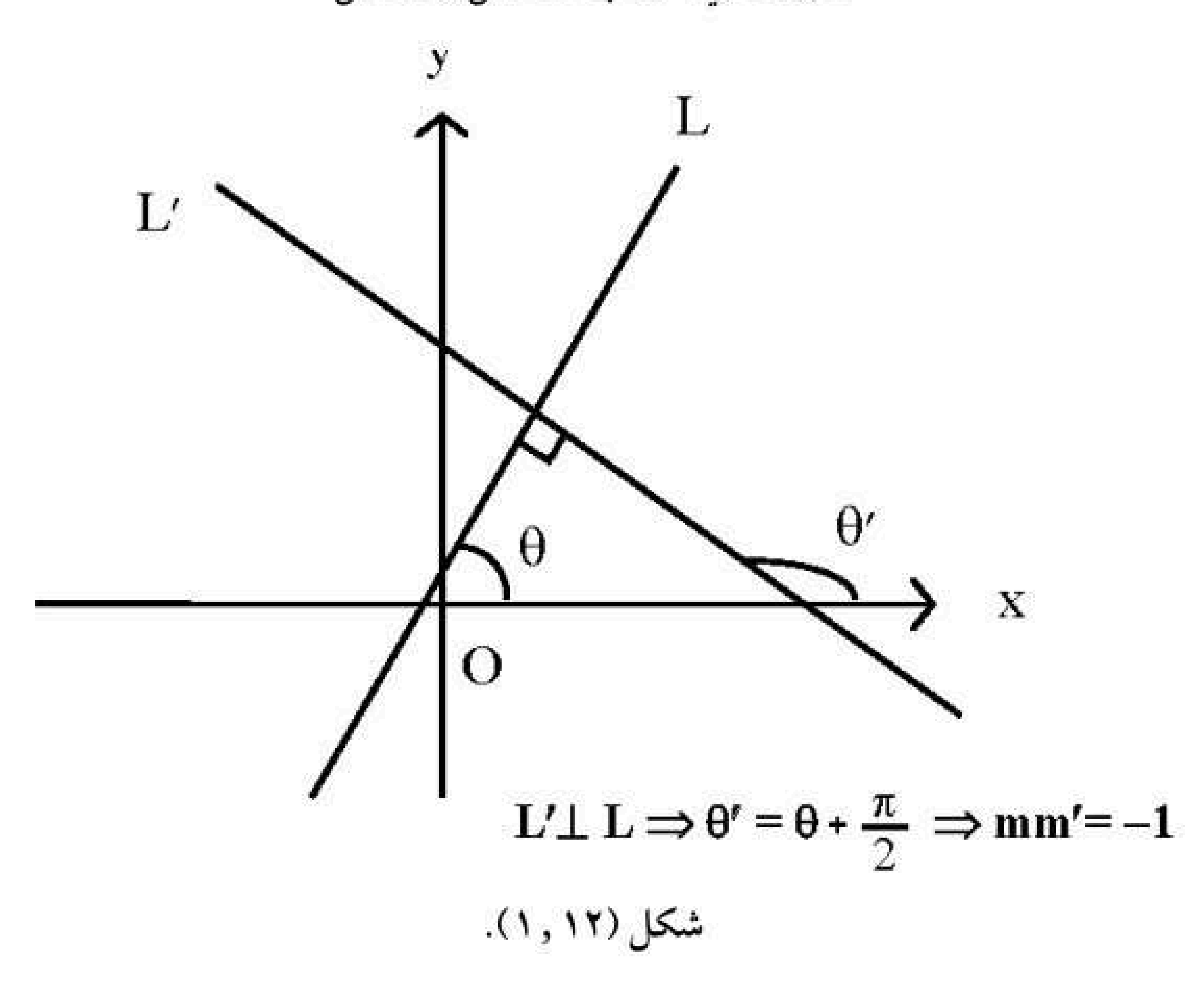
$$\boxed{m=m'} \quad (١,١٢)$$



شكل (١١ , ١).

وأن المستقيمين المتعامدين (Perpendicular) **حاصل ضرب ميلهما يساوي 1− :**

$$\boxed{mm'=-1} \quad (١,١٣)$$



شكل (١٢ , ١).

مـثـال (١ . ٣)

١) أوجد معادلة المستقيم L المار بالنقطة (1,2) والموازي للمستقيم:

$$M: 2x-3y+4=0$$

٢) أوجد معادلة المستقيم N المار بالنقطة (1,1−) والعمودي على المستقيم M.

الحـــل

١) تكتب معادلة M على الشكل:

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$$

وبمقارنتها بالمعادلة: $y=mx+h$ ، نجد أن ميل M يساوي: $m=\frac{2}{3}$ وميل L الموازي له يساوي أيضا $\frac{2}{3}$ ، فمعادلة المستقيم L هي:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m \Rightarrow \frac{y-2}{x-1}=\frac{2}{3} \Rightarrow 3y-2x-4=0$$

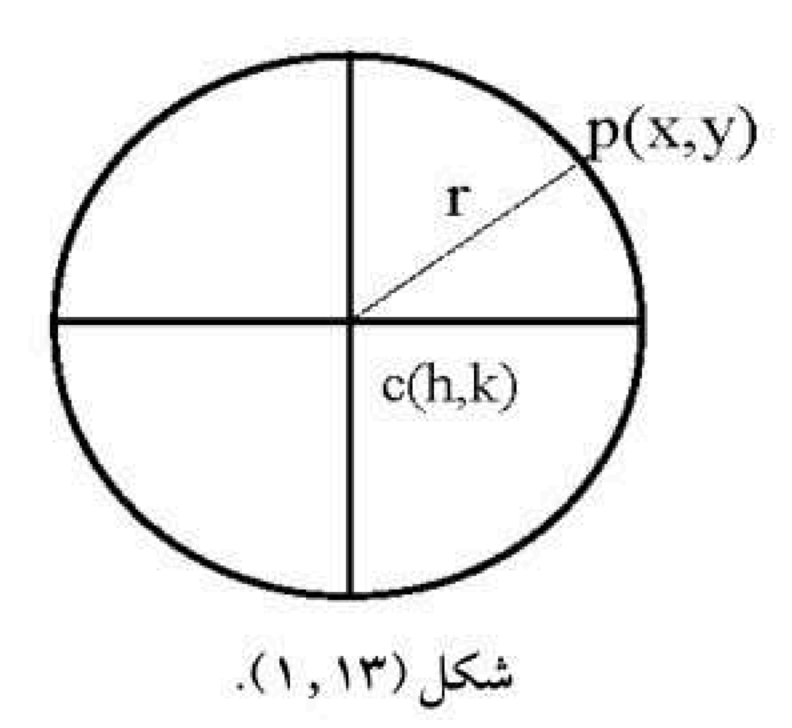
٢) بما أن ميل M يساوي $\frac{2}{3}$ ، فميل N العمودي عليه يساوي: $-\frac{3}{2}$ ،

فمعادلة المستقيم N هي : $\frac{y-1}{x+1}=-\frac{3}{2} \Rightarrow 2y+3x+1=0$

(٢ , ١) الدائــــــــــرة The Circle

معادلة الدائرة التي مركزها: c(h,k) وطول نصف قطرها r

إن أية نقطة p(x,y) من نقاط الدائرة تبعد عن مركزها c(h,k) بعدا ثابتا يساوي طول نصف قطرها r



شكل (١٣ , ١).

إذن: $|pc| = r$، ومنه:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (١ , ١٤)$$

وهذه معادلة دائرة مركزها (h,k) وطول نصف قطرها r.

مــثــال (٤ , ١)

أوجد مركز (Center) وطول نصف قطر (Radius) الدائرة:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$$

الحــــل

تكتب المعادلة (Equation) على الشكل:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) = 11$$

نضيــف مربــع نصــف معامــل x، ومربــع نصف معامل y إلى الطرفــين كما يلي:

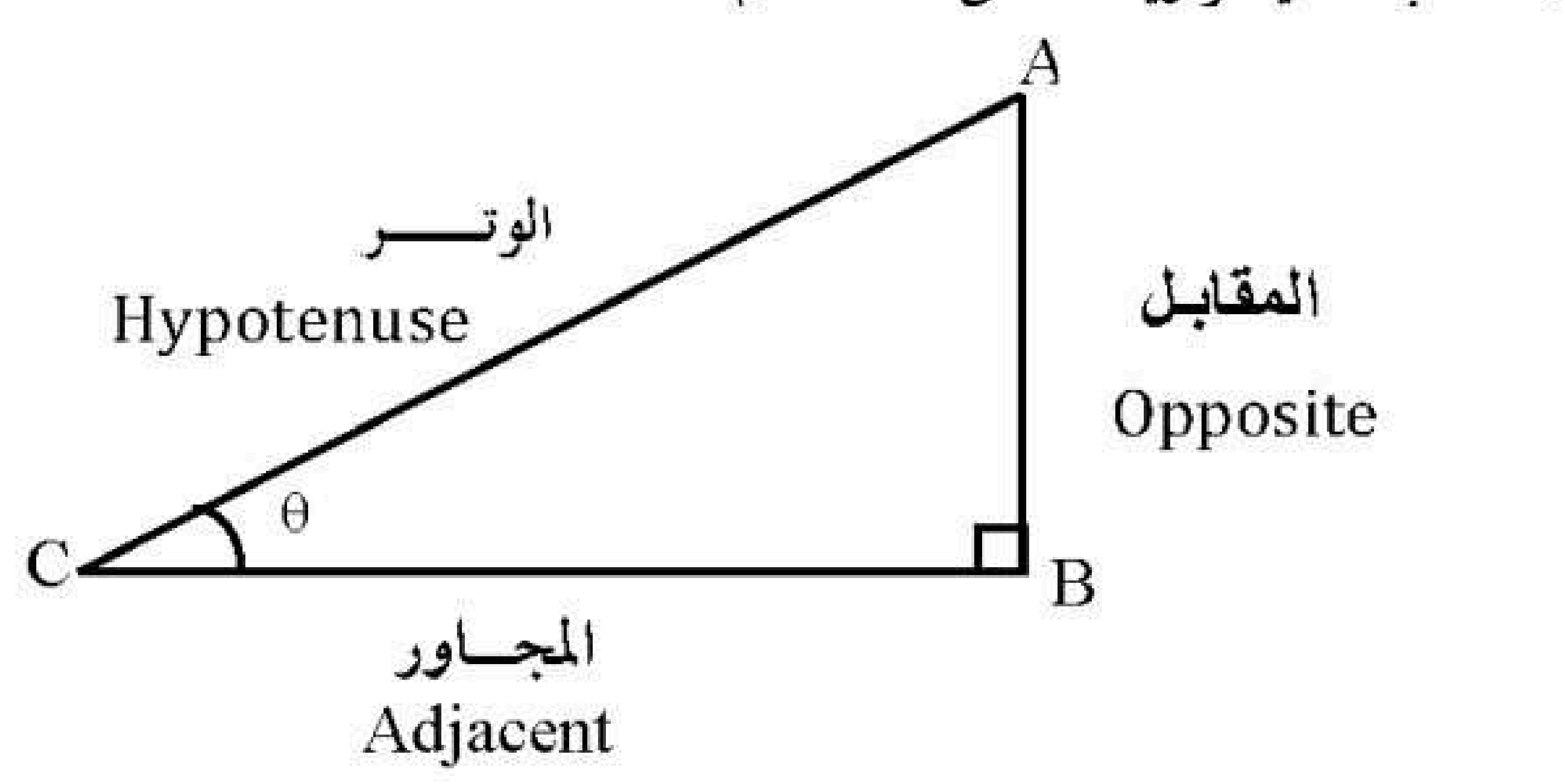
$$(x^2 - 2x + (1)^2) + (y^2 - 4y + (2)^2) = 11 + (1)^2 + (2)^2$$

فيصبح الطرف الأيسر مربعًا تاما في كل من x وَ y، وبالتالي:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$$

وهذه معادلة دائرة مركزها (1,2) وطول نصف قطرها $4 = \sqrt{16}$.

(١,٣) النسب المثلثية لزاوية حادة فى مثلث قائم



شكل (١,١٤).

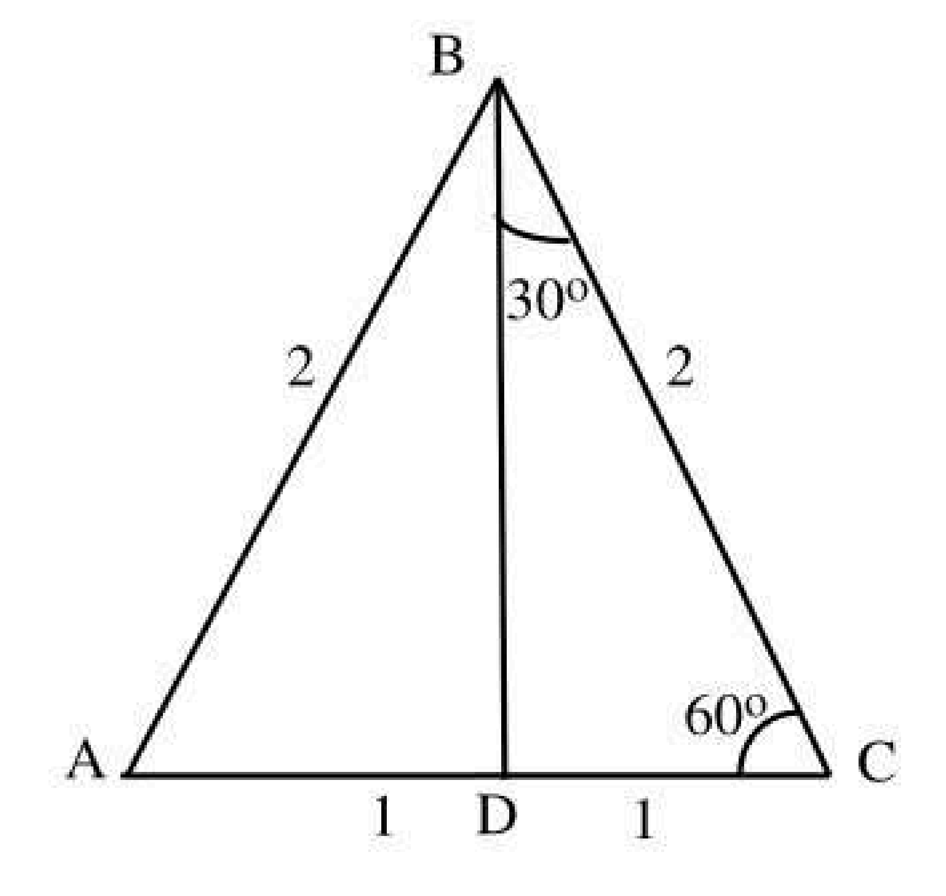
نعرف النسب المثلثية لزاوية حادة θ في مثلث قائم ABC وهي:
$\boxed{\sin\theta\,,\ \cos\theta\ ,\ \tan\theta}$، كما يلي:

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتـــر}} = \frac{|AB|}{|AC|}, \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتـــر}} = \frac{|CB|}{|AC|}, \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{|AB|}{|CB|} \qquad (١,١٥)$$

وقد سبق أن درسناها في المرحلة الثانوية وسميناها:
طا θ وجتا θ وجا θ

مــثـــال (١,٥)

أوجد النسب المثلثية للزوايا
45^o ، 60^o ، 30^o



شكل (١,١٥) .

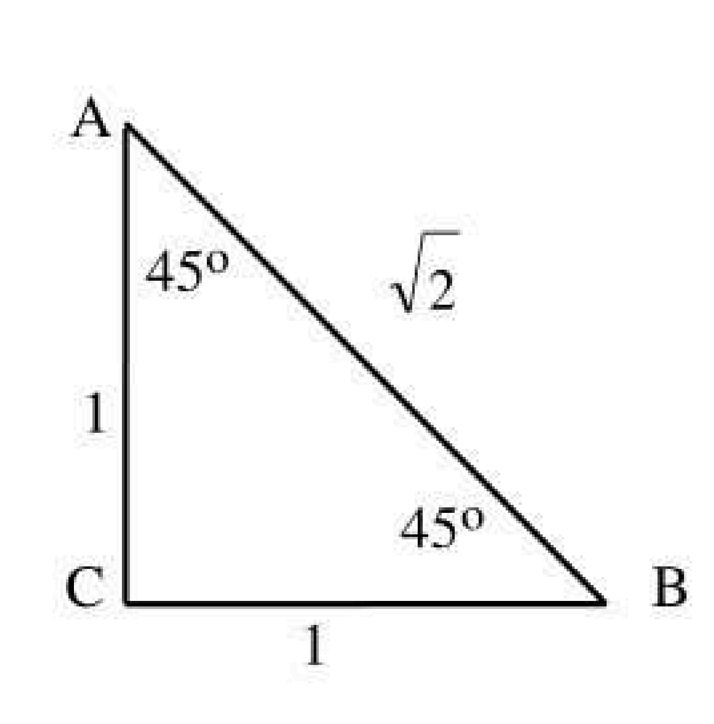
الحـــل

من المثلث المتطابق الأضلاع (Equilateral triangle) والذي طول ضلعه يساوي 2، نجد حسب فيثاغورث، طول ارتفاعه يساوي:

$$|AC| = |CB| = |BA| = 2, |BD| = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

ومنه: $\sin 30 = \frac{1}{2}, \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60 = \frac{1}{2}, \tan 60 = \sqrt{3}$$



شكل (١,١٦) .

ومن المثلث المتطابق الضلعين والذي طول ضلعه يساوي الواحد، نجد حسب فيثاغورث، طول وتره يساوي: $|AB| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

ومنه: $\sin 45 = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 45 = 1$

نُعرّف أيضا النسب المثلثية التالية في مثلث قائم وهي:

$$\boxed{\cot\theta, \sec\theta, \csc\theta}$$

والتي سبق أن سميناها:

قتا θ , قا θ, ظتا θ، كما يلي:

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad (١,١٦)$$

مـثـال (١,٦)

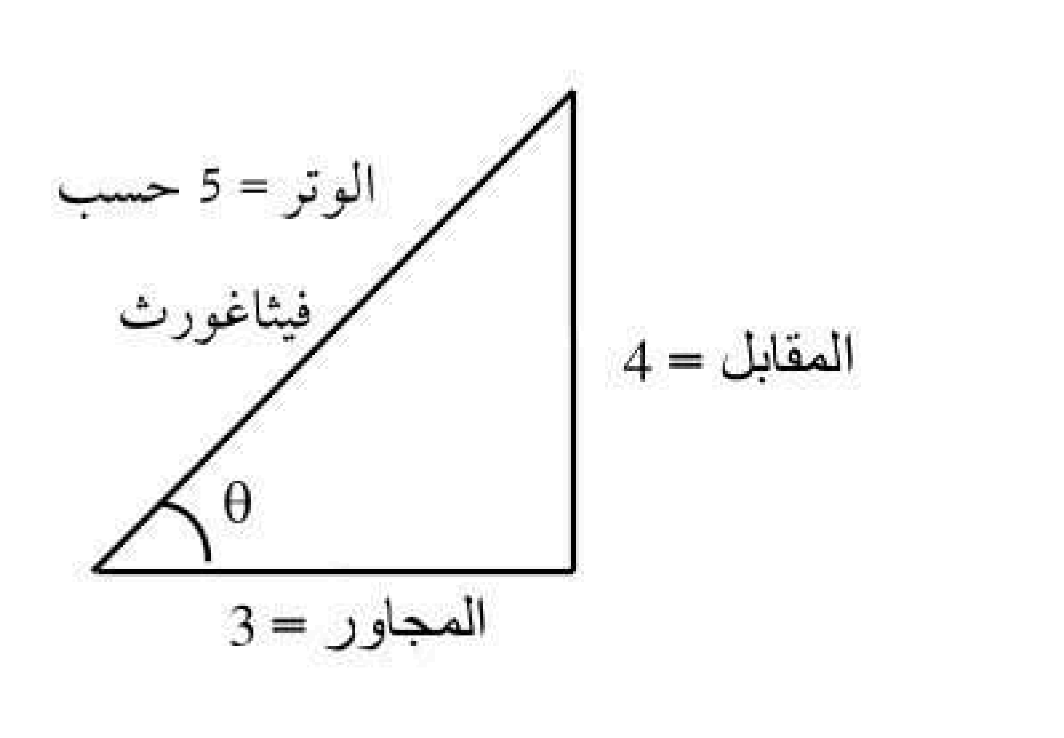
إذا كان: $\cot\theta = \frac{3}{4}$ ، فأوجد النسب الأساسية: $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$

الحـــل

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} = \frac{4}{3} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$



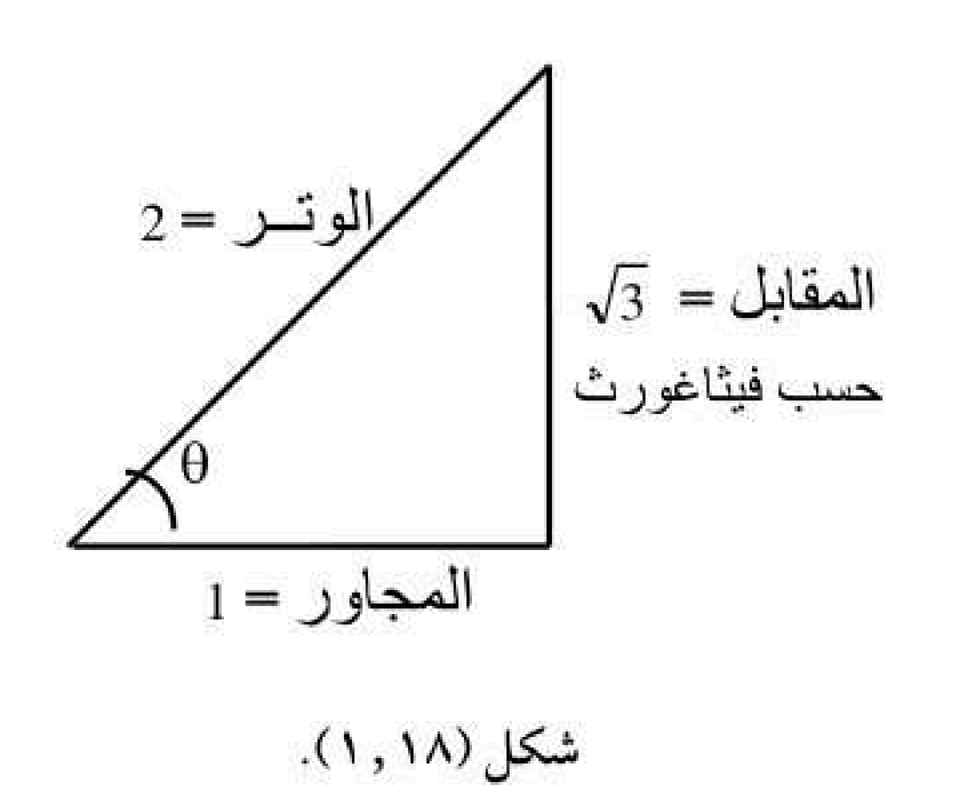
شكل (١,١٧).

مـثـال (١,٧)

إذا كان: $\sec\theta = 2$ ، فأوجد النسب الأساسية: $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$

الحـــل

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{2}$$



شكل (١,١٨).

$\cos\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتـــر}}$

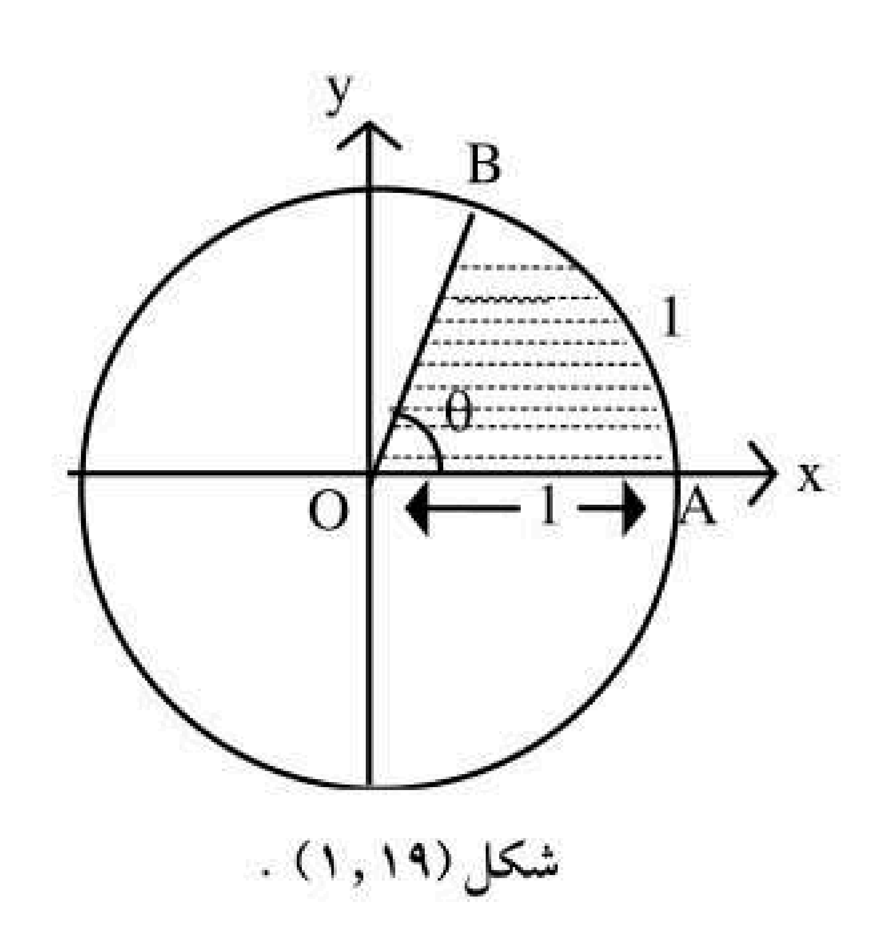
ومنه: $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan\theta = \sqrt{3}$

(١ , ٤) التقدير الدائري للزوايا

لتكن c دائرة موجهة مركزها O ونصف قطرها الوحدة. سنتعرف على وحدة جديدة للزوايا وهي الزاوية المركزية التي رأسها O والتي تقابل قوسًا طوله الوحدة شكل (١ , ١٩).

نسمي هذه الزاوية بالزاوية النصف قطرية، ونقول إن قياسها هو تقدير دائري واحد (راديان) (Radian). إن محيط هذه الدائرة يساوي 2π، فالزاوية المركزيـــــة التي رأسها O وتقابل قوس الدائرة كله قياسها بالتقدير الدائري:

$2\pi \approx 6.28$



شكل (١ , ١٩) .

إذن:

2π بالتقدير الدائري (Radian measure) يساوي: 360^o

1 تقدير دائري يساوي: $\frac{180}{\pi} \approx 57.3^o$

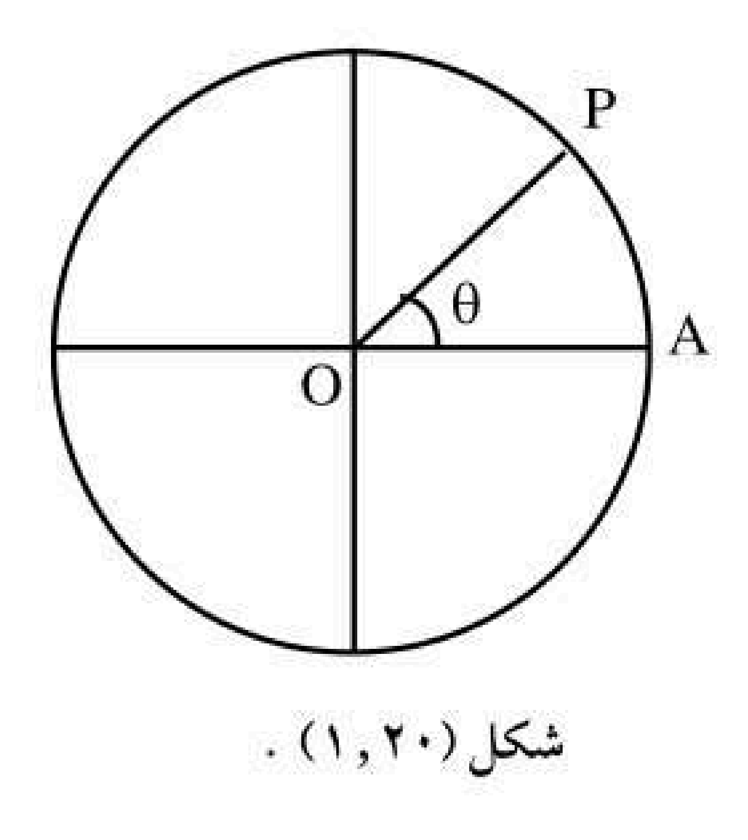
الزاوية θ بالتقدير الدائري تساوي بالدرجات:

$$\boxed{\alpha = \frac{180}{\pi}\theta} \qquad (١ , ١٧)$$

(رمزنا لقياس الزاوية بالدرجات بالرمز α)

من الصيغة السابقة، نجد:

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{180}\alpha} \qquad (١ , ١٨)$$



شكل (١ , ٢٠) .

مـثـــال (١,٨)

أوجد بالتقدير الدائري الزوايا: 30^o ، 60^o ، 180^o

الحـــــل

الزوايا على التوالي بالتقدير الدائري هي:

$$\theta = \frac{\pi}{180}(30) = \frac{\pi}{6} \text{ ، } \theta = \frac{\pi}{180}(60) = \frac{\pi}{3} \text{ ، } \theta = \frac{\pi}{180}(180) = \pi$$

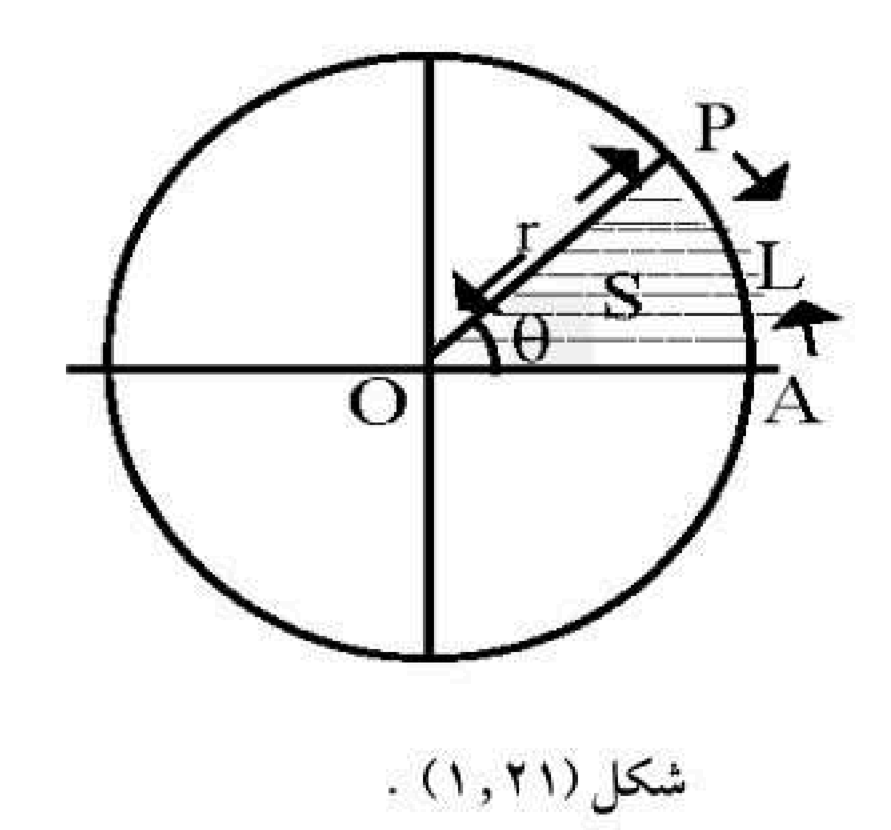
(١,٥) طول القوس و مساحة قطاع دائري

The length of arc and The area of the circular sector

في الشكل (١,٢١) الزاوية θ تقابل قوسًا طوله L. نعلم أن الزاوية 2π تقابل قوسًا طوله 2πr. بما أن θ تتناسب طردا مع L، فإن:

$\frac{2\pi r}{L} = \frac{2\pi}{\theta}$ ، ومنه نجد طول القوس يساوي:

$$\boxed{L = r\theta} \qquad (١,١٩)$$



شكل (١,٢١) .

في الشكل (١,٢١) الزاوية θ يوافقها قطاعا دائريا مساحته S. نعلم أن الزاوية 2π يوافقها قطاعا دائريا مساحته (مساحة الدائرة بأكملها) πr^2 . وبما أن θ تتناسب طردًا مع S، فإن:

$\frac{\pi r^2}{S} = \frac{2\pi}{\theta}$ ، ومنه:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} r^2 \theta} \qquad (١,٢٠)$$

مـــثـــال (١ , ٩)

أوجد طول قوس الدائرة ومساحة القطاع الدائري الذي زاويته:

(أ) $\theta = 30^o$ ، (ب) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ، علما أن: $r = 5cm$

الحـــــل

(أ) $\theta = 30^o \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ (تقديرًا دائريًا).

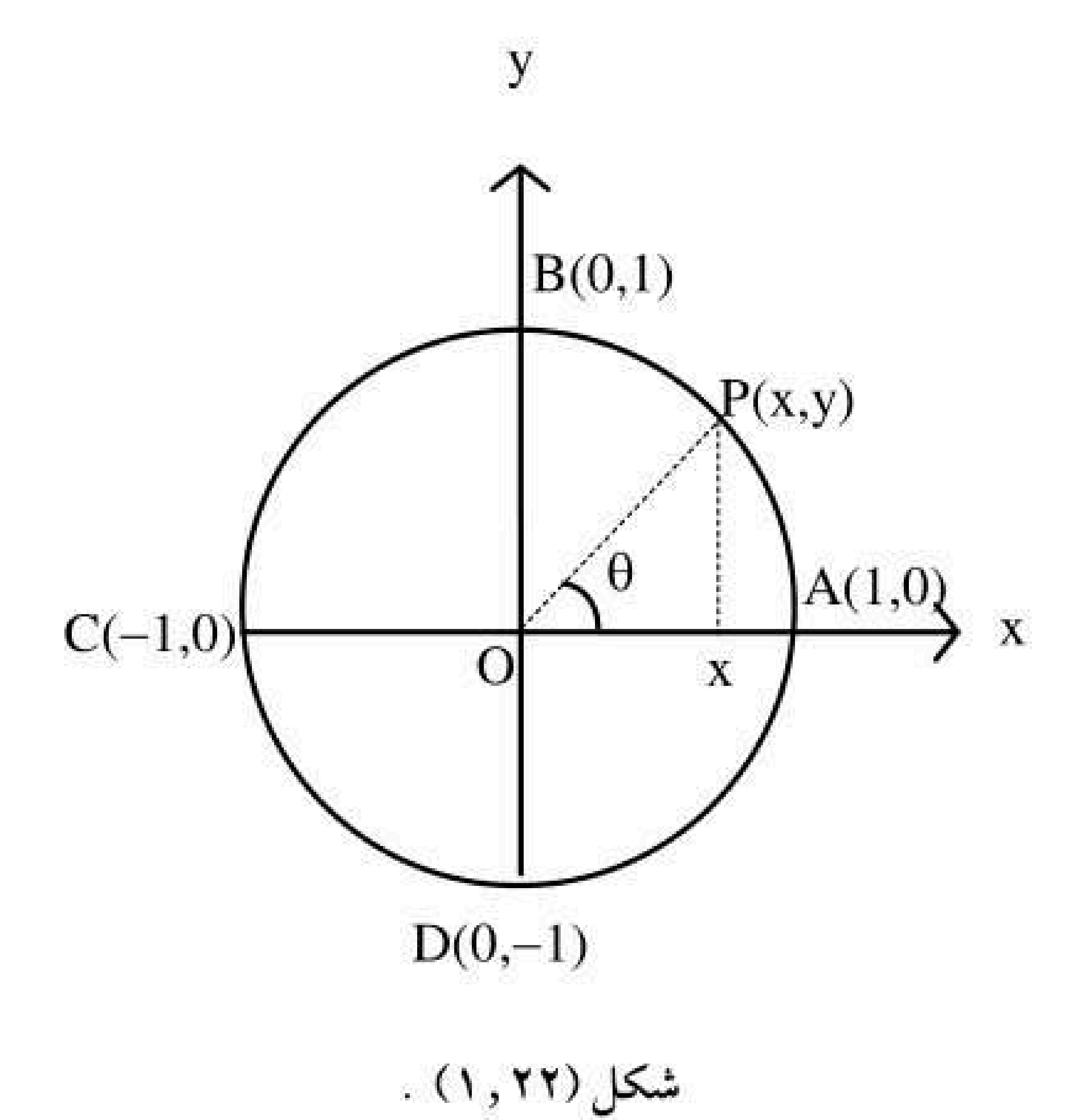
$L = \frac{5\pi}{6}cm$ ، $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(5)^2\frac{\pi}{6}$

$= \frac{25}{12}\pi cm^2$

(ب) $L = r\theta = 5\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{10}{3}\pi cm$

$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(5)^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{25}{3}\pi cm^2$

(١ , ٦) النسب المثلثية لزاوية في الحالة العامة



شكل (١ , ٢٢) .

دائرة الوحدة (نصف قطرها يساوي الواحد)

نعرف النسب المثلثية لزاوية موجهة θ ونعتبر المحور x مبدأ قياس الزوايا، كما يلي:

$$\boxed{\begin{array}{l}(\cos\theta \neq 0)\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}،\cos\theta = x،\sin\theta = y \\ (\tan\theta \neq 0)\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}،(\cos\theta \neq 0)\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}،(\sin\theta \neq 0)\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}\end{array}} \quad (١,٢١)$$

بفرض أن كلا من مقامات الكسور في (٢١ , ١) لا يساوي الصفر.

من الملاحظ أن:

(من إحداثيي A) $\tan 0 = 0$ ، $\cos 0 = 1$ ، $\sin 0 = 0$

(غير معرف) (من إحداثيي B) $\tan\frac{\pi}{2}$ ، $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ، $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

(من إحداثيي C) $\tan\pi = 0$ ، $\cos\pi = -1$ ، $\sin\pi = 0$

(غير معرف) (من إحداثيي D). $\tan\frac{3\pi}{2}$ ، $\cos-\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$ ، $\sin-\frac{\pi}{2} = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

لاحظ من الشكل أن: $x^2 + y^2 = 1$ (حسب فيثاغورث)

أي أن:

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1} \quad (١,٢٢)$$

وبتقسيم الطرفين تارة على $\cos^2\theta$ وتارة على $\sin^2\theta$، نجد:

$$\boxed{\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta} \Leftarrow \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

أو:

$$\boxed{\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta} \Leftarrow 1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} \quad (١,٢٣)$$

مـثـال (١,١٠)

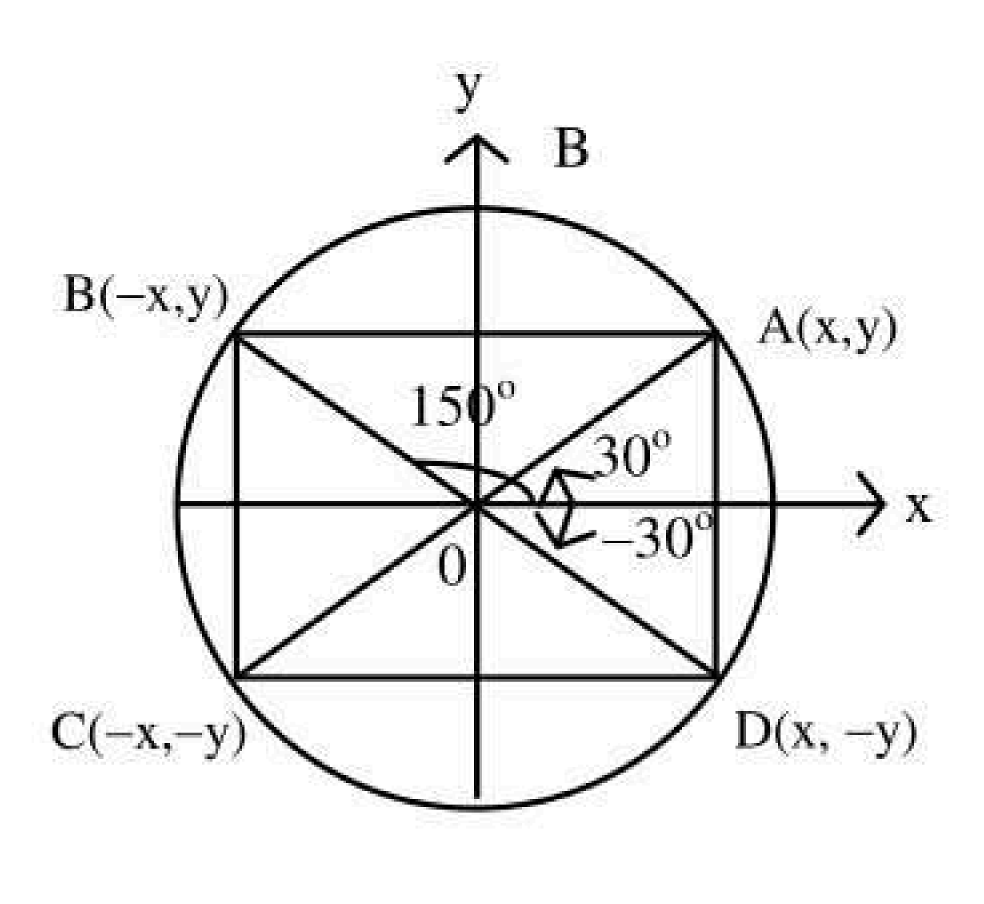
أوجد النسب المثلثية للزوايا 150^o ، 210^o ، 330^o



الحـــل

إذا قطع الضلع النهائي للزاوية 30^o الدائرة في النقطة A، فإن الضلع النهائي للزاوية 150^o يقطعها في النقطة B نظيرة النقطة A بالنسبة للمحور y وبالعكس فإن نظيرة B بالنسبة للمحور نفسه هي النقطة A.

إذن: الزاوية الموافقة للزاوية 150^o والواقعة في الربع الأول هي:



شكل (١,٢٣) .

$150^o - 180^o = 30^o$ (نحصل عليها بأخذ مكملة الزاوية 150^o)

والزاوية 210^o يقطع ضلعها النهائي الدائرة في النقطة C نظيرة A بالنسبة لنقطة الأصل فلإيجاد الزاوية الموافقة للزاوية 210^o والواقعة في الربع الأول:

نطرح 180^o من الزاوية 210^o، فنجد: $180^o - 210^o = 30^o$

والزاوية 330^o يقطع ضلعها النهائي الدائرة في النقطة D نظيرة A بالنسبة للمحور x فلإيجاد الزاوية الحادة الموافقة للزاوية 330^o :

نطرح الزاوية 330^o من الزاوية 360^o، فنجد: $330^o - 360^o = 30^o$ أما الزاوية -30^o فيوافقها الزاوية 30^o مباشرة.

وفي جميع الحالات لإيجاد النسب المثلثية لهذه الزوايا، نحسب النسب المثلثية للزاوية الحادة 30^o فنجد:

$$\tan30 = \frac{\sin30}{\cos30} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ، } x = \cos30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ، } y = \sin30 = \frac{1}{2}$$

ومنه، نجد من الشكل:

$y=\sin150=\frac{1}{2}$ ، $-x=\cos150=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan150=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (الموجب هو $\sin\theta$)

$-y=\sin210=-\frac{1}{2}$ ، $-x=\cos210=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan210=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (الموجب هو $\tan\theta$)

$-y=\sin330=-\frac{1}{2}$ ، $x=\cos330=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan330=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (الموجب هو $\cos\theta$)

أما النسب المتبقية فنحسبها استنادا للعلاقات:

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}، \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}، \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta} \qquad (١,٢٤)$$

مـثـال (١,١١)

أوجد النسب المثلثية للزوايا: (أ) -45^o ، (ب) 390^o ، (ج) 780^o

الحـــل

(أ) الزاوية: -45^o نهايتها تقع في الربع الرابع ويوافقها الزاوية 45^o .

إذن: $x=\cos45=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $y=\sin45=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\tan45=1$

وبالتالي: $x=\cos(-45)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $-y=\sin(-45)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\tan(-45)=-1$

(ب) الزاوية: 390^o يوافقها في الربع الأول (بعد حذف دورة كاملة) 30^o ونسبها المثلثية هي النسب نفسها للزاوية 30^o .

(ج) الزاوية: 780^o يقطع ضلعها النهائي الدائرة في نفس الموضع الذي يقطع الضلع النهائي للزاوية 60^o (حذفنا دورتين). فلها النسب نفسها، انظر المثال (١,٥). وبأخذ مقلوبات النسب السابقة نحصل على النسب المتبقية.

مـثـال (١,١٢)

إذا كان: ١) $\sec\theta=-3$ والزاوية تقع في الربع الثالث

٢) $\cot\theta = \frac{-4}{3}$ والزاوية تقع في الربع الثاني. فأوجد النسب المثلثية المتبقية.

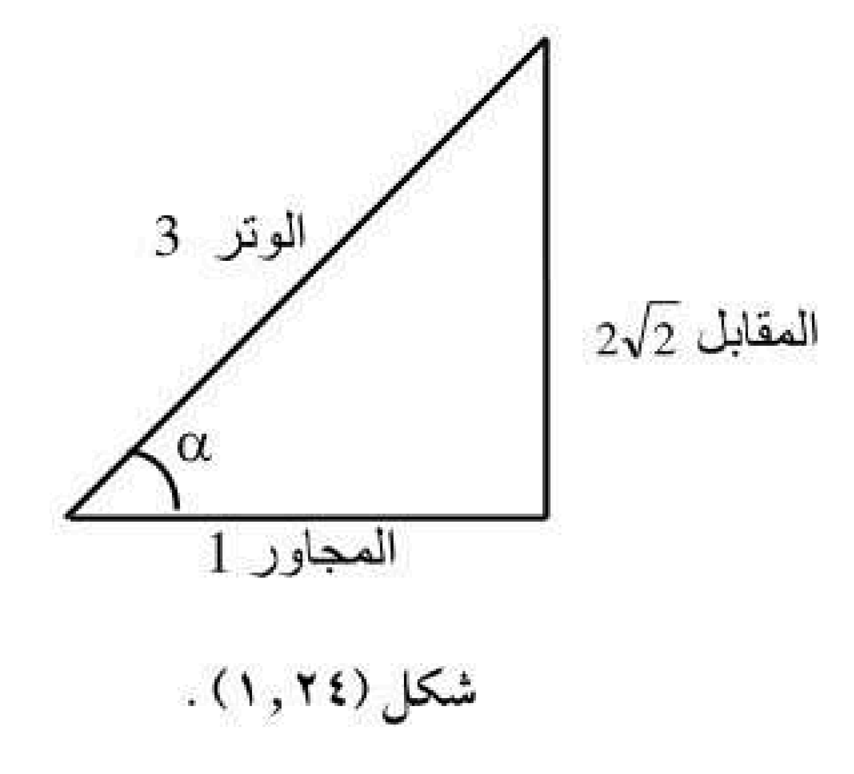
الحـــل

١) $\sec\theta = -3 \Leftarrow \cos\theta = -\frac{1}{3}$

وحسب موقع الزاوية، فإن:

$\sin\theta < 0$، $\tan\theta > 0$

نحسب النسب للزاوية الحادة α الموافقة لها والواقعة في الربع الأول، فنجد:



شكل (١,٢٤).

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ، $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ ، $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$

بالتالي: $\sin\theta = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ ، $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ ، $\tan\theta = 2\sqrt{2}$ (tanθ هي الموجبة في الربع الثالث). (اكتفينا بالنسب الأساسية الثلاث وهذا ما سنفعله في معظم الأحيان).

٢) $\cot\theta = -\frac{4}{3} \Leftarrow \tan\theta = -\frac{3}{4}$

وحسب موقع الزاوية، فإن:

$\sin\theta > 0$، $\cos\theta < 0$

النسب المثلثية للزاوية θ:

$\sin\theta = \frac{3}{5}$ ، $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

الوتر 5
المقابل 3
α
المجاور 4

شكل (١,٢٥).

(١,٧) حل المعادلات المثلثية

مـثـال (١,١٣)

حل المعادلات التالية إذا كان $0 \le x \le 2\pi$:

١) $\cot x = -1$ ٢) $\sec x = \sqrt{2}$ ٣) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحـــل

لِنُذكر بأن حل المعادلات:

(١,٢٥)

$x=\pi-a+2\pi n$ أو $x=a+2\pi n \Leftarrow \sin x=\sin a$

$x=\pm a+2\pi n \Leftarrow \cos x=\cos a$

$x=a+\pi n \Leftarrow \tan x=\tan a$ ، حيث n عدد صحيح

١) $\tan x=\tan\frac{3\pi}{4} \Leftarrow \tan x=-1 \Leftarrow \cot x=-1$

والحل هو: $x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$ والمقبول:

$(n=0)\frac{3\pi}{4}$، $(n=1)\pi+\frac{3\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

٢) $\cos x=\cos\frac{\pi}{4} \Leftarrow \cos x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftarrow \sec x=\sqrt{2}$

والحل هو: $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$ والمقبول:

$(n=0)\frac{\pi}{4}$، $(n=1)2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

٣) $\sin 2x=\sin\frac{\pi}{3} \Leftarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

والحل هو: $2x=\frac{\pi}{3}+2\pi n \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\pi n$ والمقبول:

$(n=0)\frac{\pi}{6}$، $(n=1)\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}$

أو: $2x=\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi n \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+\pi n$ والمقبول:

$(n=0)\frac{\pi}{3}$، $(n=1)\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$

مثال (١,١٤)

بسط النسب التالية:

١) $\sin(x-\frac{\pi}{2})$ ٢) $\cos(x+\frac{3\pi}{2})$ ٣) $\tan(x+\pi)$

الحل

سنستعين بالصيغ:

(١,٢٦)

$$\begin{cases}\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y\\ \cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y\end{cases}$$

١) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{2}-\cos x\sin\frac{\pi}{2}$

$$= \sin x \cdot 0 - \cos x \cdot 1 = -\cos x$$

٢) $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{3\pi}{2} - \sin x \sin\frac{3\pi}{2}$

$$= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot (-1) = \sin x$$

٣) $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}$

$$\sin(x+\pi) = \sin x \cos\pi + \cos x \sin\pi$$

$$= \sin x \cdot (-1) + \cos x \cdot 0 = -\sin x$$

$$\cos(x+\pi) = \cos x \cos\pi - \sin x \sin\pi$$

$$= \cos x \cdot (-1) - \sin x \cdot 0 = -\cos x$$

إذن: $\tan(x+\pi) = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$

مـثـال (١٥ , ١)

أوجد(أ) $\sin 2x$ ، (ب) $\cos 2x$ إذا كان $\sin x = \frac{3}{5}$ والزاوية x تقع في الربع الثاني.

الحـــل

(أ) $\sin 2x = \sin(x+x)$

$$= \sin x \cos x + \cos x \sin x$$

$$= 2\sin x \cos x$$

إذن:

$$\boxed{\sin 2x = 2\sin x \cos x} \qquad (١ , ٢٧)$$

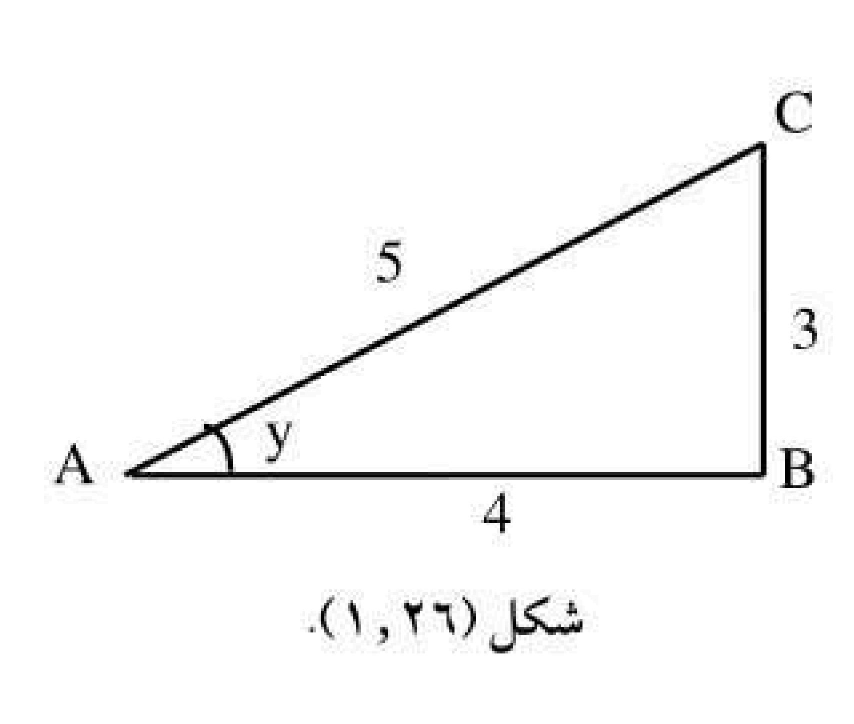
الزاوية تقع في الربع الثاني، إذن: $\cos x < 0$

من المثلث القائم شكل (٢٦ , ١)، نجد:

$\cos y = \frac{4}{5}$ (y الزاوية الحادة الموافقة في الربع الأول)

إذن: $\cos x = -\frac{4}{5}$

بالتالي فإن: $\sin 2x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{-4}{5} = \frac{-24}{25}$



شكل (٢٦ , ١).

(ب) $\cos 2x = \cos(x+x)$

$$= \cos x \cos x - \sin x \sin x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

إذن:

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x} \qquad (١,٢٨)$$

ومنه: $\cos 2x = (\frac{-4}{5})^2 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{7}{25}$

مـــثـــال (١,١٦)

(أ) اكتب: $\sin 2x - \sin x$ على شكل حاصل ضرب نسبتين مثلثيتين.

(ب) اكتب: $\cos 2x + \cos 4x$ على شكل حاصل ضرب نسبتين مثلثيتين.

الحـــــل

(أ) نضع $2x = \alpha + \beta$

$x = \alpha - \beta$

فيكون: $\frac{3x}{2} = \alpha$ (بالجمع)

$\frac{x}{2} = \beta$ (بالطرح)

إذن: $\sin 2x - \sin x = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$

$= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta - (\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta)$

$= 2\cos\alpha \sin\beta = 2\cos\frac{3x}{2} \sin\frac{x}{2}$

(ب) نضع $4x = \alpha + \beta$

$2x = \alpha - \beta$

فيكون: $3x = \alpha$ (بالجمع)

$x = \beta$ (بالطرح)

إذن: $\cos 4x + \cos 2x = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)$

$= 2\cos\alpha \cos\beta = 2\cos 3x \cos x$

يمكن حل السؤال بسهولة بالاستعانة بالملحوظة (١-٢) صفحة ٣٢.

مـــثـــال (١٧ , ١)

(أ) اكتب: $\sin 3x \cos 2x$ على شكل مجموع نسبتين مثلثيتين.

(ب) اكتب: $\sin 5x \sin 2x$ على شكل مجموع نسبتين مثلثيتين.

الحـــــل

هنا نلجأ إلى الصيغة: $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

أو إلى الصيغة: $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

(أ) من الواضح أن الصيغة الأولى هي المفيدة في هذه الحالة:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

بالجمع: $\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2\sin x \cos y$

إذن: $\sin 5\alpha + \sin \alpha = 2\sin 3\alpha \cos 2\alpha$

ومنه: $\frac{1}{2}[\sin 5\alpha + \sin \alpha] = \sin 3\alpha \cos 2\alpha$ (نضع $\alpha = x$)

(ب) من الواضح أن الصيغة الثانية هي المفيدة في هذه الحالة:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

بالطرح: $\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2\sin x \sin y$

إذن: $\cos 7\alpha - \cos 3\alpha = -2\sin 5\alpha \sin 2\alpha$

ومنه: $\frac{1}{2}[\cos 3\alpha - \cos 7\alpha] = \sin 5\alpha \sin 2\alpha$ (نضع $\alpha = x$)

المثالان السابقان يغنيان الطالب عن حفظ قوانين التحويل والتي تحول مجموع نسبتين مثلثيتين إلى حاصل ضرب نسبتين وبالعكس.

يمكن حل السؤال بسهولة بالاستعانة بصيغ التحويل الواردة في الصفحة ٢٧٧.

(٨ , ١) حل المعادلة من الدرجة الثانية

١) باستخدام المميز

مـــثـــال (١٨ , ١)

أوجد حل المعادلة: $6x^2 - 11x + 3 = 0$

الحـــل

مميز المعادلة: $ax^2+bx+c=0$ ، حيث $a \neq 0$

هو: $m=b^2-4ac$

وإذا كان: $m>0$ فتقبل المعادلة حلين هما:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{m}}{2a}$$

وفي معادلتنا: $a=6, b=-11, c=3$

فالمميز: $m=b^2-4ac=121-4\cdot3\cdot6$

$$=121-72=49$$

والحلان: $x=\frac{-b\pm\sqrt{m}}{2a}=\frac{11\pm7}{12}$ ، وهما:

$$x_1=\frac{11+7}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}, x_2=\frac{11-7}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

مــثـــال (١,١٩)

حل المعادلة: $x^2+x+1=0$

$$m=b^2-4ac=1-4=-3 \Leftarrow a=1, b=1, c=1$$

المميز سالب ولا يوجد جذور حقيقية.

مــثـــال (١,٢٠)

١) حل المعادلة: $4x^2-12x+9=0$

$$m=144-4.4.9=0 \Leftarrow a=4, b=-12, c=9$$

والمعادلة تقبل جذرًا مضاعفًا: $x=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}=\frac{-b}{2a}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

٢) بالتحليل

إذا كان المميز m مربعًا لعدد صحيح (مربع تام) فبالإمكان إيجاد الجذور عن طريق التحليل.

(أ) معامل x^2 يساوي الواحد

مــثـــال (١,٢١)

حل المعادلة: $x^2+bx+c=x^2-4x-77=0$

الحـــــل

المميز: $m = 16 - 4(-77) = (18)^2$

بالتأكيد يمكن تحليل الطرف الأيسر من المعادلة. والطريقة أن نفتش عن عددين حاصل ضربهما $c = -77$ ومجموعهما $b = -4$ فنجد $(7)(-11) = -77$، فالعددان هما: -11 ، 7 والتحليل من الشكل: $(x+7)(x-11) = 0$ والجذران هما -7, 11.

مـثـال (١,٢٢)

حل المعادلة: $x^2 - 7x + 12 = 0$

الحـــــل

نفتش عن عددين حاصل ضربهما 12 ومجموعهما -7، فنجد:

$$12 = (-4)(-3)$$

والتحليل من الشكل: $(x-4)(x-3) = 0$ والجذران هما $4, 3$

(ب) معامل x^2 لا يساوي الواحد.

مـثـال (١,٢٣)

حل المعادلة: $ax^2 + bx + c = 3x^2 - x - 4 = 0$

نضرب طرفيها بالعدد $a = 3$، فتصبح على الشكل:

$$(3x)^2 - (3x) - 12 = 0$$

$$\Leftarrow y^2 - y - 12 = 0 \quad (y = 3x)$$

التحليل هو من الشكل: $(y-4)(y+3) = 0$ أو $(3x-4)(3x+3) = 0$

والجذران هما: $x = -1$ ، $x = \frac{4}{3}$

مـثـال (١,٢٤)

حل المعادلة: $5x^2 - 9x + 4 = 0$

الحـــــل

نضرب طرفي المعادلة بالعدد: a = 5، فتصبح على الشكل:

$$(5x)^2 - 9(5x) + 20 = 0$$

أو: $(y = 5x)\ y^2 - 9y + 20 = 0$

لكنّ: 20=(4−)(5−) ومجموع العددين 9−، إذن شكل التحليل:

$(y - 5)(y - 4) = 0$ أو $(5x - 5)(5x - 4) = 0$

فالجذران هما: $x = \frac{4}{5}$، $x = 1$

مـــثـــال (١,٢٥)

حل المعادلة: $2x^2 - x - 21 = 0$

الحـــــل

نضرب طرفي المعادلة بالعدد: a = 2، فتصبح على الصورة:

$$(2x)^2 - (2x) - 42 = 0$$

أو: $(y = 2x)\ y^2 - y - 42 = 0$

نفتش عن عددين حاصل ضربهما 42- ومجموعهما 1−، فنجد:

$$-42 = (-7)(+6)$$

شكل التحليل: $(y-7)(y+6) = 0 \Leftarrow (2x-7)(2x+6) = 0$ والجذران هما: $-3, \frac{7}{2}$

وفي جميع الحالات، نضرب طرفي المعادلة بالعدد a ونضع $ax=y$ ، فترد الحالة إلى الحالة (أ) بشرط أن يكون المميز هو مربع تام (مربع لعدد صحيح).

تمـــــاريـــن (١ , ١)

أوجد معادلة كل مستقيم فيما يلي ضمن الشروط المحددة له:

١) مار بالنقطتين: $(1, 1)$ ، $(2, 3)$

٢) ميله يساوي: $m = 4$ ومار بالنقطة $(3, 5)$

٣) يقطع من الجزء الموجب للمحور y جزءا قدره 4سم وميله يساوي -4

٤) يمر بالنقطة $(1, 1)$ وعمودي على المستقيم $2x - y = 0$

٥) يمر بالنقطة $(2, 3)$ ويوازي المستقيم $2x - 3y + 5 = 0$

٦) يمر بنقطة تقاطع المستقيمين: $x - y = 0$ ، $x + 2y = 1$ وعمودي على المستقيم $y = 2x$.

٧) ارسم المستقيمات التالية:

(أ) $y = 2x$ (ب) $y + x = 1$ (ج) $y = -3$

(د) $x = -4$ (هـ) $2y - 3x = 5$ (و) $y = -x$

٨) أوجد بعد النقطة $(1, 1)$ عن كل من المستقيمات الواردة في التمرين (٧).

إرشاد: بعد النقطة (x_1, y_1) عن المستقيم: $ax + by + c = 0$ يُعطى بالصيغة:

$$L = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (١ , ٢٨)$$

٩) حدد المستقيمات المتوازية أو المتعامدة بين المستقيمات التالية:

(أ) $x - y + 3 = 0$

(ب) $x + y - 4 = 0$

(ج) $2x + 2y + 5 = 0$

(د) $x - y = 5$

١٠) أوجد الرأس الرابع D لمتوازي الأضلاع ABCD علما أن:
$A(1,1), B(2,2), C(0,2)$ ، ثم أوجد أطوال أضلاعه.

١١) أوجد إحداثيات منتصفات القطع التالية:
$[A,B]$،$[C,A]$،$[A,D]$ حيث A,B,C,D معطاة في التمرين (١٠).

لاحظ أن إحداثيي منتصف القطعة الواصلة بين النقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، هما:

(١,٢٩)

$$\boxed{\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}}$$

١٢) أوجد معادلة الدائرة المارة بالنقاط: $(1,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$

١٣) أوجد ميل المماس للدائرة: $x^2+y^2-2x=0$ عند النقطة $(1,1)$ ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

(**إرشاد:** لاحظ أن هذه النقطة تحقق معادلة الدائرة ثم استفد من إحداثيي مركز الدائرة).

١٤) أوجد النسبة المثلثية للزوايا الحادة التالية إذا كان:

(أ) $\sin x=\frac{1}{2}$ (ب) $\cos x=\frac{1}{4}$ (ج) $\tan x=1$

(د) $\sec x=3$ (هـ) $\csc x=2$ (و) $\cot x=2$

١٥) أوجد بالدرجات الزوايا التالية المعطاة بالتقدير الدائري:

$\frac{\pi}{8}$ ، $\frac{11\pi}{5}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، $\frac{12\pi}{5}$ ، $\frac{17\pi}{3}$

١٦) أوجد بالتقدير الدائري الزوايا التالية:

400^o ، 120^o ، 420^o ، -60^o ، 150^o ، 720^o ، -30^o

١٧) أوجد مساحة وأطوال أقواس القطاعات الدائرية التي زواياها بالتقدير الدائري:

$\frac{\pi}{3}$، $\frac{\pi}{2}$، $\frac{5\pi}{6}$، 2π

علما أن طول نصف قطر الدائرة يساوي 50سم.

١٨) أوجد النسب المثلثية للزوايا التالية:

-45^o ، 135^o ، 225^o ، 315^o ، -120^o ، 240^o ، 300^o ، 720^o ، 315^o ، 15^o

١٩) أوجد النسب المثلثية للزوايا التالية:

-30^o ، 210^o ، 75^o ، 15^o ، -345^o ، 120^o

إرشاد: اعتمد فقط على الصيغتين التاليتين لرد النسب المثلثية للزوايا إلى نسب مثلثية لزوايا حادة شهيرة:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

فمثلا: $\sin 150 = \sin(180 - 30)$، $\sin 240 = \sin(180 + 60)$

$\sin 315 = \sin(360 - 45)$، $\sin(-45) = \sin(0 - 45)$، $\sin(75) = \sin(45 + 30)$

٢٠) أوجد النسب المثلثية الأساسية للزوايا الآتية وذلك ضمن الشروط الموضحة:

(أ) $\sec x = 2$ والزاوية تقع في الربع الأول

(ب) $\cot x = \frac{1}{2}$ الزاوية تقع في الربع الثالث

(ج) $\cos x = \frac{1}{4}$ الزاوية تقع في الربع الرابع

(د) $\sin x = \frac{2}{3}$ الزاوية تقع في الربع الثاني

٢١) حل المعادلات الآتية على الفترة $[0,2\pi]$:

(أ) $\sin x = \frac{1}{2}$ (ب) $\sin 2x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ (ج) $\cos 3x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

(د) $\sec 4x = -2$ (هـ) $\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = -1$ (و) $\csc\frac{1}{5}x = -1$

٢٢) حل المعادلات الآتية على الفترة $[0,2\pi]$:

(أ) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ (ب) $\sin 3x = -\sin x$

(ج) $\cos 2x = \cos 3x$ (د) $\tan 2x = -\tan x$

(و) $\sin 3x = \cos x$ (ز) $\cot 3x = -\tan 2x$

٢٣) أثبت أن: $\boxed{\tan(x \pm y) = \frac{\tan \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}}$ (١,٣٠)

٢٤) أثبت أن: $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta, 1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta$

ثم استفد من هاتين الصيغتين لإيجاد: $\cos 15, \sin 15, \cos\frac{\pi}{8}, \sin\frac{\pi}{8}$

٢٥) حل المعادلة التالية على الفترة $[0,2\pi]$:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

(**إرشاد:** أثبت أن: $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x \cos x$)

٢٦) بسّط ما يلي:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)،\cos\left(-\frac{\pi}{4}+x\right)،\sin(3\pi+x)$$

$$\sec\left(-\frac{\pi}{2}+2x\right)،\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)،\tan(\pi+x)$$

٢٧) حوّل إلى حاصل ضرب المقادير التالية:

(أ) $\cos 2x-\cos 3x$ (ب) $\cos x+\cos 2x$ (ج) $\sin 4-\sin x$

٢٨) حوّل من حاصل ضرب إلى مجموع المقادير التالية:

(أ) $\sin x\sin 3x$ (ب) $\cos x\sin x$ (ج) $\cos x\cos 2x$

٢٩) حل المعادلة التالية:

(أ) $x^2-5x+6=0$ (ب) $x^2-9=0$

(ج) $x^2-5x=0$ (د) $x^2-4x+4=0$

(هـ) $4x^2+12x+9=0$ (و) $2x^2-11x+15=0$

(ز) $21x^2+20x-9=0$ (ح) $8x^2-2x-15=0$

(ط) $x^2-x-1=0$ (ي) $6x^2-5x-21=0$

(ك) $x^2+x+8=0$ (ل) $35x^2-12x-32=0$

ملحوظة (١-٢)

استعن لحل المثالين (٢٧) و (٢٨) بالصيغ التالية:

$$\begin{cases}\sin u+\sin v=2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\\ \sin u-\sin v=2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}\\ \cos u+\cos v=2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\\ \cos u-\cos v=-2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}\end{cases}$$

التي تحول مجموع نسبتين مثلثيتين إلى حاصل ضربها، وبالصيغ الواردة في الصفحة ٢٧٧.

الفصل الثاني

المتباينات
INEQUALITIES

(١ , ٢) الفترات في مجموعة الأعداد الحقيقية IR

تعريف (١ , ٢) (Definition)

إذا كان a , b عددين حقيقيين ($a,b \in$ IR) فإننا نسمي المجموعات الجزئية التالية من IR بالفترات ونعرفها كما يلي:

	المجموعة الجزئية	الرمز	اسم الفترة	بيان الفترة
١	$\{x \mid a \le x \le b\}$	[a,b]	فترة مغلقة (Closed)	a ●———● b
٢	$\{x \mid a < x < b\}$	(a,b) أو:]a,b[	فترة مفتوحة Open interval	a ○———○ b
٣	$\{x \mid a < x \le b\}$	(a,b]	فترة نصف مفتوحة	a ●———○ b
٤	$\{x \mid a \le x < b\}$	[a,b)	Half-Open interval	a ○———● b
٥	$\{x \mid x \ge a\}$	$[a,\infty)$	Infinite Interval	a ●——— ∞
٦	$\{x \mid x > a\}$	(a,∞)	فترة لانهائية	a ○——— ∞
٧	$\{x \mid x \le a\}$	$(-\infty,a]$		−∞ ———● a
٨	$\{x \mid x < a\}$	$(-\infty,a)$		−∞ ———○ a
٩	$\{x \mid -\infty < x < \infty\}$	IR	مجموعة الأعداد الحقيقية	−∞ ——— ∞

(٢ , ٢) بعض المجموعات المستخدمة في هذا الكتاب

اسم المجموعة	الأعداد الطبيعية (الصحيحة الموجبة) **Positive Integers Numbers**	الأعداد الصحيحة **Integers numbers**	الأعداد الكسرية **Rational numbers**	الأعداد الحقيقية **Real numbers**	الأعداد الحقيقية ماعدا الصفر
الرمز	$IN = Z^+$	Z	Q	IR	IR*
الرمز العربي	ط= ص+	ص	ن	ح	ح*

(٣ , ٢) القيمة المطلقة

Absolute Value

تعريف (٢ , ٢)

القيمة المطلقة لعدد حقيقي x ، يرمز لها بالرمز $|x|$ وتُعَرّفُ كما يلي:

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases} \qquad (٢ , ١)$$

فمثلا: $|5| = 5$، $|0| = 0$، $|-3| = 3$

نتيجــة (١ , ٢)

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

نتيجــة (٢ , ٢)

القيمة المطلقة لعدد لا يساوي الصفر هي عدد موجب استنادًا لخواص الحقل IR وللتعريف (٢ , ٢)

يمكن البرهان على صحة النظريتين التاليتين:

نظرية (٢, ١)(Theorem)

إذا كانت x ، y وَ c أعدادًا حقيقية، فإن:

١) $x > y \Leftrightarrow x + c > y + c$

(يمكن أن نضيف (Add) أو نطرح (Subtract)من طرفي متباينة العدد نفسه).

٢) $x > y \Leftrightarrow cx > cy$ (c عدد موجب (Positive))

(يمكن أن نضرب (Multiply) طرفي متباينة أو نقسم (Divide) طرفي متباينة على عدد موجب).

٣) $x > y \Leftrightarrow cx < cy$ (c عدد سالب (Negative))

(يمكن أن نضرب طرفي متباينة أو نقسم طرفي متباينة على عدد سالب مع تغيير جهة التباين).

نظرية (٢, ٢)

إذا كان x , y عددين حقيقيين، وكان a عددًا موجبًا، فإن:

١) $|xy| = |x||y|$

٢) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

٣) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ أو $x \geq a$

٤) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (متباينة المثلث) (Triangle inequality)

٥) $||x| - |y|| \leq |x + y|$

٦) $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ أو $x = -a$

(٢, ٤) حل المتباينات

The Solution of Inequalities

حل متباينة طرفاها يتبعان متغيرًا واحدًا x هو إيجاد جميع قيم x المحققة للمتباينة.

مـثـال (١ , ٢)

حل المتباينة: $\frac{x}{3} + 2x > 1 - x$

الحـل

١) نضرب طرفي المتباينة بالعدد 3 ، فنجد:

$$x + 6x > 3 - 3x$$

نضيف 3x للطرفين فنجد:

$$x + 6x + 3x > 3$$

(لاحظ أن هذا يكافئ نقل حد من طرف إلى طرف آخر مع تغيير إشارة ذلك الحد)

ومنه: $10x > 3 \Leftarrow x > \frac{3}{10}$

فمجموعة الحل هي: $\left(\frac{3}{10}, \infty\right)$

مـثـال (٢ , ٢)

حل المتباينة: $\frac{x-1}{6} \geq x - \frac{2x}{3} + 2$

الحـل

نضرب طرفي المتباينة بالعدد 6 ، فنجد:

$$\Leftarrow x - 1 \geq 6x - 4x + 12$$
$$\Leftarrow x - 6x + 4x \geq 1 + 12$$
$$x \leq -13 \Leftarrow -x \geq 13$$

(ضربنا الطرفين بالعدد السالب 1- مع تغيير جهة التباين)

فمجموعة الحل هي: $(-\infty, -13]$

مـثـال (٣ , ٢)

حل المتباينة: $-1 \leq \frac{2-3x}{4} < 1$

الحـل

نضرب أطراف المتباينة بالعدد 4، فنجد:

$$4 > 2 - 3x \geq -4$$

نضيف إلى جميع الأطراف العدد 2-، فنجد:

$\frac{-2}{3} < x \leq 2$ ومنه: $2 > -3x \geq -6$

(غيرنا جهة التباين)، فمجموعة الحل هي: $\left(-\frac{2}{3}, 2\right]$

مـــثـــال (٢ , ٤)

حل المتباينة: $|2x-3| \leq 1$

الحـــــل

$$|2x-3| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x-3 \leq 1 \Rightarrow$$
$$3-1 \leq 2x \leq 1+3 \Rightarrow 2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$$

مجموعة الحل (the solution set) هي: $[1, 2]$

مـــثـــال (٢ , ٥)

حل المباينة: $|3x-4| > 5$

الحـــــل

$|3x-4| > 5 \Leftrightarrow 3x-4 > 5$ أو $3x-4 < -5 \Rightarrow$

$3x > 9$ أو $3x < -1 \Rightarrow$

$x > 3$ أو $x < -\frac{1}{3}$

فمجموعة الحل هي: $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (3, \infty) = \text{IR} - \left[-\frac{1}{3}, 3\right]$

مـــثـــال (٢ , ٦)

حل المتباينة: $||4x-2|-1| < 3$

الحـــــل

$$||4x-2|-1| < 3 \Leftrightarrow -3 < |4x-2| - 1 < 3 \Rightarrow$$
$$-2 < |4x-2| < 4$$

(أ) حل المتباينة: $-2 < |4x-2|$ هو IR

لأن المقدار $|4x-2|$ موجب أو صفر وفي كلتا الحالتين أكبر من -2.

ب) أما حل المتباينة $|4x-2|<4$ فهو يكافئ حل المتباينة:

$$-4<4x-2<4 \Leftarrow -2<4x<6 \Leftarrow$$

$$-\frac{2}{4}<x<\frac{6}{4} \Leftarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$$

فمجموعة الحل هي: $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

وتقاطع الحلين في (أ)، (ب) هو $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ وهو حل المتباينة المعطاة.

مــثـــال (٢,٧)

حل المتباينة: $||x|-1|\geq 2$

الحـــــل

$$||x|-1|\geq 2 \Leftrightarrow |x|-1\geq 2 \text{ أو } |x|-1\leq -2 \Rightarrow$$

$$|x|\geq 3 \text{ أو } |x|\leq -1$$

(أ) حل المتباينة $|x|\leq -1$ هو $\varnothing$ لأن الطرف الأيسر هو $|x|$ وهو موجب أو صفر ولا يمكن أن يكون أقل أو يساوي -1 .

(ب) أما حل المتباينة $|x|\geq 3$ فهو: $\mathrm{IR}-(-3,3)$

وعلى الطالب برهان ذلك.

وبأخذ اتحاد الحلين في (أ)، (ب) نجد: $\mathrm{IR}-(-3,3)$ وهو حل المتباينة المعطاة.

مــثـــال (٢,٨)

حل المتباينات التالية:

١) $|x-1|<-1$ ٣) $|x-1|\geq -1$

٢) $|x-1|\leq -1$ ٤) $|x-1|\leq 0$

الحـــــل

١) مجموعة حلها $\varnothing$ لأن الطرف الأيسر موجب أو صفر ولا يمكن أن يكون أقل من عدد سالب.

٢) مجموعة حلها ∅ للسبب نفسه.

٣) مجموعة حلها IR لأن الطرف الأيسر مقدار موجب أو يساوي الصفر وفي كلتا الحالتين هو أكبر من عدد سالب.

٤) مجموعة حلها {1} لأن الطرف الأيسر موجب أو صفر ولا يمكن للمقدار الموجب أن يكون أقل من الصفر ولكن يمكن أن يساوي الطرف الأيسر صفرًا عند $x = 1$ وعندها يكون $x = 1$ حلاً للمتباينة.

ملحوظة

إشارة المقدار: $ax^2 + bx + c$

(عندما يأخذ المتغير x جميع القيم الحقيقية) هي دومًا مثل إشارة a (باستثناء مواضع الجذور فالمقدار يساوي صفرًا) إلا ما بين الجذرين (roots) إن وجدا فالإشارة هي عكس إشارة a.

مـــثـــال (٩ , ٢)

حل المتباينة: $6x^2 - 13x + 6 \geq 0$

الحـــــل

للتحليل: نضرب طرفي المتباينة بالعدد 6، فنجد:

$$(6x)^2 - 13(6x) + 36 \geq 0$$

(نفتش عن عددين حاصل ضربهما 36 ومجموعهما 13- فنجد:

$36 = (-4)(-9)$ والتحليل هو من الشكل:

$$(6x-9)(6x-4) \geq 0$$

جذرا المقدار من الدرجة الثانية (second degree): هما:

$x = \frac{3}{2}, x = \frac{2}{3}$ وإشارته هي:



ومجموعة حل المتباينة هي: $IR - \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$

مـثـال (٢,١٠)

حل المتباينة: $4x^2 + 3x + 1 < 0$

الحـــل

المميز يساوي: $9 - 16 = -7 < 0$ وإشارة المقدار هي من إشارة معامل x^2 أي أنها موجبة دومًا. فحل المتباينة هو $\emptyset$.

مـثـال (٢,١١)

حل المبتباينة: $4x^2 - 12x + 9 > 0$

الحـــل

المميز يساوي: $144 - 4(4)(9) = 0$ والمقدار مربع تام. إذن:
$(2x-3)^2 > 0$. وإشارة المقدار في الطرف الأيسر موجبة إلا عند $x = \frac{3}{2}$ فيقبل جذرًا مضاعفًا والحل هو: $IR - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

مـثـال (٢,١٢)

حل المتباينة: $\frac{2}{1-x} > \frac{x}{1+x}$ ، $x \neq -1, x \neq 1$
لننقل المقدار في الطرف الأيمن إلى الأيسر، فنجد:

$$\frac{2}{1-x} - \frac{x}{1+x} > 0$$

وبتوحيد المقامات، فإن:

$$\frac{x^2 + x + 2}{(1-x)(1+x)} > 0 \Leftarrow \frac{2(1+x) - x(1-x)}{(1-x)(1+x)} > 0$$

وبملاحظة أن مميز كثيرة الحدود في البسط هو: $1 - 8 = -7 < 0$ ، فإن إشارة كثيرة الحدود هي موجبة دومًا (من إشارة معامل x^2).

ولابد أن يكون: $(1-x)(1+x) > 0$

الجذران للطرف الأيسر هما: $-1, 1$ وما بين الجذرين الإشارة عكس إشارة معامل x^2 أي أنها موجبة. فالحل هو: $(-1, 1)$.

مـــثـــال (٢,١٣)

حل المتباينة: $f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-5x+6)}{x+4}$، $x \neq -4$

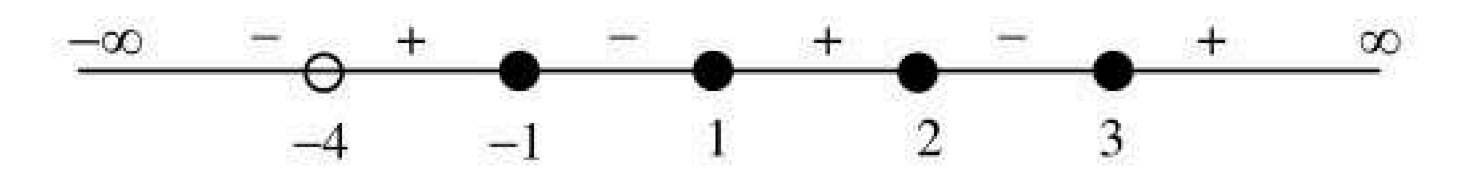
الحــــــل

١) بالتحليل نجد:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)}{(x+4)} \geq 0$$

جذور البسط والمقام (the numerator and dominator) : $1, -1, 2, 3, -4$

وهي جذور بسيطة.



فالإشارات تتناوب، وبملاحظة أن $f(0) = -\frac{6}{4} < 0$ فإن مجموعة الحل هي:

$$(-4, -1] \cup [1, 2] \cup [3, \infty)$$

٢) طريقة أخرى (طريقة الجدول)

ننشئ الجدول التالي: حيث وضعنا في السطر الأول جذور البسط والمقام التي حددت ست فترات على خط الأعداد، ثم ندرس الإشارة الخاصة بكل مقدار ونضرب بعدها الإشارات الخاصة بكل فترة ونضعها في السطر الأخير.

المقدار	$-\infty$		-4		-1		1		2		3		∞
x^2-1		+		+	0	−	0	+		+		+	
x^2-5x+6		+		+		+		+	0	−	0	+	
$x+4$		−	ǁ	+		+		+		+		+	
إشارة f(x)		−	ǁ	+	0	−	0	+	0	−	0	+	

مجموعة الحل هي: $(-4,-1]\cup[1,2]\cup[3,\infty)$

مــثــال (٢,١٤)

حل المتباينة: $x\neq -1, f(x)=\dfrac{(x^3+x)(x+3)}{(x+1)^2}\leq 0$

الحــــل

طريقة الجدول:

المقدار	$-\infty$		-3		-1		0		∞
x		−		−		−	0	+	
x^2+1		+		+		+		+	
$x+3$		−	0	+		+		+	
$(x+1)^2$		+		+	ǁ	+		+	
إشارة f(x)		+	0	−	ǁ	−	0	+	

مجموعة الحل: $[-3,0]-\{-1\}$

(وضعنا المقدار x^3+x على الشكل $x(x^2+1)$)

الطريقة المباشرة:

$-\infty \quad + \quad -3 \quad - \quad -1 \quad - \quad 0 \quad + \quad \infty$

المتباينة تكتب على الشكل:

$$f(x)=\frac{x(x^2+1)(x+3)}{(x+1)^2}\le 0$$

والمقدار x^2+1 موجب دوما أما المقدار $(x+1)^2$ فهو موجب إلا عند $x=-1$ فيساوي الصفر والعدد $x=-1$ ليس من مجال الدالة. فالإشارة هي من إشارة كثيرة الحدود $x(x+3)$ وهي سالبة ما بين الجذرين $-3,0$ موجبة خارج الجذرين فمجموعة الحل هي المحددة سابقا.

مـثـال (٢,١٥)

حل المتباينة: $\frac{x}{1-x}\ge 1$، $x\ne 1$

الحـــل

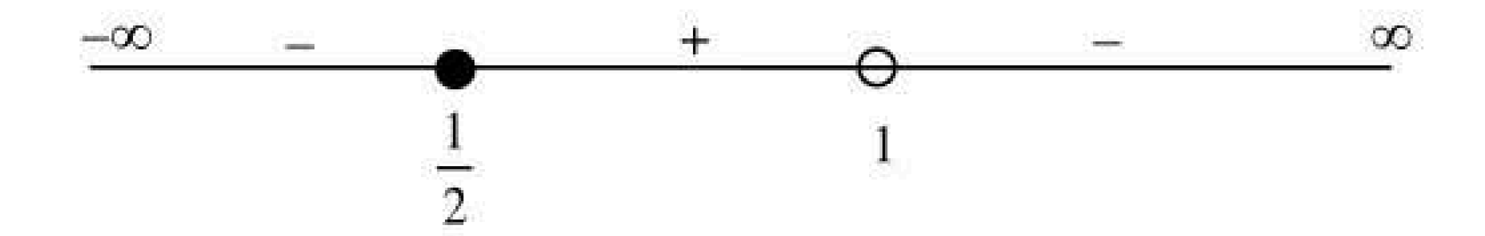
نتقل الحد من الطرف الأيمن إلى الأيسر، نجد:

$$\frac{x}{1-x}-1\ge 0$$

وبتوحيد المقامات، فإن:

$$\frac{x-(1-x)}{1-x}\ge 0 \Rightarrow \frac{2x-1}{1-x}\ge 0$$

جذور البسط والمقام: $\frac{1}{2},1$. وهي تحدد ثلاث فترات على خط الأعداد، والإشارات تتناوب بسبب كون الجذور بسيطة.



لاحظ أن: $f(2)<0$ وأن 1 جذر للمقام فمجموعة الحل هي: $[\frac{1}{2},1)$.

مـثـال (٢,١٦)

حل المتباينة: $\frac{3}{1+x}>\frac{2}{1-x}$، $x\neq -1, x\neq 1$

الحـــل

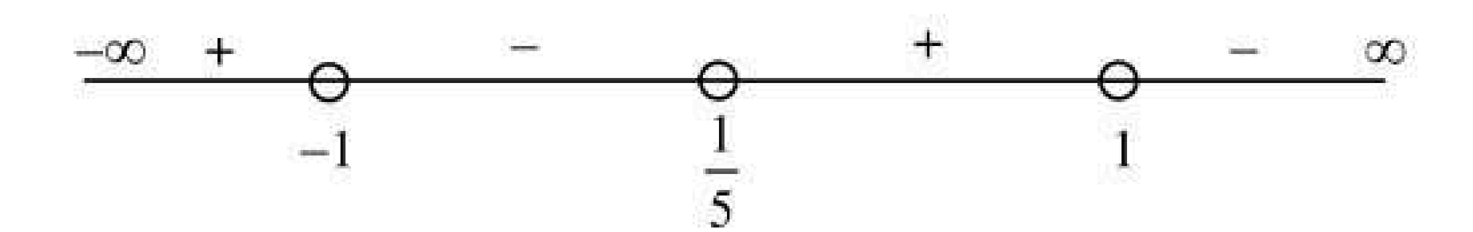
لننقل المقدار في الجانب الأيمن إلى الجانب الأيسر، فنجد:

$$\frac{2}{1-x}-\frac{3}{1+x}>0$$

وبتوحيد المقامات، فإن:

$$f(x)=\frac{5x-1}{(1-x)(1+x)}>0 \Leftarrow \frac{2(1+x)-3(1-x)}{(1-x)(1+x)}>0$$

جذور البسط والمقام: $1, -1, \frac{1}{5}$ وهي تحدد أربع فترات على خط الأعداد، والإشارات تتناوب بسبب كون الجذور بسيطة.



لاحظ أن $f(2)<0$ وأن الجذور جميعها ليست حلا.

فمجموعة الحل هي: $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{5},1\right)$.

مـثـال (٢,١٧)

حل المتباينة: $|2x-1|\le|x+1|$

الحـــل

بما أن المقدارين في الطرفين الأيمن والأيسر غير سالبين فيمكن أن نربع طرفي المتباينة، فنجد:

$$(2x-1)^2-(x+1)^2\le 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2\le(x+1)^2$$

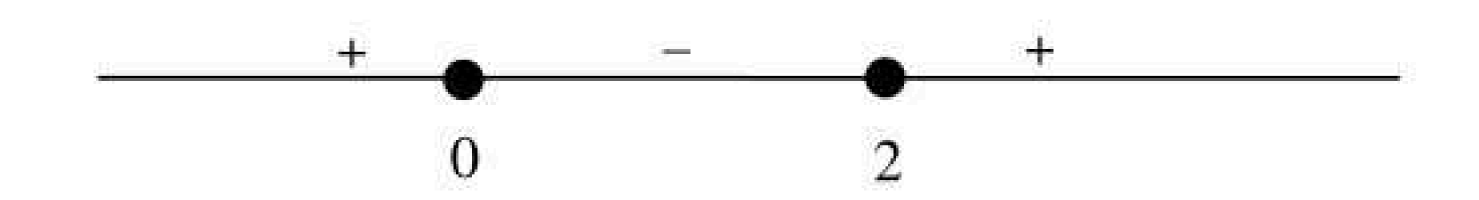
وبملاحظة أن الطرف الأيسر هو فرق بين مربع مقدارين وأن:

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ، فإن المتباينة تكتب على الشكل:

$$[(2x-1)-(x+1)][(2x-1)+(x+1)]\le 0$$

أو: $(x-2)(3x)\le 0$

وإشارة المقدار في الطرف الأيسر هي:



فمجموعة الحل هي: $[0,2]$

مـــثـــال (٢, ١٨)

حل المتباينة: $\frac{|3x-1|}{|x-2|}<1$ ، $x\ne 2$

الحـــل

حسب خواص القيمة المطلقة لقسمة مقدارين، فإن:

$\left|\frac{3x-1}{x-2}\right|<1$ ، ومنه:

$|3x-1|<|x-2|$ مع ملاحظة أن $x\ne 2$

وبتربيع الطرفين، نجد:

$$x\ne 2,\ (3x-1)^2-(x-2)^2<0$$

أو: $\Leftarrow x\ne 2,\ [(3x-1)-(x-2)][(3x-1)+(x-2)]<0$

$x\ne 2,\ (2x+1)(4x-3)<0$ وإشارة المقدار هي:



ومجموعة الحل هي: $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ ولا تحوي العدد 2 وإلا استثنيناه من الحل.

مـثـال (٢,١٩)

حل المتباينة: $|x| < 2x+1$

الحـل

في هذه الحالة لا يمكن أن نربع الطرفين لأن المقدار في الطرف الأيمن قد يكون موجبًا وقد يكون سالبًا، لذا نلجأ إلى تعريف القيمة المطلقة.

١) إذا كان: $x \geq 0$ ، فإن $|x| = x$. وبالتالي تكتب المتباينة على الشكل:

$x < 2x+1 \Leftarrow -1 < x$ والمقبول من هذا الحل هو الموافق للشـرط $x \geq 0$ ، إذن مجموعة الحل الموافق: $[0,\infty)$

٢) إذا كان: $x < 0$ ، فإن $|x| = -x$. وبالتالي تكتب المتباينة على الشكل:

$-x < 2x+1 \Leftarrow -1 < 3x \Leftarrow -\frac{1}{3} < x$ والمقبول هو الموافق للشـرط $x < 0$ ، إذن مجموعة الحل الموافق:

$$\left(-\frac{1}{3},0\right)$$

واتحاد الحلين في (١) و (٢) يعطي الحل المطلوب وهو:

$$\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$$

مـثـال (٢,٢٠)

أثبت أنه إذ كان: $|x-3| < 2$ ، فإن: $|x^2-8| < 17$

الحـــل

$$\Leftarrow 1 < x < 5 \Leftrightarrow -2 < x-3 < 2 \Leftrightarrow |x-3| < 2$$
$$\Leftarrow -7 < x^2 - 8 < 17 \Leftarrow 1 < x^2 < 25$$
$$|x^2 - 8| < 17 \Leftarrow -17 < -7 < x^2 - 8 < 17$$

مــثـال (٢,٢١)

إذا كان $|x| < 4$ فأثبت أن: $\left|\frac{x-3}{x^2+1}\right| < 7$

الحـــل

$$\left|\frac{x-3}{x^2+1}\right| = \frac{|x-3|}{x^2+1} \le \frac{|x-3|}{1} \le |x| + |-3| < 4 + 3 = 7$$

تمـــاريـــن (١ , ٢)

حل المتباينات التالية:

١) $2x+\frac{1}{2}\geq x$

٢) $\frac{3x-4}{2}>5x-7$

٣) $|2x-3|<2$

٤) $|1-2x|\geq 5$

٥) $||x|-1|\leq 2$

٦) $||x|-3|>1$

٧) $|x-1|\leq -1$

٨) $|2x-3|\leq 0$

٩) $|3x-5|>-1$

١٠) $|4x-2|>0$

١١) $(x-1)(x-2)\geq 0$

١٢) $x^2-6x+8\geq 0$

١٣) $x^2-4<0$

١٤) $x^3-8>0$

١٥) $(x+1)^3-1\geq 0$

١٦) $x-x^3\leq 0$

١٧) $\frac{1}{|x-1|}>1$

١٨) $x<5x-2<3x-1$

١٩) $0<|2x-3|<1$

٢٠) $1<|x-2|<2$

٢١) $|x-3|\leq|x-4|$

٢٢) $|2x-5|>|3x-2|$

٢٣) $\left|\frac{x-4}{2x-1}\right|<2$

٢٤) $\frac{x-1}{x+2}<0$

٢٥) $\frac{x}{x-1}>1$

٢٦) $x(x-1)(x-2)\geq 0$

٢٧) $\frac{1}{x-2}\leq\frac{2x+3}{4}$

٢٨) $x^3-3x+2>0$

٢٩) $\frac{x^2-3x+2}{x}\geq 0$

٣٠) $\frac{x^2-4}{x^2-9}\geq 0$

٣١) $|2x-3|\geq x$

٣٢) $|x-2|\geq 2x+4$

٣٣) $\frac{1}{1-x}\geq-\frac{x}{1+x^2}$

٣٤) $\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}<0$

٣٥) $x^4-16\leq 0$

٣٦) $(x-1)^4(x+1)^2>0$

حل المعادلات التالية:

٣٧) $|x-1|=2$

٣٨) $|x-2|=-3$

٣٩) $|x^2+x|=x^2+x$

٤٠) $|x|=2x-1$

٤١) إذا كان $a^2\geq b^2$ حيث $a,b\in \mathrm{IR}$ ، فإن إحدى الإجابات التالية محققة:

(أ) $a \geq b$ ، (ب) $a \leq b$ ، (ج) $a = b$ ، (د) $|a| \geq |b|$

اختر الإجابة الصحيحة مبررًا إجابتك.

٤٢) حدد الشروط على العددين a, b في كل حالة فيما يلي ليكون التقرير صحيحًا:

(أ) $a^2 > b^2 \Leftarrow a > b$

(ب) $a^2 < b^2 \Leftarrow a > b$

(ج) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftarrow a > b$

٤٣) أثبت أنه إذا كان:

(أ) $|x-2| \leq 1$ ، فإن: $|x^2 - 4| \leq 5$

(ب) $|2x-1| \leq 4$ ، فإن: $\left|x^2 - \frac{1}{4}\right| \leq 6$

٤٤) حدد التقرير الصائب فيما يلي:

(أ) $x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

(ب) $\sqrt{x^2} = x$

(ج) $|x+y| \leq |x| + |y|$

(د) $x^2 < y^2 \Leftrightarrow x < y$

(x, y عددان حقيقيان)

٤٥) حل المعادلات التالية:

(أ) $|x-2| = 1$

(ب) $|x^2 - 1| = 4$

(ج) $|x^2 - 5x + 6| = 16$

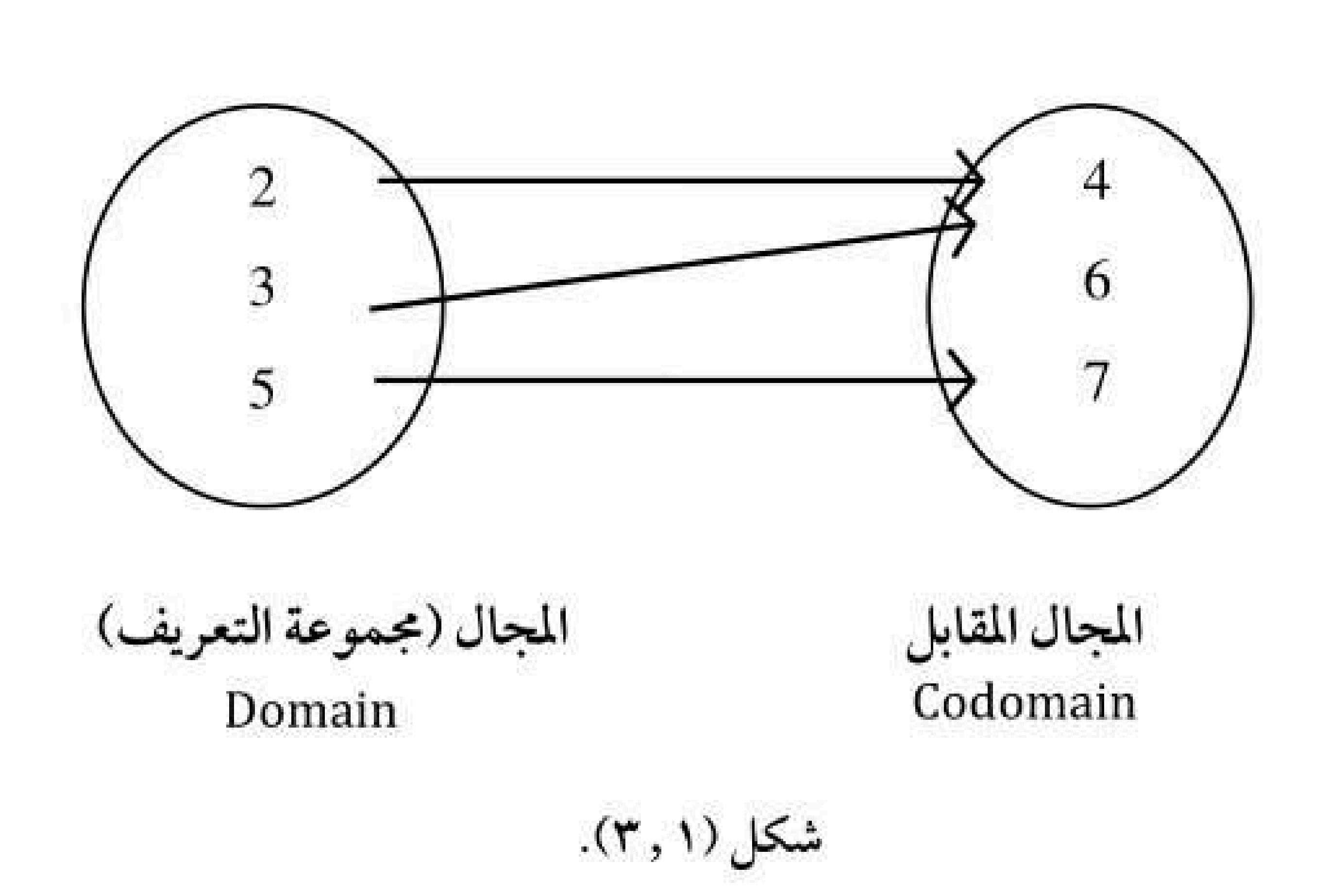
الفصل الثالث

الدوال الحقيقية
THE REAL FUNCTIONS

(١ , ٣) الدالة الحقيقية

تعريف (١ , ٣)

الدالة الحقيقية علاقة من مجموعة $A(A \subseteq \mathrm{IR})$ إلى مجموعة $B(B \subseteq \mathrm{IR})$ بحيث يرتبط كل عنصر من A بعنصر وحيد من B. نسمي A مجال الدالة أو مجموعة تعريفها كما نسمي B مجالها المقابل.



شكل (١ , ٣).

نعبر عن الدالة f بالشكل: $f : A \to B$

ونعبر عن قاعدة (Rule) الدالة بالمعادلة: $y = f(x)$

نسمي صورة العنصر a وهي **f(a) بقيمة الدالة f** (The value of f) **عند a**.

نسمي **مجموعة صور المجال بمدى f** (Range of f) ففي الشكل (١ , ٣) مدى الدالة هو: {4, 7} ، ومجالها هو: {2, 3, 5}، أما مجالها المقابل فهو: .{4, 6, 7}

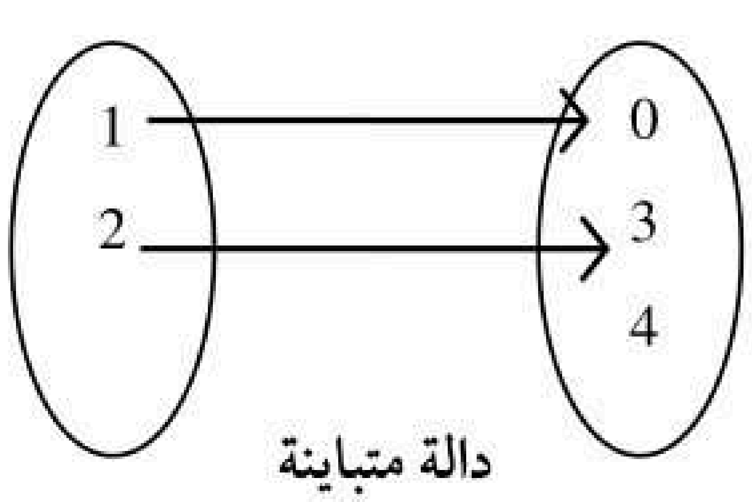
تعريف (٢ , ٣)

نقول :إن الدالة f **دالة متباينة** **(أو أحادية)** إذا تحقق لكل x_1, x_2 من مجال الدالة:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

وهذا يكافئ:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



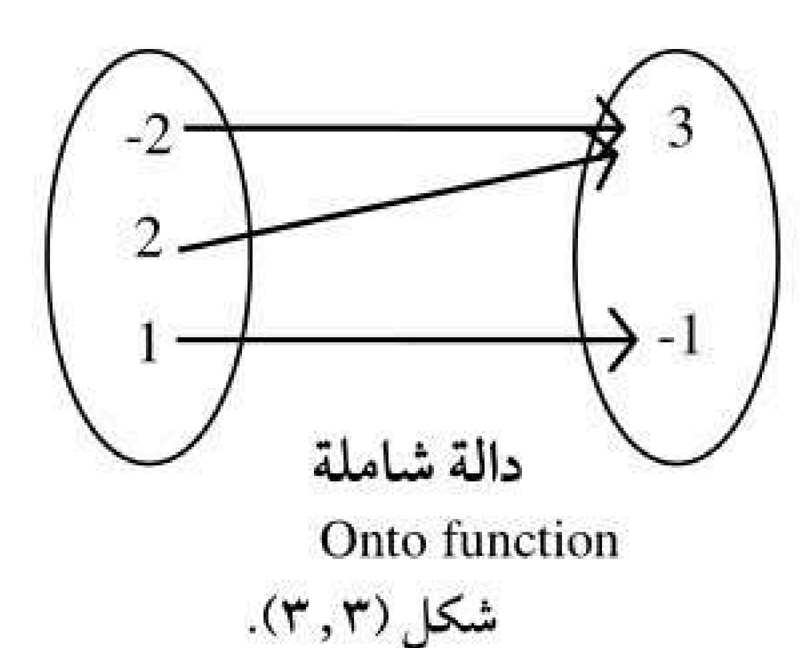
دالة متباينة

One to One function

شكل (٢ , ٣).

تعريف (٣ , ٣)

الدالة الشاملة (الغامرة): هي التي يرتبـــط كل عنصـــر من مجـــالها المقابل بعنصر واحد على الأقل من المجـــال.



دالة شاملة

Onto function

شكل (٣ , ٣).

تعريف (٤ , ٣)

دالة التقابل هي الدالة المتباينة والشاملة بآن واحد.

A f B

-1 → 1

0 → 2

2 → 3

دالة تقابل

Bijective function

شكل (٤ , ٣).

وهنا يرتبط كل عنصر من المجال المقابل بعنصر وحيد من المجال.

تقبل دالة التقابل دالة عكسية f^{-1} مجالها B ومجالها المقـــــابل A نحصل عليها من الشكل (٤ , ٣) بقلب جهة الأسهم، فمثلاً:

$$f^{-1}(1) = -1 \text{ ، } f^{-1}(3) = 2 \text{ ، } f^{-1}(2) = 0$$

مـــثـــال (١ , ٣)

أوجد مجال كل من الدوال المعرفة كما يلي:

١) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$

٢) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 4}$

٣) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

٤) $f(x) = \sqrt{-2x^2 - x + 3}$

الحـــــل

١) مجال f هو IR لأنها كثيرة حدود (polynomial function).

٢) مجال f هو $IR - \{-2,2\}$ ، لأن **مجال أي كسر** بسطه ومقامه كثيرة حدود هو: IR **مستثنى منه أصفار المقام**، وهنا أصفار المقام: $-2,2$.

٣) مجال f هو IR ، لأن المقدار تحت إشارة الجذر مميزه يساوي 4- فإشارته من إشارة معامل x^2 فهو موجب دومًا (يظهر لنا مباشرة أن المقدار $1+x^2$ موجب وأصغر قيمة له هي الوحدة).

٤) الدالة f معرفة من أجل قيم x غير السالبة أي المحققة للشرط:

$$-2x^2 - x + 3 \geq 0$$

تكتب المتباينة على الشكل: $(+2x+3)(-x+1) \geq 0$

وإشارة المقدار في الطرف الأيسر:

	$-\frac{3}{2}$		1	
$-$	●	$+$	●	$-$

فمجموعة الحل هي: $\left[-\dfrac{3}{2}, 1\right]$

ملحوظة: إذا لم نذكر مجال الدالة f فمجالها هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية x التي من أجلها $f(x) \in IR$.

مـثـال (٢, ٣)

أوجد مجال f، علمًا بأن:

١) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$

٢) $f(x)=\sqrt{1+|x|}$

الحـــل

١) مجال الدالة f هو مجموعة قيم x المحققة للشرط:

$\dfrac{x}{1+x} \geq 0$ (ما تحت إشارة الجذر ليس سالبًا)

جذرا البسط والمقام: $-1, 0$

وإشارة الكسر:

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 0 & \end{array}$$

(لاحظ أن العدد -1 جذر للمقام ولا يجوز القسمة على الصفر).

فالمجال هو: $(-\infty,-1) \cup [0,\infty) = IR - [-1,0)$

٢) المجال هو IR ، لأن: $|x| \geq 0 \Leftarrow |x|+1 \geq 1$

نعرف فيما يلي مجموع دالتين f وَ g والفرق بينهما وحاصل ضربهما وقسمتهما بالشكل التالي:

(أ) $h(x)=(f \pm g)(x)=f(x) \pm g(x)$

(ب) $h(x)=(f.g)(x)=f(x)g(x)$

(ج) $h(x)=(\dfrac{f}{g})(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$

ومجال الجمع والفرق أو الضرب والقسمة هو: تقاطع المجالين إلا في حالة القسمة فيستثنى أصفار المقام.

مــثــال (٣,٣)

أوجد مجال h، إذا علمت أن:

١) $h(x)=\sqrt{4-x^2}+|x|$

٢) $h(x)=\dfrac{x^2+x}{\sqrt{1-x}}$

٣) $h(x)=\dfrac{|x-1|}{\sqrt{-x^2-x+2}}$

٤) $h(x)=\sin x.\sqrt{1-x^2}$

الحـــــل

١) مجال الدالة f حيث: $f(x)=|x|$ هو IR، ومجال الدالة g، حيث: $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ هو مجموعة العناصر x المحققة للشرط: $4-x^2\geq 0$

وإشارة هذا المقدار هي:



فالمجال هو: $[-2,2]$

فمجال الدالة h هو: مجال $f\cap$ مجال $g=[-2,2]$

٢) مجال الدالـــة f، حيث: $f(x)=x^2+x$ هو IR، ويشـــترط لكي تكـــون h معرفـــة أن يكون المقـــدار تحت إشارة الجذر في المقام محققا للشرط $1-x>0 \Leftarrow 1>x$ (استثنينا التساوي لوقـــوع المقدار في المقام) فالمجال لدالة المقام g هــــــــو $(-\infty,1)$. ويكون مجال h هو:

$$(-\infty,1)=IR\cap(-\infty,1)$$

٣) مجال الدالة f حيث: $f(x)=|x-1|$ هو IR ويشترط في المقام أن يكون:

$$(-x+1)(x+2)>0 \Leftarrow -x^2-x+2>0$$

(استثنينا أصفار المقام). وإشارة هذا المقدار:

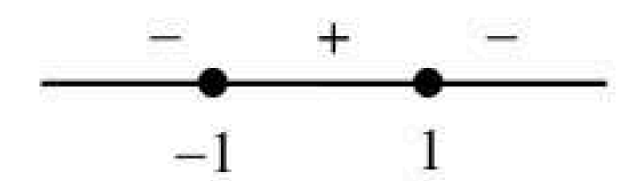
− + −

−2 1

فالمجال لدالة المقام g هو: $(-2, 1)$ ومجال h هو:

$$IR \cap (-2,1) = (-2,1)$$

٤) مجال الدالة f حيث: $f(x) = \sin x$ هو IR ومجال الدالة g، حيث: $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ يتحدد من الشرط $1-x^2 \geq 0$. وإشارة هذا المقدار:



فمجال g هو $[-1, 1]$ ومجال h هو:

$$IR \cap [-1,1] = [-1,1]$$

(٢, ٣) الدوال الزوجية والفردية والدورية

The Even, Odd and Periodic functions

تعريف (٣, ٥)

تقول إن الدالة f دالة زوجية على مجالها I إذا تحققت الخاصية التالية:

$f(x) = f(-x)$ لكل $x \in I$

هذا يعني أنه إذا كانت $x \in I$، فإن $-x \in I$.

فمثلا: الدالة cos دالة زوجية، لأن: $\cos(-x) = \cos x$

وأيضا الدالة f حيث: $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ دالة زوجية لأن: $f(-x) = f(x)$ لكل $x \in IR$.

تعريف (٣, ٦)

تقول إن الدالة f دالة فردية على مجالها I وذلك إذا تحققت الخاصية التالية:

$f(-x) = -f(x)$ لكل $x \in I$

هذا يعني أنه إذا كانت $x \in I$، فإن $-x \in I$.

فمثلاً: الدالة sin و tan دالتان فرديتان، لأن:

$\sin(-x) = -\sin x$ ، $\tan(-x) = -\tan x$

لاحظ أن الدالة f حيث: $f(x)=1-x+x^2$ ليست زوجية ولا فردية.

تعريف (٣,٧)
تقول إن الدالة f دالة دورية على مجالها I إذا تحقق لكل $x \in I$ المساواة التالية:
$f(x + a) = f(x)$ (a عدد ثابت).
وإذا كان a أصغر عدد موجب يحقق المساواة فإننا نسميه عادة بدور الدالة.

فمثلاً: الدالة $f = \sin$ دالة دورية لأن:
$\sin(x+2\pi)=\sin(x)$ ودور هذه الدالة هو 2π.
بالمثل الدالة: $f = \tan$ دالة دورية ودورها هو π لأن:
$$\tan(x + \pi) = \tan x$$

(٣,٣) التناظر في المستوي (التماثل)

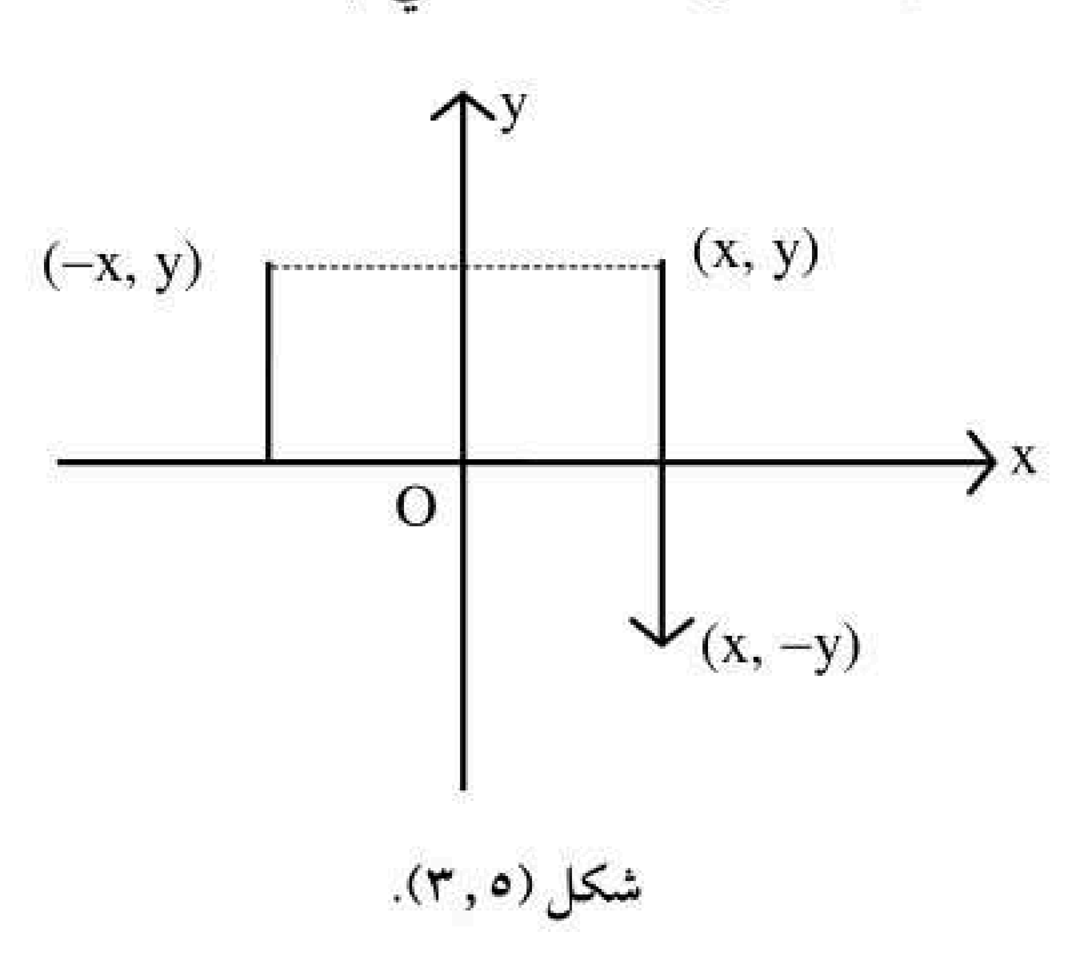
تعريف (٣,٨)
نسمي مجموعة كل الأزواج المرتبة (x,y) من الأعداد الحقيقية والمحققة لقاعدة الدالة f المعرفة بالمعادلة:
$y = f(x)$ ، بمنحني الدالة f
وإذا مثلنا النقاط (x,y) في المستوي فنسمي مجموعة النقاط الناتجة بالمنحني البياني للدالة f (بيان الدالة f).

فمثلاً: المنحني البياني للدالة f، حيث: $y = 2x + 3$ هو مستقيم. وبيان العلاقة المعرفة بالمعادلة $x^2 + y^2 = 1$ هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها الواحد.

نعلم أن نظير النقطة (x,y) بالنسبة لمحور السينات هي النقطة (x,−y).

فالمنحني الذي معادلته $x^2 + y^2 = 1$ متناظر بالنسبة لمحور السينات، لأنه إذا كانت النقطة (x,y) تحقق معادلة المنحني، فإن النقطـــــة (x,−y) تحقق معادلة المنحني أيضًا.

وأيضا **نظير النقطة (x,y) بالنسبة لمحور الصادات هي النقطـــــة (−x,y)** فالمنحني الذي معادلته y = cosx متناظر بالنسبة لمحور الصادات لأنه إذا كانت النقطة (x,y) تحقق معادلة المنحني، فإن النقطة (−x,y) تحقق معادلة المنحني أيضًا.



شكل (٣,٥).

وهذا حال أي دالة زوجية **فكل دالة زوجية بيانها متناظر** (Symmetric) **بالنسبة لمحور الصادات.**

وكذلك نظير النقطة (x,y) بالنسبة لنقطة الأصل هي النقطة (−x,−y)

فمنحـــني الدالة التي معادلتهـــا y = sinx متناظر بالنسبة لنقطة الأصل O. لأنه إذا كانت النقطة (x,y) تحقق معادلة المنحني، فإن النقطة (−x,−y) تحقق معادلة المنحني لأن:

(x,y)
x
O
(−x,−y)

شكل (٣,٦).

$$y = \sin x \Leftrightarrow -y = -\sin x \Leftrightarrow -y = \sin(-x)$$

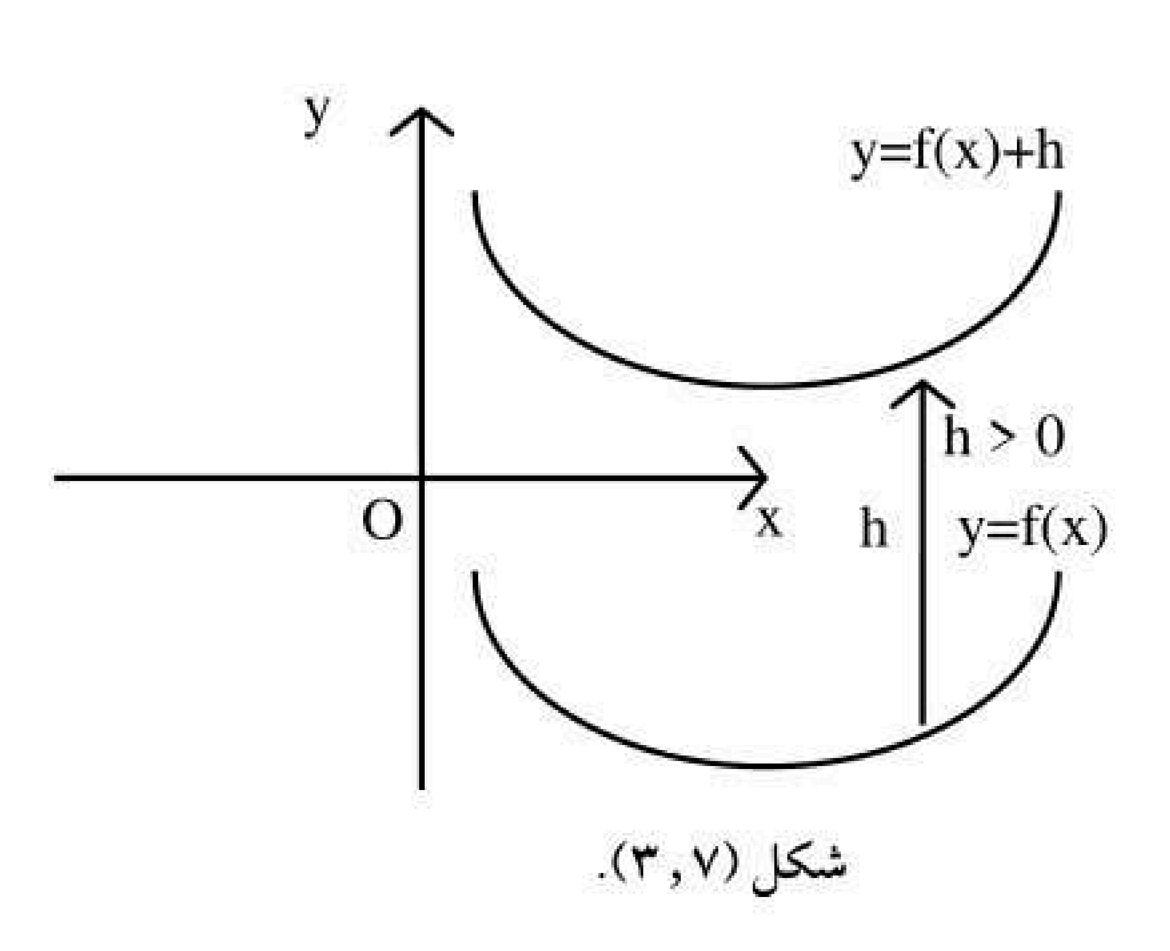
وهذا حال أي دالة فردية. **فكل دالة فردية بيانها متناظر بالنسبة لنقطة الأصل**. من جهة أخرى: **نظير النقطة (x,y) بالنسبة لمنصف الربع الأول هي النقطة (y,x).**

فمنحنى العلاقة المعرفة بالمعادلة: $x^3 + y^3 = 1$ متناظر بالنسبة لمنصف الربع الأول، لأنه إذا كانت النقطة (x,y) تحقق معادلة المنحني، فإن النقطة (y,x) تحقق معادلة المنحني لأن:

$$y^3 + x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 + y^3 = 1$$

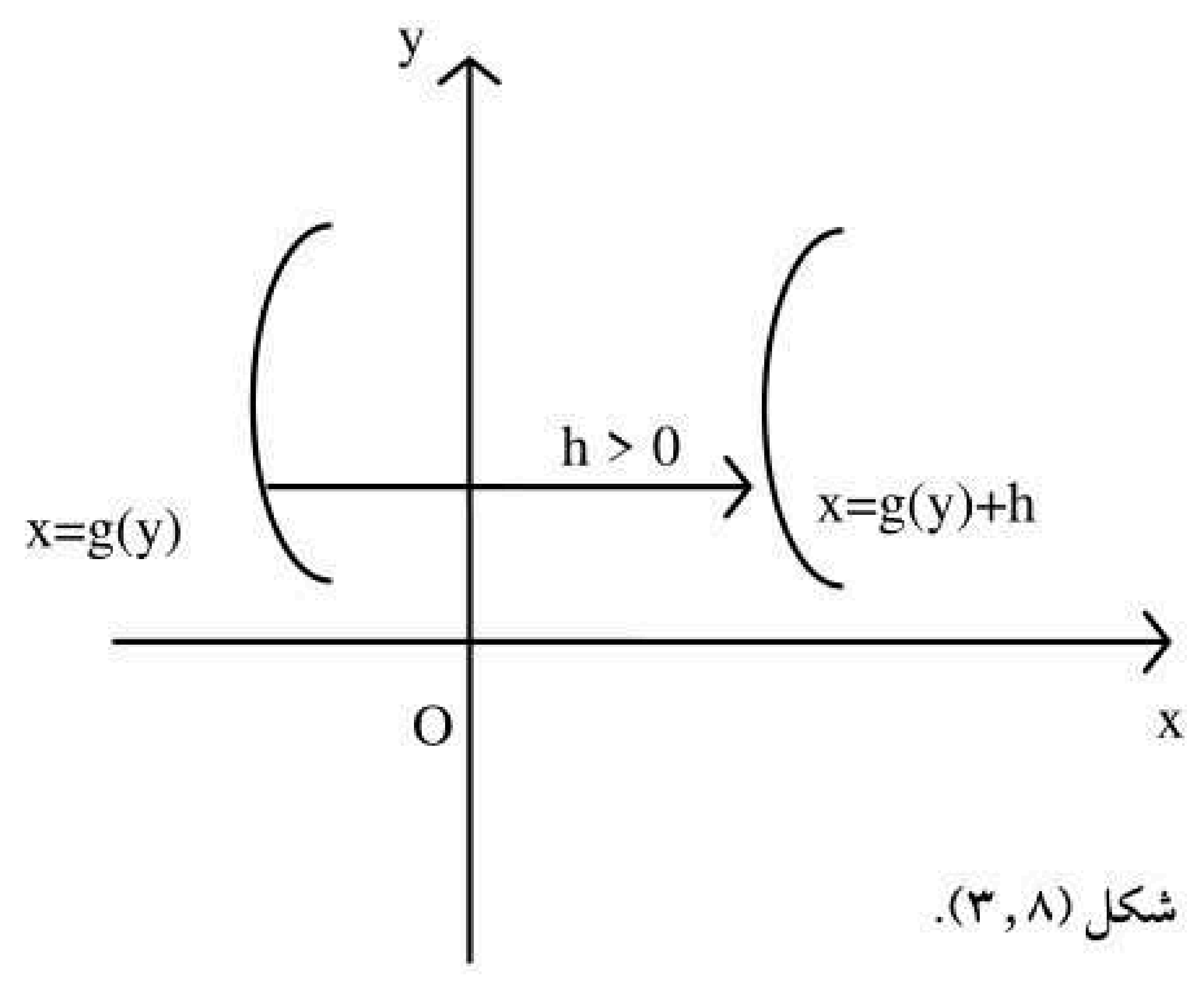
(٣, ٤) انسحاب منحني باتجاه أحد المحورين الإحداثيين

لاحظ أن المنحني الذي معادلته: $y = f(x) + h$ ينشأ من المنحني الذي معادلته: $y = f(x)$ بانسحاب باتجاه المحور y مقداره h وحدة، نحو الأعلى إذا كان $h > 0$ ونحو الأسفل إذا كان $h < 0$.



شكل (٣, ٧).

وأيضا المنحني الذي معادلته: $x = g(y)+h$ ينشأ من المنحني الذي معادلته: $x = g(y)$ بانسحاب (Translation) باتجاه المحور x مقداره h وحدة، نحو اليمين إذا كان $h>0$ ونحو اليسار إذا كان $h<0$.



شكل (٣, ٨).

(٣,٥) رسم بعض أنواع الدوال

مـثـال (٣,٤)

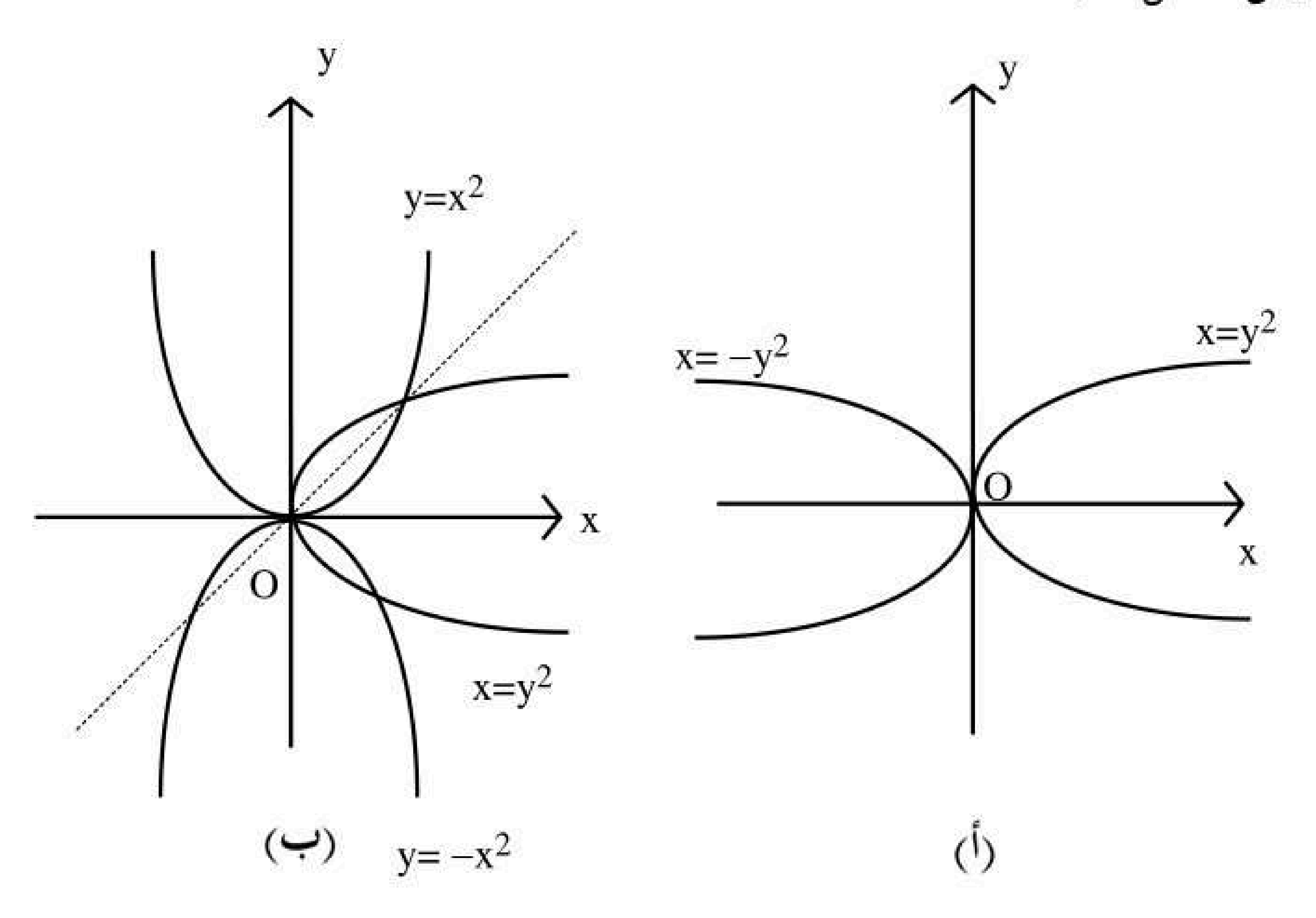
ارسم المنحنيات المعرفة بمعادلاتها فيما يلي :

١) $x = y^2$ ٢) $x = -y^2$ ٣) $y = x^2$

٤) $y = -x^2$ ٥) $y = |x|$ ٦) $y = |x-1|$

الحـــل

١) $x = y^2$ هو قطع مكافئ متناظر بالنسبة للمحور x رأسه نقطة الأصل وفتحته نحو الأيمن، شكل (٣,٩) (أ).

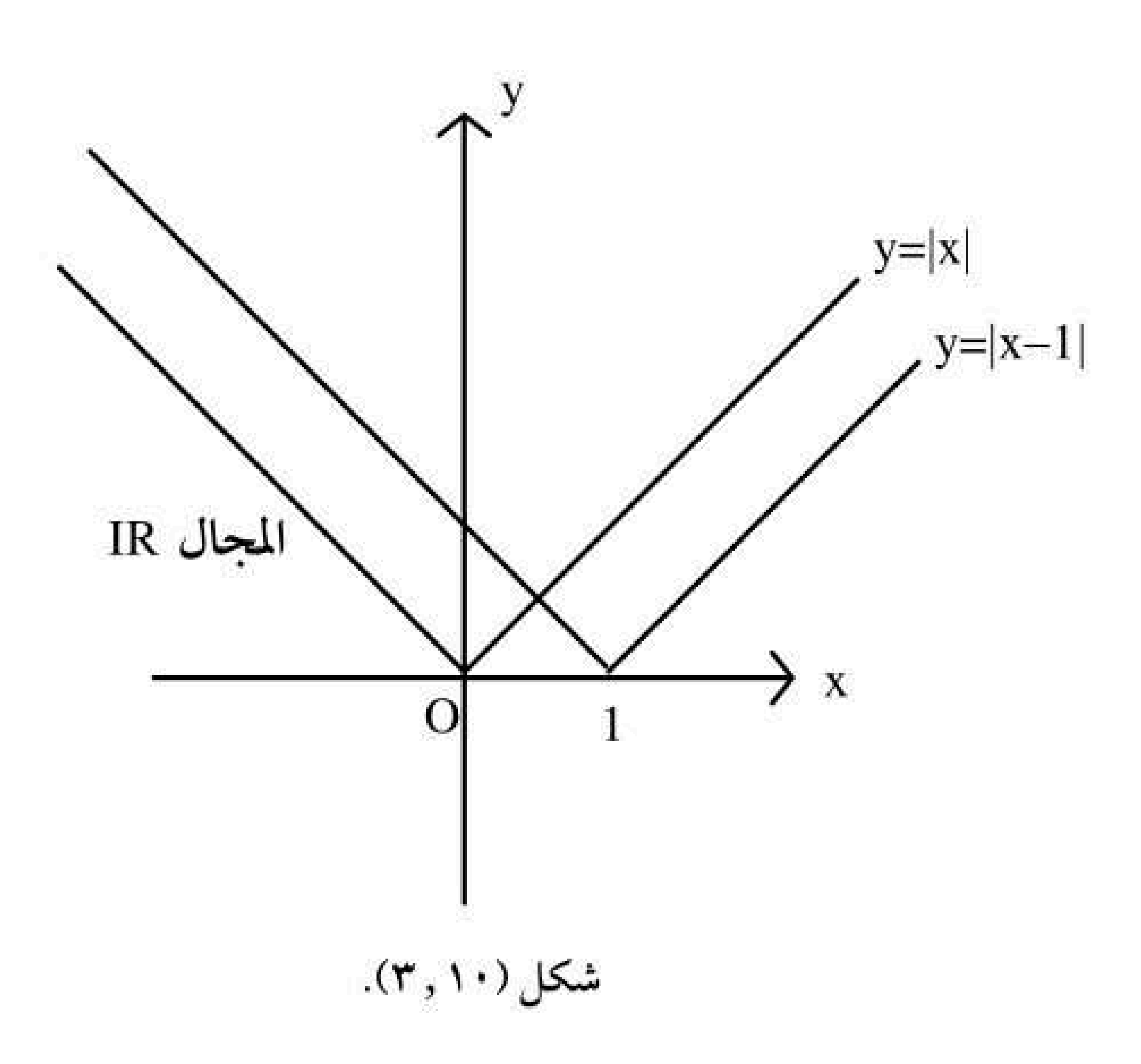


شكل (٣,٩).

٢) $x = -y^2$ هــو قطــع مكافئ ينشــأ من المنحني الذي معادلته: $x = y^2$ بالتعويــض عن x بالمقــدار x- فهو نظــيره بالنسبــة للمحــور y، شكل (٣,٩) (أ).

٣) $y = x^2$ هو قطع مكافئ متناظر بالنسبة للمحور y ينشأ من القطع $x = y^2$ بالمبادلة بين المتغيرين x ، y فالمنحنيان متناظران بالنسبة لمنصف الربع الأول، شكل (٩ , ٣) (ب).

٤) أما المنحني الذي معادلته $y = -x^2$ فهو نظير المنحني الذي معادلته $y = x^2$ بالنسبة للمحور x ، شكل (٩ , ٣) (ب).



شكل (١٠ , ٣).

٥) $y = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$

هو عبارة عن نصفي مستقيمين متعامدين يتقاطعان عند O نقطة الأصل ومتناظران بالنسبة للمحور y ، شكل (١٠ , ٣).

٦) أما المنحـــني الذي معادلتـــه $y = |x - 1|$ فينشـــأ من المنحني الذي معادلته $y = |x|$ بانسحاب مقـــداره وحـــدة واحدة وباتجـــاه المحـــور x وإلى اليمين، شكل (١٠ , ٣).

مـــثــال (٣,٥)

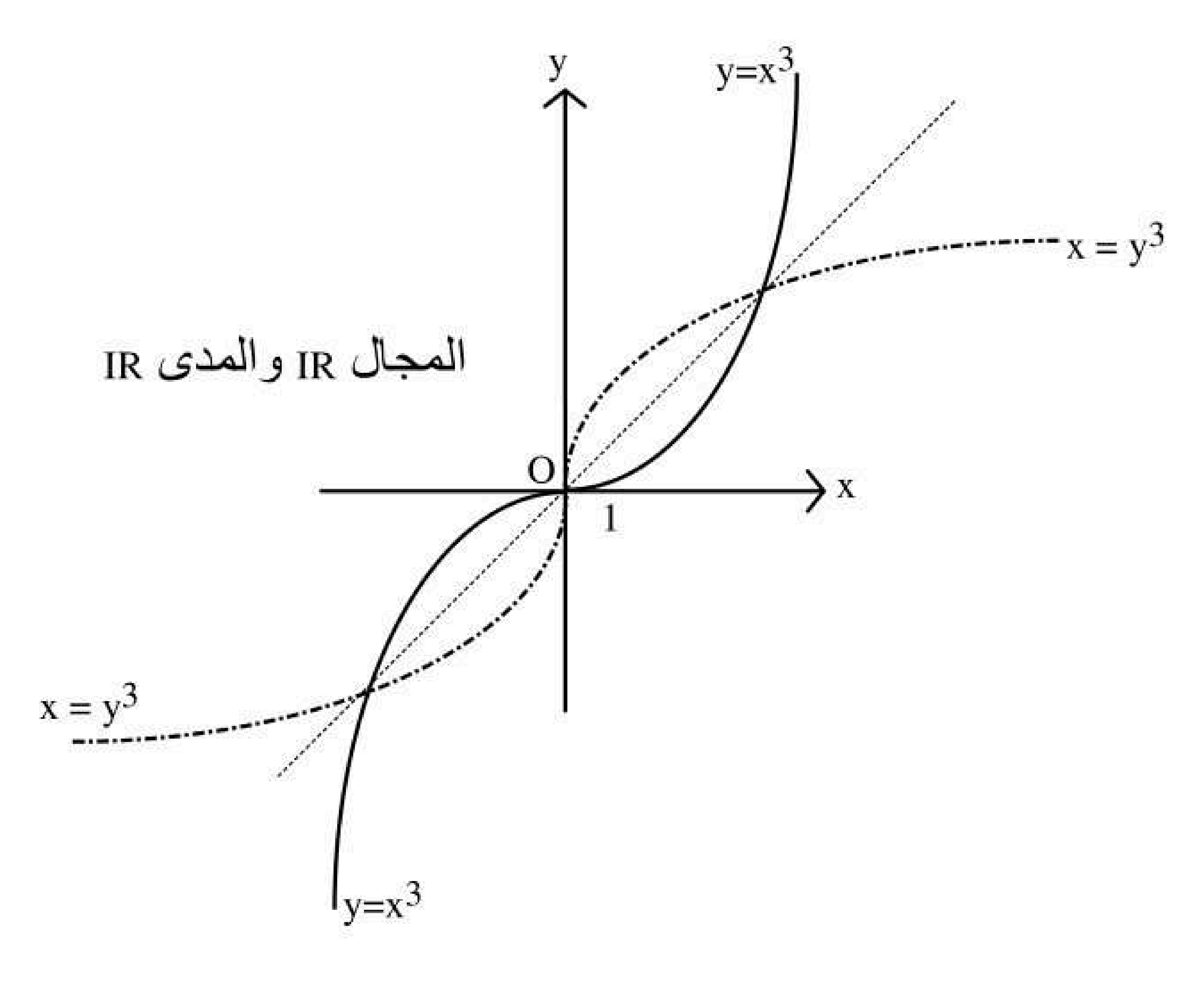
ارسم المنحنيات المعرفة بمعادلاتها:

١) $y = x^3$ ٢) $x = y^3$ ٣) $y = \sqrt{x}$

٤) $y = -\sqrt{x}$ ٥) $y^2 = (x+1)$ ٦) $(y-1)^2 = x$

الحـــل

١) المنحني الذي معادلته $y = x^3$ متناظر بالنسبة لنقطة الأصل ويمس محور السينات عند نقطة الأصل، شكل (٣,١١).

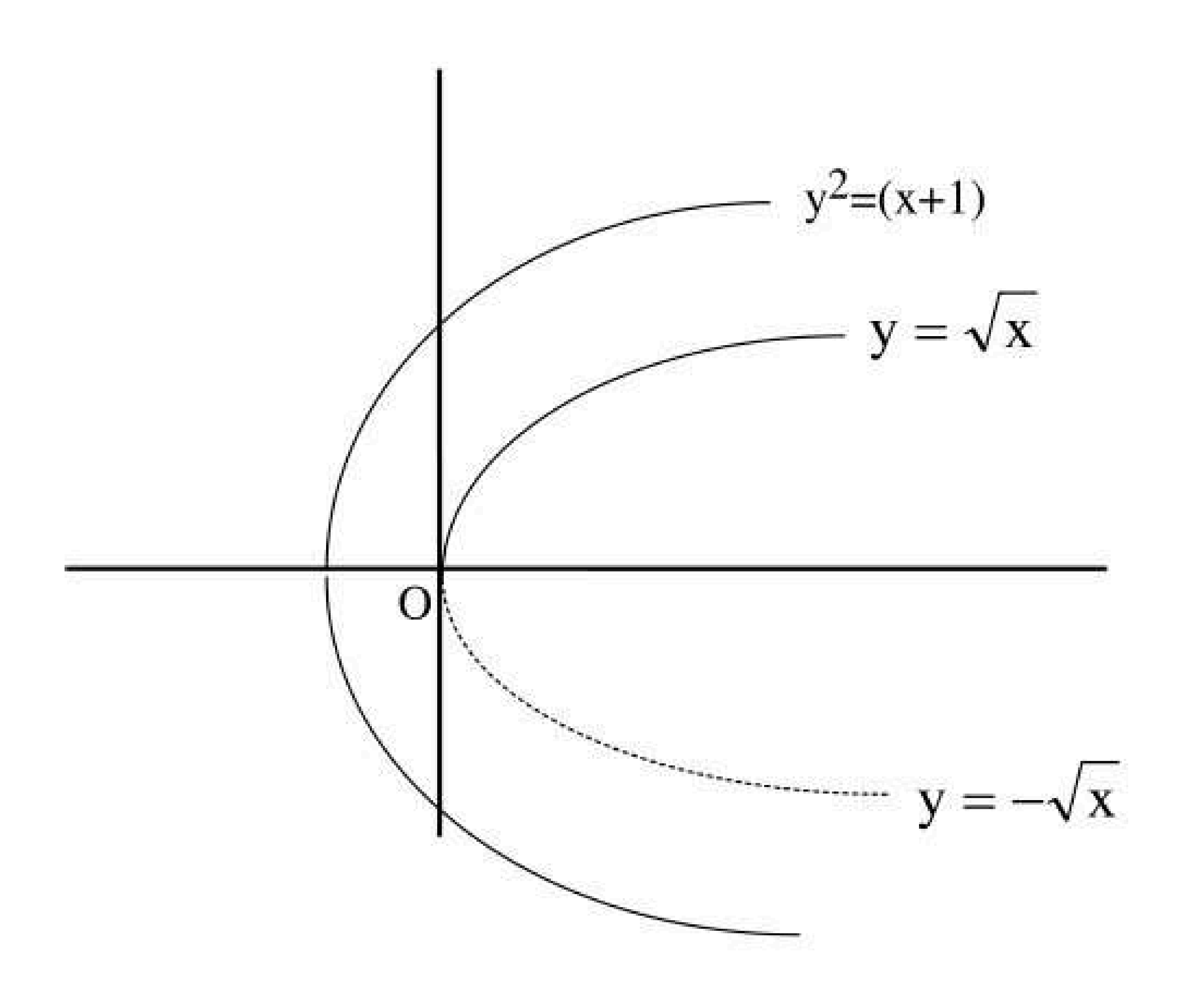


شكل (٣,١١).

٢) المنحني الذي معادلته $x = y^3$ هو نظير المنحني الذي معادلته $y = x^3$ بالنسبة لمنصف الربع الأول، شكل (٣,١١).

٣) المنحني الذي معادلته $y=\sqrt{x}$ هو النصف الأعلى للقطع المكافئ الذي معادلته $x=y^2$ ويوافق $y\geq 0$ ، شكل (٣, ١٢).

٤) المنحني الذي معادلته $y=-\sqrt{x}$ هو النصف الأسفل للقطع المكافئ الذي معادلته $x=y^2$ ، ويوافق $y\leq 0$ ، شكل (٣, ١٢).



شكل (٣, ١٢).

٥) المنحــني الذي معـــادلته $y^2=(x+1)$ ينشـــأ من المنحني الذي معادلته $y^2=x$ بانسحـــاب مقداره وحدة واحدة وباتجاه المحور x وإلى اليسار، شكل (٣, ١٢).

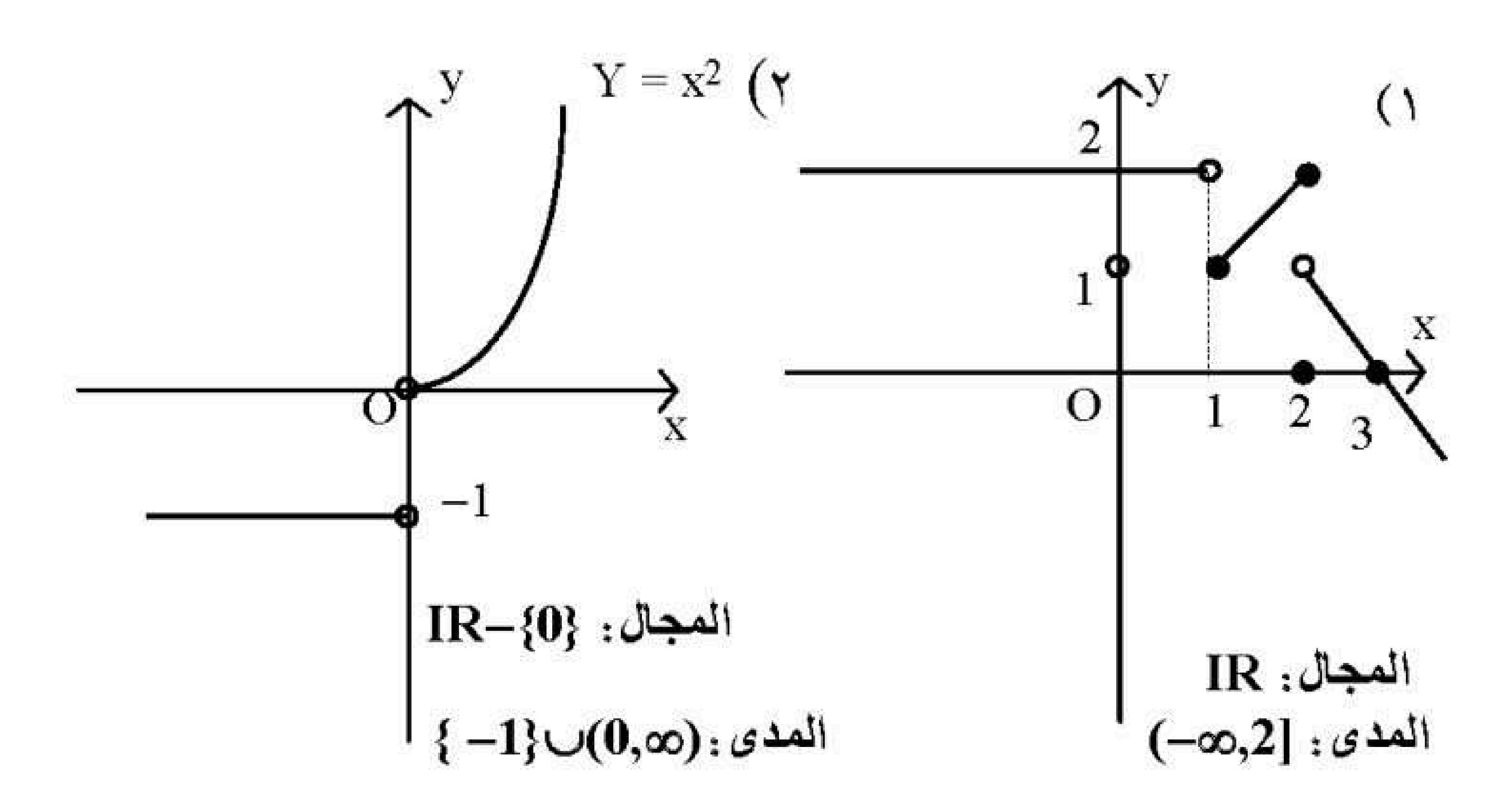
٦) المنحني الذي معادلته $(y-1)^2=x$ ينشأ من المنحني الذي معادلته $y^2=x$ بانسحاب مقداره وحدة واحدة وباتجاه المحور y وإلى الأعلى ويمكن رسمه بسهولة.

مـثـــال (٣, ٦)

أوجد مجال ومدى كل من الدالتين المعرفتين كما يلي:

١) $f(x)=\begin{cases}2\ ,x<1\\ x\ ,2\geq x\geq 1\\ -x+3,x>2\end{cases}$ ٢) $f(x)=\begin{cases}-1,x<0\\ x^2,x>0\end{cases}$

الحـــل



شكل (١٣, ٣).

(٦, ٣) الدوال العكسية

The Inverse Functions

مـثـال (٧, ٣)

أثبت أن الدالة f، حيث: $f(x)=2x+4$ دالة متباينة ثم أوجد الدالة العكسية f^{-1} (باعتبار أن المجال المقابل للدالة f هو مداها). ارسم المنحني البياني للدالة f وللدالة العكسية لها، ماذا تلاحظ؟

الحـــل

$$f(x_1)=2x_1+4, f(x_2)=2x_2+4$$
$$2x_1+4=2x_2+4 \Rightarrow 2x_1=2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$$

فالدالة متباينة وباعتبار أن مجالها المقابل هو مداها فهي شاملة.

لإيجاد الدالة العكسية للدالة f، حيث: $y = 2x + 4$

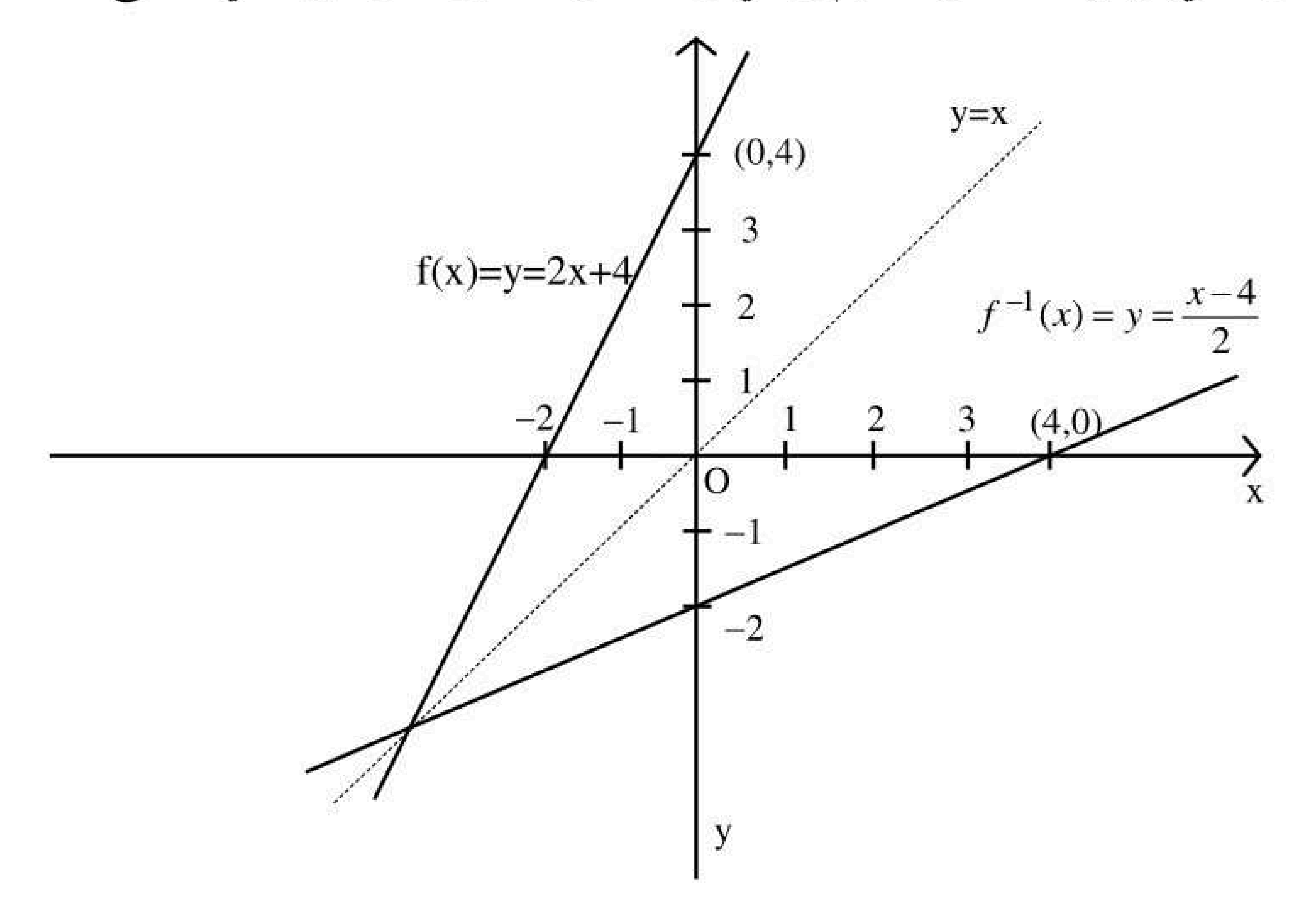
أ) نبادل بين موضعي المتغيرين x وَ y في المعادلة $y = 2x + 4$، فتصبح:

$$x = 2y + 4$$

ب) نحسب y بدلالة x، فنجد: $2y = x - 4 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$

من الملاحظ أن مجال f هو IR ومداها (مجال الدالة العكسية f^{-1}) هو IR أيضًا.

والمنحني البياني للدالة f هو مستقيم ويكفي لرسمه معرفة نقطتين منه ولتكن نقطتي التقاطع.



شكل (٣,١٤).

والمنحني البياني للدالة f^{-1} هو مستقيم أيضًا. **وبما أن أحدهما ينتج من الآخر بالمبادلة بين x ، y. فإن المنحني البياني للدالة f^{-1} ينتج من المنحني البياني للدالة f وذلك بأخذ نظير المنحني الذي معادلته $y = f(x)$ بالنسبة لمنصف الربع الأول.**

مــثــال (٨ , ٣)

بين أن الدوال المعرفة بمعادلاتها التالية متباينة ثم أوجد الدالة العكسية لكل منها (المجال المقابل لكل منها هو المدى):

١) $y = \frac{x}{1-x}$ ٢) $(x \in IR^-) y = x^2$

٣) $y = 5 + \frac{2}{x^3}$ ٤) $y = 4 + (x-1)^{\frac{1}{3}}$

الحـــل

١) التباين: $f(x_1) = \frac{x_1}{1-x_1}, f(x_2) = \frac{x_2}{1-x_2}$

$$\frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \Rightarrow x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

فالدالة متباينة.

الدالة العكسية:

أ) لنبادل بين المتغيرين في قاعدة الدالة، فنحصل على المعادلة:

$$x = \frac{y}{1-y}$$

ب) نحل المعادلة للحصول على y بدلالة المتغير x:

$$x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x - xy = y \Rightarrow x = xy + y \Rightarrow x = y(x+1)$$

ومنه: $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{x+1}$ وهذه هي قاعدة الدالة العكسية.

لاحظ أن مجال الدالة f هو R−{1} وأن مداها (مجال f^{-1}) هو IR−{−1}

٢) التباين: $f(x_1) = (x_1)^2, f(x_2) = (x_2)^2$

ومنه: $(x_1)^2 = (x_2)^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$

لكن $x_1, x_2 \in IR^-$ فهما من إشارة واحدة، لذا تستبعد الإشارة السالبة.

إذن: $x_1 = x_2$ فالدالة متباينة.

الدالة العكسية :

أ) تبادل بين المتغيرين: $x = y^2$

(ب) نحسب y بدلالة x: $y = \pm\sqrt{x}$

فالمقبول $y = f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ (لأن مجال الدالة f أصبح مجالا مقابلاً للدالة f^{-1}).

لاحظ أن مدى f وهو $(0,\infty)$ يصبح مجالاً للدالة $f^{-1}(y \neq 0)$.

٣) التباين:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5 + \frac{2}{(x_1)^3} = 5 + \frac{2}{(x_2)^3} \Rightarrow \frac{2}{(x_1)^3} = \frac{2}{(x_2)^3}$$

$$\Rightarrow (x_1)^3 = (x_2)^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

الدالة العكسية:

أ) نبادل بين المتغيرين، فنجد:

$$x = 5 + \frac{2}{y^3}$$

(ب) نحسب y بدلالة x:

$$x = 5 + \frac{2}{y^3} \Rightarrow x - 5 = \frac{2}{y^3} \Rightarrow y^3 = \frac{2}{x-5}$$

ومنه: $y = f^{-1}(x) = (\frac{2}{x-5})^{\frac{1}{3}}$

لاحظ أن مجال f هو IR−{0} وأن مدى f (مجال f^{-1}) هو IR−{5}.

٤) التباين: $4 + (x_1 - 1)^{\frac{1}{3}} = 4 + (x_2 - 1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow (x_1 - 1)^{\frac{1}{3}} = (x_2 - 1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$

$x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ (بتكعيب الطرفين).

الدالة العكسية :

أ) نبادل بين المتغيرين فنجد:

$$x = 4 + (y-1)^{\frac{1}{3}}$$

(ب) نحل المعادلة بإيجاد y بدلالة x:

$$x = 4 + (y-1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x - 4 = (y-1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow (x-4)^3 = y - 1$$

ومنه: $y = f^{-1}(x) = 1 + (x-4)^3$

لاحظ أن مجال الدالة f هو IR وأن مداها هو IR أيضاً.

مـثـال (٣,٩)

بين فيما إذا كانت الدالتان المعرفتان بالمعادلتين التاليتين تقبلان دالتين عكسيتين أ م لا؟

١) $y = 2x^2 - 8$ ٢) $f : IR^+ \to IR$ ، حيث $f(x) = x^2$

الحـــل

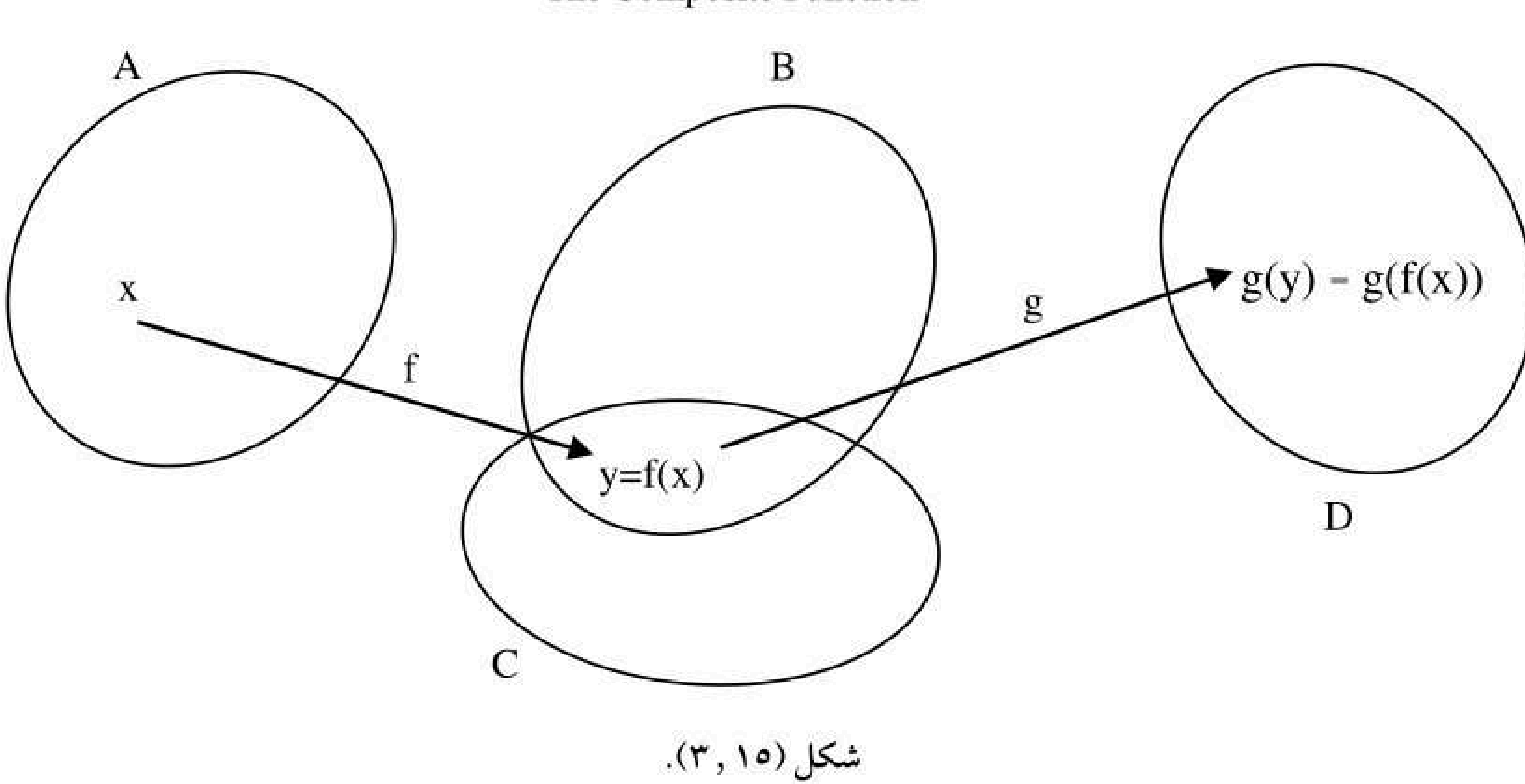
١) الدالة غير متباينة لأن:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2(x_1)^2 - 8 = 2(x_2)^2 - 8$$
$$\Rightarrow (x_1)^2 = (x_2)^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

إذن ليس لها دالة عكسية.

٢) f ليست شاملة لأن مدى الدالة f هو $(0,\infty)$، وهو مجموعة جزئية فعلية من IR. فأي عدد سالب ليس صورة لأي عنصر من مجال الدالة. إذن ليس للدالة f دالة عكسية.

(٣,٧) دالة التركيب
The Composite Function



شكل (٣,١٥).

لتكن: $f : A \to B$

$g : C \to D$

نعرف دالة التركيب: $h = g \circ f$ بالشكل:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

مجال دالة التركيب هو مجموعة العناصر x حيث:

(مجال f)$x \in$ و (مجال g)$f(x) \in$

من التعريف نجد:

(١) | مجال h هو نفس مجال f، إذا كان مجال g يساوي IR |

مــثــال (٣,١٠)

أوجد مجال h حيث: $h = g \circ f$ ، إذا كان:

١) $f(x) = x^2 + 5x + 7$ ، $g(x) = x^5 + x^3 + 1$

٢) $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

٣) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

٤) $f(x) = |x|\sqrt{1-x^2}$ ، $g(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}$

الحــــل

لاحظ أن مجال g،هو IR في جميع الحالات:إذن مجال hهو مجال f ويساوي:

١) IR لأن مجال كثيرة الحدود هو IR

٢) $[1,\infty)$ وهو حل المتباينة: $x - 1 \geq 0$

٣) $IR - \{1\}$ (لاحظ أن مميز المقدار $x^2 + x + 1$ هو -3 فإشارته موجبة دوما).

٤) $[-1,1]$ وهو مجموعة حل المتباينة $1 - x^2 \geq 0$ (الإشارة مابين الجذرين عكس إشارة معامل x^2).

(٢) إذا كان مجال g، هو: $IR - \{a,b\}$. فإن مجال $h = g \circ f$، هو مجال f مستثنى منه حلول المعادلتين: $f(x) = b$ ، $f(x) = a$

مــثــال (٣,١١)

أوجد مجال h حيث: $h = g \circ f$ ، إذا كان:

١) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ ، $g(x)=\frac{x}{x-2}$

٢) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ ، $g(x)=\frac{1}{x}$

٣) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+36}$ ، $g(x)=\frac{1}{x(x-6)}$

الحـــل

١) مجال g،هو: $IR-\{2\}$ ومجال f، هو: $IR-\{1\}$

لنحل المعادلة: $f(x)=2$،فنجد: $2=\frac{1}{x-1} \Leftarrow \frac{1}{2}=x-1 \Leftarrow x=\frac{3}{2}$

إذا كان مجال h، هو: $IR-\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$.

٢) مجال g،هو: $IR-\{0\}$ ومجال f، هو مجموعة حل المتباينة:

$\frac{1-x}{x}\geq 0 \Leftrightarrow x(1-x)\geq 0$ حيث $x\neq 0$ ويساوي $(0,1]$

لنحل المعادلة: $f(x)=0$، فنجد: $x=1$ إذن مجال h، هو: $(0,1)$.

٣) مجال g،هو: $IR-\{0,6\}$. لنحل المعادلتين: $f(x)=0$، $f(x)=6$ فنجد: $x=0, x=5$ ومجال h، هو: $IR-\{0,5\}$ (لاحظ أن مجال f هو IR).

(٣) إذا كان مجال g، هو: $IR-(a,b)$. فإن مجال $h=g\circ f$ ، هو مجال f مستثنى منه حلول المتباينة: $a<f(x)<b$.

مـــثـــال (١٢ ,٣)

أوجد مجال h حيث: $h(x)=(g\circ f)(x)$ ، إذا كان:

$f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$، $g(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$

مجال f، هو: $[0,1)$. ومجال g، هو: $IR-(2,3)$

لنحل المتباينة: $2<\sqrt{\frac{x}{1-x}}<3 \Leftrightarrow 9>\frac{x}{1-x}>4 \Leftrightarrow$

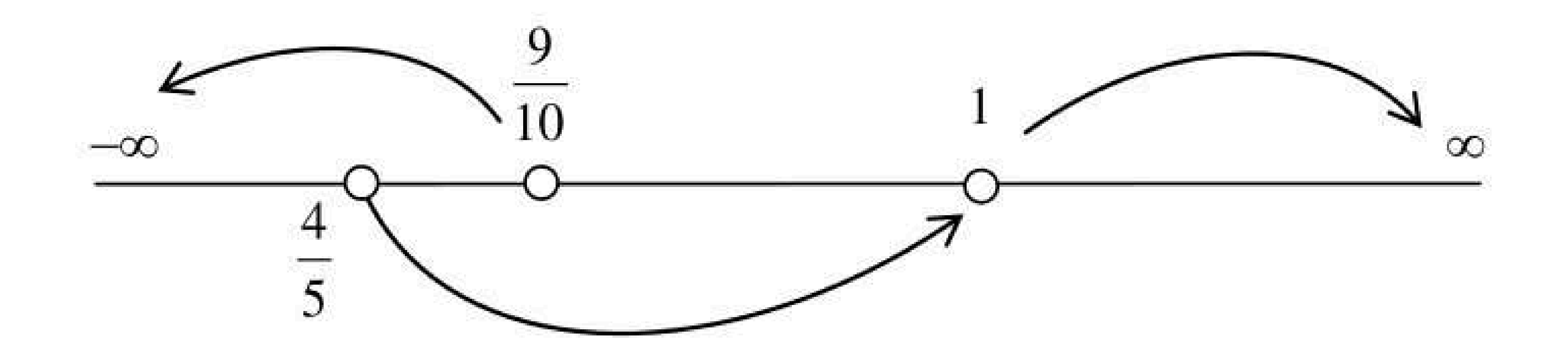
$$4(1-x)^2<x(1-x)<9(1-x)^2$$

(ضربنا الطرفين بالمقدار $(1-x)^2$ مع ملاحظة أن x=1 ليس حلا لها).

المتباينة اليمنى ترد إلى الصورة: $0 > (9- 10x)(x-1)\ (1-x)$ وحلها: $IR - [\frac{9}{10},1]$

المتباينة اليسرى ترد إلى الصورة: $0 > (x-1)(x5-4)\ (4-5x)$ وحلها: $(\frac{4}{5},1)$

وتقاطع الحلين، هو: $(\frac{4}{5},\frac{9}{10})$، إذن مجال h: $[0,1) - (\frac{4}{5},\frac{9}{10}) = [0,\frac{4}{5}] \cup [\frac{9}{10},1)$



تمــاريــن (١ , ٣)

أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بمعادلاتها التالية:

١) $f(x)=x^3-x^2+7$

٢) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

٣) $f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-4}$

٤) $f(x)=\frac{x}{(x-1)(x^2+4)}$

٥) $f(x)=\sqrt{\sin x+1}$

٦) $f(x)=\cos 2x$

٧) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

٨) $f(x)=\sqrt{x^2+x+8}$

٩) $f(x)=\sqrt{1+4x+4x^2}$

١٠) $f(x)=\sqrt{2x^2-10x+12}$

١١) $f(x)=x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

١٢) $f(x)=(x+1)\sin\frac{1}{x}$

١٣) $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}}{1-\sqrt{1+x}}$

١٤) $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{1+|x|}$

١٥) $f(x)=\csc x$

١٦) $f(x)=\sec 3x$

١٧) $f(x)=\cot x+\frac{1}{\sin x}$

١٨) $f(x)=\tan\frac{1}{3}x$

١٩) $f(x)=\sqrt{\frac{|x|}{1-|x|}}$

٢٠) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ x^2 & x<0\end{cases}$

٢١) حدد الدوال الزوجية والفردية المعرفة في التمارين ٢، ٣، ٥، ٦، ٧، ٩، ١٢، ١٤

٢٢) حدد دور كل من الدوال المعرفة في التمارين ٥، ٦، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨

٢٣) أوجد دالة مثلثية دورها $\frac{\pi}{6}$ ودالة أخرى دورها 6π. اختبر تباين (أحادية) الدوال المعرفة بمعادلاتها التالية وأوجد الدالة العكسية إن وجدت.

٢٤) $f_1(x)=2x+4$

٢٥) $f_2(x)=x^3+4$

٢٦) $f_3(x)=|x-1|$

٢٧) $f_4(x)=x^2+5x+4$

٢٨) $(x<0)\, f_5(x)=\frac{1}{1+x^2}$

٢٩) $f_6(x)=2\sqrt{x-1}$

٣٠) $f_7(x)=2x+7$

٣١) $f_8(x)=2x^2-4x, x\geq 1$

٣٢) $f_9(x)=x^4, x>0$

٣٣) $f_{10}(x)=\frac{x}{x+1}$

٣٤) $f_{11}(x)=\frac{2x-3}{7x-5}$

٣٥) $f_{12}(x)=x^5-6$

٣٦) أوجد مدى كل من الدوال المعرفة في التمارين من (٢٤) إلى (٣٥).

ارسم بيان كل من الدوال المعرفة بقواعدها التالية وأوجد مجال كل منها ومداه.

٣٧) $f(x)=\begin{cases} x^2 ، x \ge 0 \\ 2x ، 0 > x \ge -1 \end{cases}$

٣٨) $f(x)=\begin{cases} x^3 ، x > 0 \\ 4 ، x < 0 \end{cases}$

٣٩) $f(x)=\begin{cases} x-1 ، x \ge 1 \\ -1 ، 0 \le x < 1 \\ x^2-1 ، x < 0 \end{cases}$

٤٠) $f(x)=\begin{cases} x-1 ، x \ge 1 \\ -1 ، 1 > x \ge 0 \\ -x-1 ، x < 0 \end{cases}$

٤١) $f(x)=\begin{cases} x ، x > 0 \\ -\sqrt{4-x^2} ، 0 \ge x \ge -2 \end{cases}$

٤٢) في التمارين من (٢٤) حتى (٣٥) أوجد:

(أ) $(f_2 o f_1)(x)$ (ب) $(f_3 o f_4)(x)$

(ج) $(f_5 o f_6)(x)$ (د) $(f_{10} o f_{11})(x)$

(هـ) $(f_{10} o f_9)(x)$ (و) $\left(\frac{f_3}{f_7}\right)(1)$

ثم أوجد مجال دوال التركيب (التحصيل) السابقة.

٤٣) أوجد أيضًا:

(أ) $(f_6 o f_7)(8)$ (ب) $(f_{10} o f_9)(1)$

(ج) $(f_3 o f_6)(2)$ (د) $(f_5 o f_5)(1)$

٤٤) بين أن الدوال المعرفة بمعادلاتها التالية دوال محدودة:

(أ) $f(x)=1-3\sin x$ (ب) $f(x)=2+4\cos 2x$

(ج) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}, x>0$ (د) $f(x)=\frac{x^2}{1+4x^2}$

اعتمادًا على المحنيات الممثلة بمعادلاتها التالية:

(أ) $y=x$ (ب) $y=x^2$ (ج) $y=x^3$

(د) $y=|x|$ (هـ) $y=\sqrt{x}$

وباستخدام تناظرات أو انسحابات مناسبة، ارسم المنحنيات الممثلة بمعادلاتها التالية:

٤٥) (أ) $y=-x$ (ب) $y=|x|$ (ج) $y=x-3$

٤٦) (أ) $y=-x^2$ (ب) $x=y^2$ (ج) $x=-y^2$

٤٧) (أ) $y=-x^3$ (ب) $x=y^3$ (ج) $x=-y^3$

٤٨) (أ) $y=|x-1|$ (ب) $y=|x|+1$ (ج) $y=-|x|$

٤٩) (أ) $y=-\sqrt{x}$ (ب) $y=\sqrt{x-1}$ (ج) $y=\sqrt{x}-2$

٥٠) أوجد باستخدام التمارين من (٢٤) إلى (٣٥):

(أ) $(\frac{f_2}{f_1})(x)$ (ب) $(f_1f_6)(x)$ (ج) $(f_5+f_8)(1)$

(د) $(\frac{f_{10}}{f_{11}})(x)$ (هـ) $(f_2+f_7)(8)$ (و) $(f_6+f_{10})(x)$

ثم أوجد مجال الدوال المعرفة في الفقرات (أ)، (ب)، (د)، (و).

٥١) أثبت أن الدوال التالية دوال تقابل ثم أوجد معكوس كل منها:

(أ) $f(-\infty,0]\to[1,\infty)$ حيث $f(x)=x^2+1$

(ب) $f:IR-\{1\}\to IR-\{1\}$ حيث $f(x)=\frac{x}{x-1}$

(ج) $f:IR\to IR$ حيث $f(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}+1$

(د) $f:IR^+\to(0,1)$ حيث $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

٥٢) أي الدوال المعرفة كما يلي تقبل دالة عكسية باعتبار مجال كل منها IR ومجالها المقابل هو مداها:

(أ) $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ (ب) $f(x)=|x-5|$

(ج) $f(x)=x^3+1$ (د) $f(x)=\frac{1}{x^2+9}$

الفصل الرابع

النهايات
LIMITS

(١ , ٤) نهاية دالة
The Limit of a function

لتكن f دالة معرفة بقاعدتها: $f(x) = x + 1$ حيث $x \neq 1$.

لنعط للمتغير x قيمًا قريبة من 1، فنجد من الجدول التالي:

x	0.999	0.9999	1.0001	1.001	1.01
f(x)=x+1	1.999	1.9999	2.0001	2.001	2.01

أن f(x) تأخذ قيمًا قريبة من العدد 2.

من الملاحظ أيضا أنه باستطاعتنا أن نجعل الفرق: $|f(x)-2|$ أصغر من أي عدد موجب نختاره وذلك باختيار قيم مناسبة للمتغير x. فمثلاً إذا أردنا أن يكون الفرق أقل من 0.001 أي:

$$|x-1| < 0.001 \Leftrightarrow |x+1-2| < 0.001 \Leftrightarrow |f(x)-2| < 0.001$$

لوجب أن تكون قيم x محققة للمتباينة:

$$0.999 < x < 1.001 \Leftrightarrow -0.001 < x-1 < 0.001$$

أي: $x \in (0.999, 1.001)$

ولو أردنا أن يكون الفرق أقل من عدد موجب ε اختياري (صغير بالقدر الذي نريد)، لوجب أن يكون:

$$\Leftrightarrow |x+1-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x)-2| < \varepsilon$$

$$1-\varepsilon < x < 1+\varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \varepsilon$$

أي: $x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ وهذه فترة مركزها (منتصفها) 1 ونصف قطرها $\varepsilon = \delta$ ، وإذا أضفنا الشرط $x \neq 1$ لوجدنا لكل عدد $\varepsilon > 0$ ، عددًا $\delta = \varepsilon > 0$ بحيث يكون:

$$x \neq 1, |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-2| < \varepsilon$$

أو:

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-2| < \varepsilon$$

نقول عندها إن الدالة f تنتهي نحو 2 عندما x تنتهي نحو 1 ونكتب:

$$\lim_{x \to 1}(x+1) = 2 \quad \text{أو} \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

مـثـال (١ , ٤)

أوجد قيمة للعدد $\delta > 0$ بحيث يتحقق:

$x \neq 3, \ |x-3| < \delta \Rightarrow |(3x-1)-8| < \varepsilon$ حيث ε عدد موجب معطى.

الحـــل

من الممكن أن نكتب:

$$|3x-1-8| = |3x-9| = |3(x-3)| = 3|x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{3}$$

إذن، باختيار، $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ نجد:

$$|x-3| < \delta \Leftrightarrow |(3x-1)-8| < \varepsilon$$

وبشكل خاص:

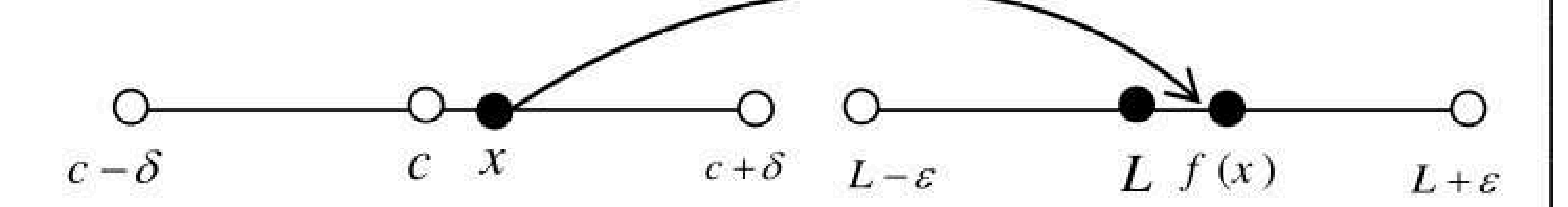
$$x \neq 3, |x-3| < \delta \Rightarrow |(3x-1)-8| < \varepsilon$$

تعريف (١ , ٤)

لتكن f دالة معرفة على فترة (a,b) تحوي c وقد لا تكون معرفة عند c نفسها. نقول إن الدالة f تنتهي نحو العدد L عندما ينتهي متغيرها x نحو العدد c، ونرمز لذلك بالرمز: $\lim_{x \to c} f(x) = L$ إذا وجدنا من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$، عددًا $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

(في الواقع $0 < |x-c|$ تعني أن $x \neq c$).



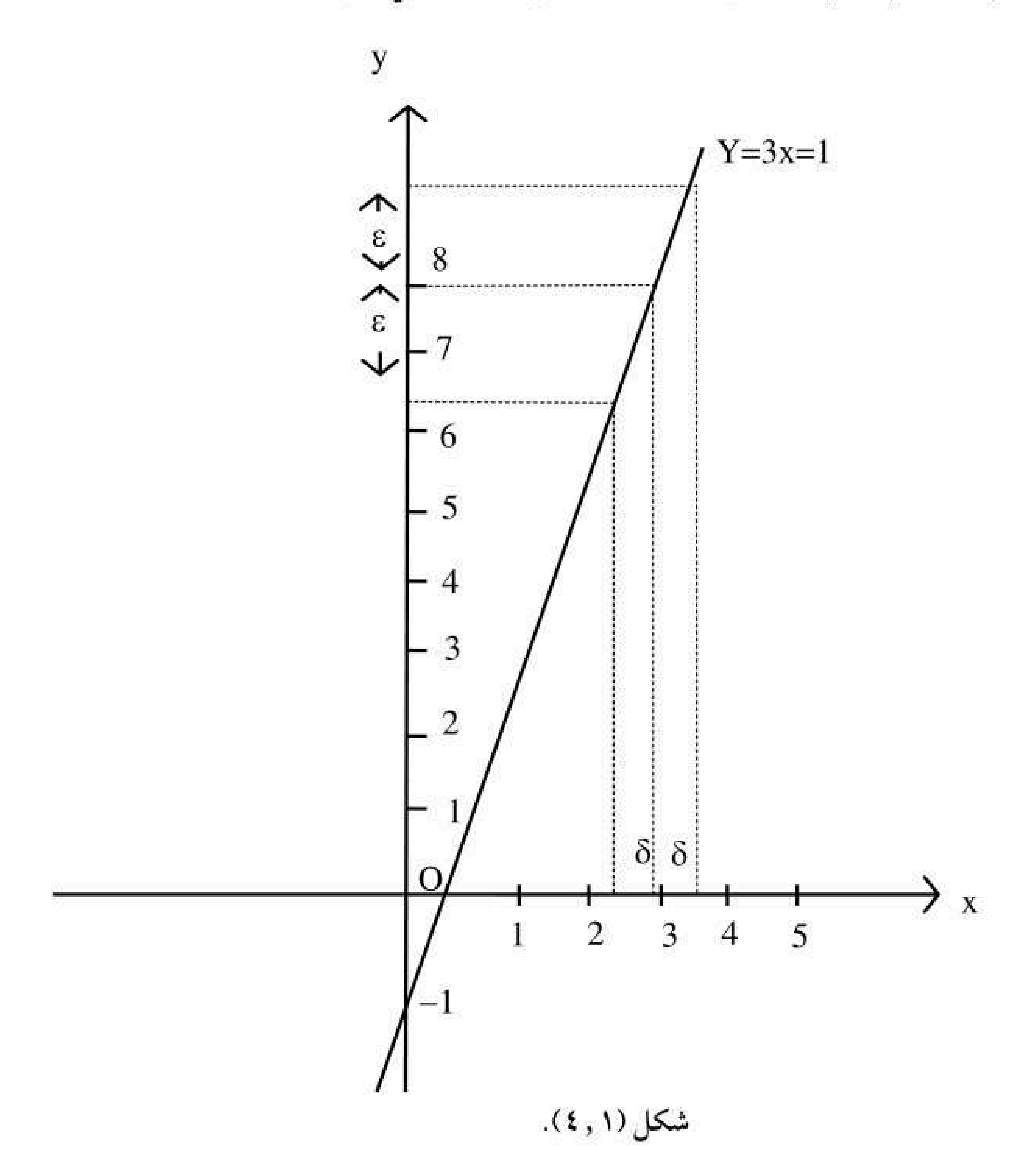
يمكن البرهان على أن نهاية الدالة f عندما $x \to c$ إن كانت موجودة فهي وحيدة.

مــثــال (٢ , ٤)

أثبت باستخدام التعريف أن: $\lim_{x\to 3}(3x-1) = 8$

الحـــل

حسب التعريف، يجب أن نجد من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$، عددًا $\delta > 0$، بحيث يكون: $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(3x-1)-8| < \varepsilon$. وبذلك رد المثال إلى المثال الذي سبقه.



شكل (١ , ٤).

لاحظ أن مجموعة قيم الدالة من أجل قيم x التي تنتمي للفترة التي مركزها 3 وطول نصف قطرها δ (وهي لا تحوي مركزها) تقع داخل الفترة التي مركزها 8 وطول نصف قطرها ε.

نظريـــة (١ , ٤)

١) نهاية الدالة الثابتة c عندما $x \to a$ هي c أيضًا.

٢) $\lim\limits_{x \to c}(ax+b) = ac+b$ (a,b ثابتان).

البرهـــان

١) لنبرهن أن $\lim\limits_{x\to a} c = c$

حسب التعريف يجب أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ ، عددًا $\delta > 0$ بحيث يتحقق:

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |c-c|<\varepsilon$$

من الملاحظ أن $|c-c|<\varepsilon \Leftrightarrow 0<\varepsilon$

وهذه المتباينة صحيحة مهما كان δ. إذن أي اختيار للعدد δ يحقق المطلوب.

٢) إذا فرضنا أن $a=0$ ، نجد:

$\lim\limits_{x\to c} b = b$ وبذلك يتحقق المطلوب

إذا كانت $a \neq 0$ ، من التعريف يجب أن نجد لكل عدد $\varepsilon > 0$ ، عددًا $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$0<|x-c|<\delta \Rightarrow |ax+b-(ac+b)|<\varepsilon$$

لكنّ: $|ax+b-ac-b| = |ax-ac| = |a||x-c|$

وبجعل هذا المقدار أقل من ε ، فإن:

$$|a||x-c|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-c|<\frac{\varepsilon}{|a|}$$

باختيار $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ ، نجد:

$$|x-c|<\delta \Leftrightarrow |ax+b-(ac+b)|<\varepsilon$$

وبشكل خاص:

$$0<|x-c|<\delta \Rightarrow |ax+b-(ac+b)|<\varepsilon$$

نتيجـــة (١ , ٤)

كحالة خاصة نجد أن: $\lim\limits_{x\to c} x = c$

وأن: $\lim\limits_{x\to c} ax = ac$

نظريــة (٢ , ٤)

بفرض أن الدالتين f, g معرفتان على فترة مفتوحة تحوي c

(وربما لا تكونان معرفتين عند c نفسها). إذا كانت النهايتان $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$ ، $\lim_{x\to c} g(x) = L_2$

موجودتين، فإن:

١) $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L_1 + L_2$

٢) $\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = L_1 L_2$

٣) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0$

٤) $\lim_{x\to c}(af(x)) = aL_1$ (a عدد ثابت).

البرهـــان

سنبرهن فقط على صحة الفقرة الأولى والأخيرة من هذه النظرية:

١) لنثبت أولا أن:

$$\lim_{x\to c} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$$

حسب الفرض: $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$ ، $\lim_{x\to c} g(x) = L_2$

هذا يعني أنه لكل عدد $\varepsilon > 0$ ، يوجد عددان موجبان δ_1, δ_2 بحيث يكون على التوالي:

$$0 < |x-c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 < |x-c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وباختيار δ أصغر العددين δ_1, δ_2 ، فإن:

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |(f(x)+g(x)) - (L_1 + L_2)| =$$

$$|(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

أو أنه يوجد لكل $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |(f(x)+g(x)) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$$

هذا يعني أن: $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L_1 + L_2$

٢) لنثبت أن: $\lim_{x\to c}(af(x)) = aL_1$ (a عدد ثابت) (٤ , ١)

حسب الفرض: $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$

هذا يعني أنه لكل عدد $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث يتحقق:

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{|a|}, a \neq 0$$

$$\Rightarrow |a||f(x) - L_1| < \varepsilon \Rightarrow |af(x) - aL_1| < \varepsilon$$

إذن يوجد لكل $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ يحيث يكون:

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |af(x) - aL_1| < \varepsilon$$

وهذا يعني:

$$\lim_{x \to c}(af(x)) = aL_1$$

إذا كانت $a = 0$ فالعلاقة (١ , ٤) تبقى صحيحة.

ملحوظـة (١ , ٤)

تبقى الفقرة الأولى صحيحة من أجل أي عدد محدود من الدوال، فمثلاً:

$$\lim_{x \to c}((f(x) + g(x) + h(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) + \lim_{x \to c} h(x)$$

نتيجـة (٢ , ٤)

$$(c \in IN) \quad \lim_{x \to c} x^n = c^n$$

البرهـان

إذا كانت $n = 1$ فإن (٢ , ٤) صحيحة استنادًا للنتيجة (١ , ٤).

وإذا كانت $n = 2$ وحسب النظرية السابقة فإن العلاقة (٢ , ٤) صحيحة لأن:

$$\lim_{x \to c} x^2 = \lim_{x \to c}(x.x) = \lim_{x \to c} x . \lim_{x \to c} x = c.c = c^2 \quad (٤ , ٢)$$

ويمكن استخدام الاستقراء الرياضي لإثباتها من أجل أي عدد صحيح n.

***نهاية كثيرة حدود* (Polynomial):**

بفرض أن $\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$ كثيرة حدود من الدرجة $n(a_0 \neq 0)$ ، فإن:

$$\lim_{x \to c} \varphi(x) = \varphi(c)$$

أي أن نهاية كثيرة حدود تساوي قيمتها عندما $x \to c$.

البرهان

نعلم أن: $\lim\limits_{x\to c} a_0x^n = a_0 \lim\limits_{x\to c} x^n = a_0c^n$

بالمثـــل نستنتـــج نهايـــات الحــــدود المتبقية من $\varphi(x)$. وحسب الملحوظة (١ , ٤)، فإن:

$$\lim_{x\to c}\varphi(x) = a_0c^n + a_1c^{n-1} +...+ a_n = \varphi(c)$$

مـــثـــال (٣ , ٤)

أوجد النهايتين التاليتين:

١) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - x^2 + 1)$

٢) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2 - x}{x^2+1}$

الحـــــل

١) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - x^2 + 1) = 2^3 - 2^2 + 1 = 8 - 4 + 1 = 5$

٢) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2 - x}{x^2+1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 7}(x^2 - x)}{\lim\limits_{x\to 7}(x^2+1)} = \dfrac{(7)^2 - 7}{7^2+1} = \dfrac{42}{50} = \dfrac{21}{25}$

نقبل فيما يلي بصحة النظرية التالية بدون برهان.

نظريـــة (٣ , ٤)

إذا كانت نهاية الدالة f موجودة عندما x→a، فإن:

١) $\lim\limits_{x\to \alpha}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n$ $(n \in IN)$

٢) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ $(n \in IN)$

بشرط أن يكون الطرف الأيمن عددًا حقيقيًّا.

مـــثـــال (٤ , ٤)

أوجد النهايات التالية:

١) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + 3x)^4$

٢) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x-1}$

٣) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2 - x^3}$

الحـــل

١) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + 3x)^4 = [\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + 3x)]^4$

$= (4)^4 = 256$

٢) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x-1} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x-1)} = \sqrt{-1}$

والنهاية غير موجودة لأن الطرف الأيمن غير حقيقي.

٣) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2 - x^3} = \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$

(٢ , ٤) النهاية عن يمين والنهاية عن يسار

The Right-hand and Left-hand Limits

إذا تحقق تعريف النهاية (١ , ٤) من أجل قيم للمتغير x تكبر العدد c فقط فإننا نرمز للنهاية بالرمز: $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$ ونسميها بالنهاية عن يمين c. وهنا يوجد لكل عدد $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

(يجب أن تكون الدالة هنا معرفة على فترة من الشكل (c, b)).

مـثـال (٥ , ٤)

أوجد قيمة النهاية: $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}$

الحـــل

$\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)} = \sqrt{1-1} = 0$ (الدالة معرفة من أجل $x \geq 1$).

من الواضح هنا لو أعطينا المتغير x القيم: ... ,1.1, 1.01, 1, 001 وهكذا لحصلنا على عدد قريب من الصفر، وعندما ننتهي نحو 1 تكون النهاية مساوية للصفر.

1

إذا تحقق تعريف النهاية (١ , ٤) من أجل قيم للمتغير x تصغر العدد c فقط فإننا نرمز للنهاية بالرمز: $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ ونسميها بالنهاية عن يسار c. وهنا يوجد لكل عدد $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$0 < c - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

(يجب أن تكون الدالة هنا معرفة على فترة من الشكل (d, c)).

مـثـال (٦ , ٤)

أوجد النهاية: $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}$

الحـل

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} = \sqrt{\lim_{x\to 1^-}(1-x)} = \sqrt{1-1} = 0$$

(الدالة معرفة من أجل $x \le 1$)

من الواضح أننا لو أعطينا المتغير x القيم: ...,0.9, 0.99, 0.999، وهكذا لحصلنا على عدد قريب من الصفر وعندما تنتهي x نحو 1 تكون النهاية مساوية للصفر.

مـثـال (٧ , ٤)

أوجد١) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ ٢) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$

الحـل

١) إذا أعطينا المتغير x القيم

$$\frac{1}{10} = 10^{-1}, 10^{-2} = \frac{1}{100}, 10^{-3} = \frac{1}{1000}, ..., 10^{-6}, ...$$ ،

نحصل على قيم للمقدار $\frac{1}{x}$ وهي:

$$10, 100, 1000, ..., 10^6, ..., ...$$

فكلما صغر العدد الموجب x كبر المقدار $\frac{1}{x}$ وتزداد قيمته وتكبر بحيث يتجاوز في كبره أي عدد موجب نفترضه.

نقول عندها إن نهاية المقدار عندما $x \to 0^+$ تساوي ∞ (أو فإن المقدار $\frac{1}{x}$ ينتهي نحو ∞)، إذن:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

٢) إذا أعطينا المتغير x القيم

$$-\frac{1}{10} = -10^{-1}, -10^{-2} = -\frac{1}{100}, -10^{-3} = -\frac{1}{1000}, \ldots, -10^{-6}, \ldots$$ ،

نحصل على قيم للمقدار $\frac{1}{x}$ وهي:

$$-10, -100, -1000, \ldots, -10^6, \ldots, \ldots$$

فكلما ازداد قرب العدد السالب x من الصفر صغرت قيمة المقدار $\frac{1}{x}$ وبقيت أصغر من أي عدد سالب نفترضه.

نقـــول عندها إن نهاية المقـــدار عندما $x \to 0^-$ تساوي ∞- (أو فإن المقدار $\frac{1}{x}$ ينتهي نحو ∞-)، إذن:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

نتيجـــة (٣, ٤)

يتضح مما سبق أن الشرط الضروري والكافي لتكون النهاية $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة أن يكون: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$

مــثــال (٨, ٤)

أوجد:

١) $\lim_{x \to \infty} \frac{5}{x}$ ٢) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x}$

الحــــل

١) إذا أعطينا x القيم:... $10, 10^2, 10^3, \ldots, 10^6, \ldots$ ، فإن المقدار $\frac{5}{x}$ يأخذ القيم:

$$\frac{5}{10}, \frac{5}{100}, \frac{5}{1000}, \ldots, 5(10)^{-6}, \ldots$$

وهكذا فإن المقدار $\frac{5}{x}$ يصغر كلما كبر x ويصبح أصغر من أي عدد موجب نفترضه. نقول عندها إن نهاية المقدار $\frac{5}{x}$ تساوي الصفر عندما $x \to \infty$.

إذن: $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0$

٢) بالمثل يمكن أن نبرهن أن $\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$

(٤,٣) أوضاع عدم التعيين
Indeterminate Forms

١) وضع عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

بسط الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ ومقامه ينتهيان نحو الصفر عندما $x \to a$.

مـثـال (٤,٩)

أوجد النهايات التالية:

١) $\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$ ٢) $\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{x-2}}$

٣) $\lim_{x\to4}\frac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}$ ٤) $\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+x-2}{|1-x|}$

الحـــل

١) البسط والمقام ينعدمان عندما x=2. فكلاهما يقبل (x–2) عاملا له، إذن:

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to2^+}\frac{x+2}{x+1}=\frac{4}{3}$$

(اختصرنا العامل المشترك).

٢) البسط والمقـــام ينعدمان عنـــدما x = 2. فالمقدار (x – 2) أحد عوامل البسط، إذن:

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to2^+}\frac{(x-2)(x-3)}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to2^+}\sqrt{x-2}(x-3)=0$$

(لاحظ أن $(x-2)=\sqrt{x-2}\,.\,\sqrt{x-2}$)

٣) البسط والمقام ينعدمان عندما x=4. فالمقدار (x–4) عامل لكليهما، وبالتالي:

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x-2)}=\lim_{x\to4}\frac{x+1}{x-2}=\frac{5}{2}$$

٤) $\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+x-2}{|1-x|}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)}=\lim_{x\to1^+}(x+2)=3$

(لاحظ أن x−1 عامل للبسط وأن المقدار 1−x سالب من أجل قيم للمتغير x تكبر الواحد وقريبة منه، إذن: $|1-x|=-(1-x)=(x-1)$)

مـثـال (٤,١٠)

أوجد النهايات التالية:

١) $\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^3-8}{x}$

٢) $\lim_{x\to4}\frac{4-x}{\sqrt{x}-2}$

٣) $\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x^2-x-2}$

٤) $\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-4x+4}}$

الحــــل

طريقة أولى:

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^3-8}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+2-2)((x+2)^2+2(x+2)+4)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x+2)^2+2(x+2)+4)=12$$

(البسط فرق بين مكعبي مقدارين: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$).

طريقة ثانية:

بملاحظة أن: $(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$

استنادًا للمتطابقة: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$

بالتالي: $\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^3-8}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+6x^2+12x+8-8}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3+6x^2+12x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+6x+12)}{x}=12$$

٢) $\lim_{x\to4}\frac{4-x}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(4-x)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{(4-x)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$

(ضربنا البسط والمقام بمرافق المقام مع ملاحظة أن $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$)

$$= \lim_{x\to 4} -(\sqrt{x}+2) = -4$$

٣) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x^2+4)}{(x+1)} = \frac{4(8)}{3} = \frac{32}{3}$$

٤) $$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-4x+4}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{(x-2)^2}}$$

(ما تحت إشارة الجذر مربع تام)

$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4$$

(لأن x-2 موجب من أجل قيم قريبة من العدد 2 وتكبر هذا العدد).

٢) وضع عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

بسط الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ ومقامه ينتهيان نحو اللانهاية عندما $x \to a$. (وقد تنتهي $x \to \infty$).

مــثــال (١١ , ٤)

أوجد النهايات التالية:

١) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x}$ ٢) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x}{x^2+1}$

٣) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+1}$ ٤) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{2x+3}$

الحـــل

١) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^4(1+\frac{1}{x^3})} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2(1+\frac{1}{x^3})}$$

(أخرجنا الحد الأكبر أسًّا في البسط والمقام خارج قوس).

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0$$

(لاحظ أن $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$. والنهاية للمقدار تساوي الصفر دومًا إذا كانت قوة المقام أكبر من قوة البسط).

٢)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to-\infty}x.\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

(أخرجنا الحد الأكبر أسًّا من البسط والمقام خارج قوس ثم اختصرنا)

$$=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

(قوة البسط أكبر من قوة المقام والنهاية هي دومًا إما ∞ أو ∞ -)

٣)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=2$$

(قوة البسط مثل قوة المقام والنهاية تساوي معامل أكبر أس في البسط مقسومًا على معامل الأس المشابه في المقام)

٤)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-1+\frac{1}{x})}{x(2+\frac{3}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}=-\frac{1}{2}$$

(القاعدة نفسها في الفقرة السابقة)

مـثـال (١٢ , ٤)

أوجد النهايات التالية:

١) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$ ٢) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x+3}$ ٣) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-3}$

الحـــل

١)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2}=-\frac{1}{2}$$

(لاحظ أن $|x| = -x$ عندما تكون x سالبة).

٢)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}+x}{x(1+\frac{3}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}{x(1+\frac{3}{x})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}{x(1+\frac{3}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)}{x(1+\frac{3}{x})}=2$$

(أخرجنا x عاملا خارج قوس ثم اختصرنا)

٣)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x^2})}}{x(1-\frac{3}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x(1-\frac{3}{x})}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x(1-\frac{3}{x})}=-1$$

٣) وضع عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

نحصل على هذا الوضع عند إيجاد نهاية مقدار من الشكل: $f(x)+g(x)$ عندما $x \to a$ وذلك إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ (أو بالعكس).

مثال (١٣ ,٤)

أوجد النهايات التالية:

١) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ ٢) $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})$

الحل

١)
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

(ضربنا البسط والمقام بمرافق البسط)

٢) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x^2} = -\infty$$

(وحدنا المقامات ووجدنا أن البسط قد انتهى نحو 1- والمقام نحو الصفر بقيم موجبة).

٤) وضع عدم التعيين من الشكل $0\times\infty$

نحصل على هذا الوضع عند إيجاد نهاية مقدار من الشكل: $f(x)g(x)$ عندما $x\to a$ وذلك إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

شكل (٤, ١٤)

أوجد:

١) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}(\sqrt{x^2+1}-1)$ ٢) $\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{x^3+1}.(x^4+1))$

الحـــل

١) من الواضح أن $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty$ ، $\lim_{x\to 0^+}(\sqrt{x^2+1}-1) = 0$

فوضع عدم التعيين هو من الشكل $0\times\infty$ ، من جهة أخرى، فإن:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}(\sqrt{x^2+1}-1) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

(والوضع الناتج عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1-1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

٢) من الملاحظ هنا أن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3+1}=0,\ \lim_{x\to\infty}(x^4+1)=\infty$$

فوضع عدم التعيين هو من الشكل $0\times\infty$

من جهة أخرى، نجد:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{x^3+1}.(x^4+1))=2\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^3+1}=2\lim_{x\to\infty}\frac{x^4(1+\frac{1}{x^4})}{x^3(1+\frac{1}{x^3})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

(٤ , ٤) نظرية الشطيرة أو نظرية الساندويتش

Sandwich Theorem

نظرية (٤ , ٤)

إذا كانت الدوال f,g,h معرفة على فترة مفتوحة تحوي c (وربما لا تحوي c نفسها) وإذا كان:

$$f(x)\le h(x)\le g(x)$$

فإن: $\lim_{x\to c}f(x)\le\lim_{x\to c}h(x)\le\lim_{x\to c}g(x)$

بشرط أن تكون النهايات كلها موجودة.

وبشكل خاص إذا تحققت المساواة:

$$\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)=L$$

فإن: $\lim_{x\to c}h(x)=L$

لنبرهن على صحة الفقرة (ب):

حسب الفرض، يوجد لكل عدد موجب $\varepsilon>0$ عددان موجبان δ_1,δ_2 بحيث يكون:

$$0<|x-c|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon\Leftrightarrow L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$$
$$0<|x-c|<\delta_2\Rightarrow|g(x)-L|<\varepsilon\Leftrightarrow L-\varepsilon<g(x)<L+\varepsilon$$

وباختيار δ مساويا أصغر العددين δ_1,δ_2، نجد:

$$0<|x-c|<\delta\Rightarrow L-\varepsilon<f(x)\ \text{و}\ g(x)<L+\varepsilon\Rightarrow$$
$$L-\varepsilon<f(x)\le h(x)\le g(x)<L+\varepsilon\Rightarrow$$
$$L-\varepsilon<h(x)<L+\varepsilon\Rightarrow|h(x)-L|<\varepsilon$$

وهذا يعني أن: $\lim\limits_{x \to c} h(x) = L$

مــثــال (٤,١٥)

أوجد النهايات التالية:

١) إذا كان: $f(x) \le h(x) \le g(x)$

على فترة مفتوحة تحوي x=1 (وربما لا تحوي x = 1 نفسها)

وإذا كان $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} g(x) = 10$ ، فأوجد:

$\lim\limits_{x \to 1}(h(x) + 7)$

٢) إذا كان $\frac{x}{x + x^2} \ge f(x) \ge 3 - \sqrt{x + 4}$ على فترة مفتوحة تحوي x = 0.

فأوجد $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ إن وجدت.

الحــــل

١) من الواضح أن: $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 10$ ، بالتالي فإن:

$$\lim_{x \to 1}(h(x) + 7) = 10 + 7 = 17$$

٢) من الملاحظ أن: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x(1 + x)} = 1$

وأيضًا: $\lim\limits_{x \to 0}(3 - \sqrt{x + 4}) = 3 - 2 = 1$

إذن: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ حسب النظرية السابقة.

(٤,٥) النهايات المثلثية

نظريــة (٤,٥)

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0, \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1}$$

البرهـــــان

لنفرض أن $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

من الواضح أن طول القوس المقابل للزاوية المركزية θ يساوي θبالتقدير الدائري (حسب (١٩ , ١)) وأن $|BC| = \sin\,\theta$ ، حسب تعريف دالة sin.

وبما أن طول القوس:

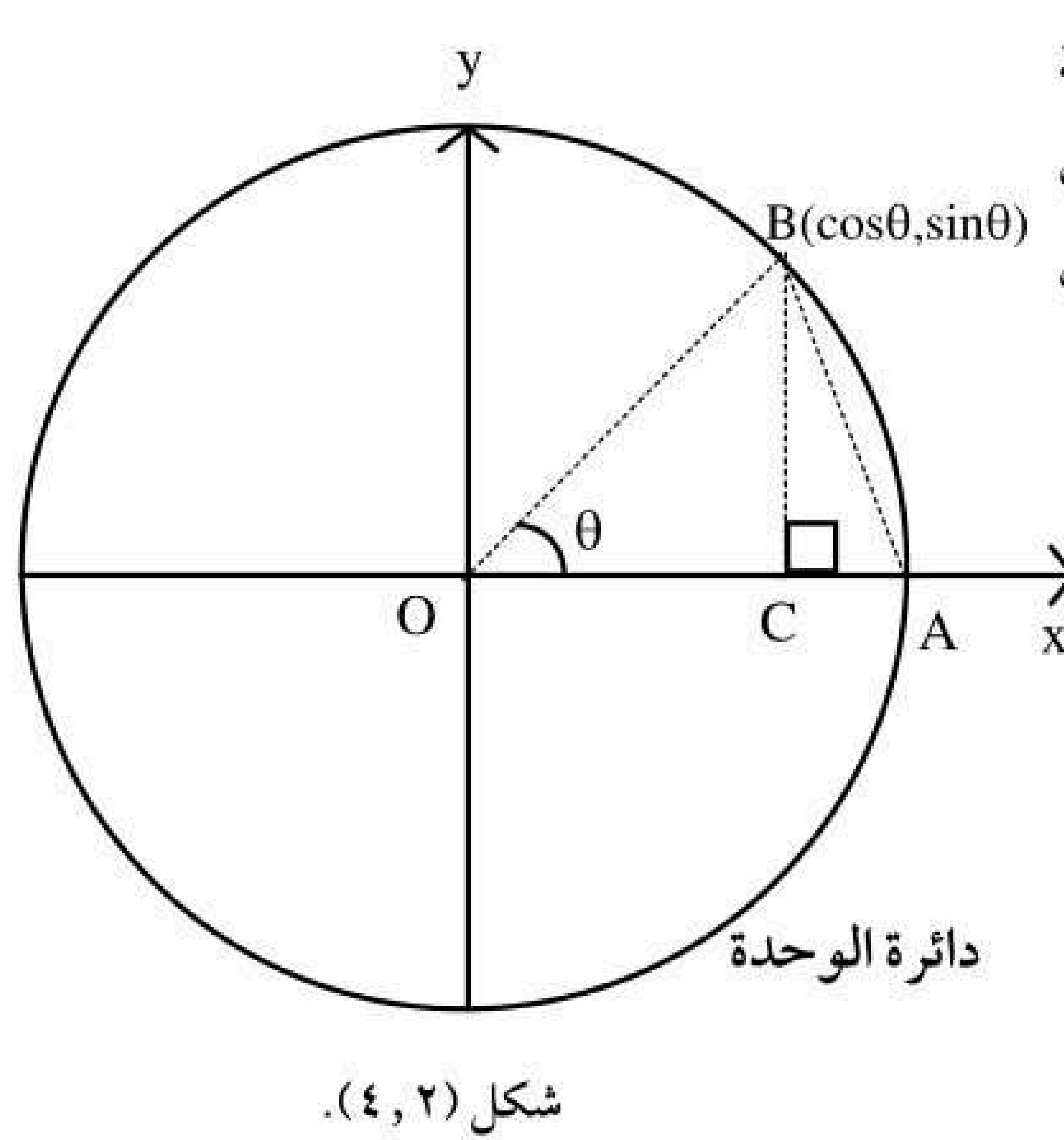
$0 < |BC| < |AB| < \widehat{AB}$ ،

فإن: $0 < \sin\theta < |AB| < \theta$ ،

ومنه: $0 < \sin\theta < \theta$

وبما أن: $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \theta = \lim\limits_{\theta\to 0^+} 0 = 0$ ،

فحسب نظرية السندويتش فإن:



شكل (٢ , ٤).

$$\lim_{\theta\to 0^+} \sin\theta = 0 \qquad (٤ , ٣)$$

لنبرهن الآن أن:

$$\lim_{\theta\to 0^-} \sin\theta = 0 \qquad (٤ , ٤)$$

لنفرض أن $0 > \theta > -\frac{\pi}{2}$ ، واستنادا للمساواة $\sin(-\theta) = \sin\theta -$ ، فإن:

$$\lim_{\theta\to 0^-} \sin\theta = -\lim_{-\theta\to 0^+} \sin(-\theta) = 0$$

(لأن $0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$ ، واستنادا للعلاقة (٣ , ٤))

من العلاقة (٣ , ٤)، (٤ , ٤) نجد أن:

$$\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$$

لنبرهن الآن أن: $\lim\limits_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$

لنأخذ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، فنجد أن $\cos\theta > 0$.

بالتالي، فإن:

$\Leftarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \Leftarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$ (أهملنا إشارة (–)، لأن $\cos\theta > 0$)

ومنه:
$$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = \sqrt{\lim_{\theta\to 0} (1-\sin^2\theta)} = \sqrt{1-0} = 1$$
$$(\lim_{\theta\to 0} \sin^2\theta = \lim_{\theta\to 0} \sin\theta \cdot \lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0)$$

نظريـــة (٤,٦)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

البرهـــان

لنفرض: أن $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$.
من المعلوم أن مساحة القطاع الدائري الذي زاويته المركزية θ تساوي $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}\theta$ (لأن الدائرة دائرة وحدة).

وأن مساحة المثلث OAB هي:
$$\frac{1}{2}|OA||BC| = \frac{1}{2}\sin\theta$$
$$(|OA| = 1, |BC| = \sin\theta)$$

دائرة الوحدة

شكل (٤,٣)

وأيضا مساحة المثلث OAD هي:
$$\frac{1}{2}|OA||AD| = \frac{1}{2}\tan\theta$$
($|AD| = \tan\theta$ من المثلث القائم OAD الذي طول ضلعه القائم $|OA| = 1$)

وبما أن:

مساحة المثلث OAB < مساحة القطاع الدائري الذي زاويته θ < مساحة المثلث OAD، فإن:

$$\frac{1}{2}\tan\theta > \frac{1}{2}\theta > \frac{1}{2}\sin\theta$$

وبتقسيم جميع الأطراف على $\frac{1}{2}\sin\theta$ ، فإن:

$$\frac{1}{\cos\theta} > \frac{\theta}{\sin\theta} > 1$$

(لاحظ أن $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$)

وبالقلب، نجد:

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

(لاحظ أن جميع المقادير في بسط ومقام كل كسر هي موجبة، وأننا غيرنا جهة التباين)

وبما أن: $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta = \lim_{\theta\to 0^+} 1 = 1$

فحسب نظرية السندويتش:

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad (٤ , ٥)$$

لنبرهن أن: $\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$. لنفرض أن $0 > \theta > -\frac{\pi}{2}$.

من الملاحظ أن:

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin(-\theta)}{-\theta}$$

ومنه:

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{-\theta\to 0^+}\frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = 1 \qquad (٤ , ٦)$$

(لأن $0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$. وكذلك استنادًا للعلاقة (٤ , ٥))

من (٤ , ٥) و(٤ , ٦)، نجد:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

نظريـــة (٤ , ٧)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$$

البرهـــان

من الملاحظ أن: $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta(1+\cos\theta)}$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}.\frac{\sin\theta}{1}.\frac{1}{1+\cos\theta}\right)$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}.\lim_{\theta\to 0}\sin\theta.\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{1+\cos\theta} = 1.0.\frac{1}{2} = 0$$

نتيجـــة (٤ , ٤)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1,\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1,\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\tan\theta}=1$$

البرهـــان

١)
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta}}=\frac{1}{1}=1$$

٢)
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}.\frac{1}{\cos\theta}\right)=1.1=1$$

٣)
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\tan\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\frac{\tan\theta}{\theta}}=\frac{1}{1}=1$$

مـثـــال (١٦ , ٤)

أوجد النهايات التالية:

١) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$ ٢) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x}$

٣) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}$ ٤) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$

الحــــل

١)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{x\to 0}(a.\frac{\sin ax}{ax})=a\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=a$$

٢)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x}=\lim_{x\to 0}(a.\frac{\tan ax}{ax})=a\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax}=a$$

٣)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{x}}{\frac{\tan bx}{x}}=\frac{a}{b}$$

(استنادا للفقرة (١) و(٢)).

٤)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$$

(باتباع الطريقة نفسها في ٣).

مـثـال (٤ , ١٧)

أوجد النهايات التالية:

١) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\tan x}{3x}$

٢) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x+\sin x}$

٣) $\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 2x-3}{x}$

٤) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x\tan 3x}$

الحـــل

١)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\tan x}{3x}=\frac{1}{3}(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x})$$
$$=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}(2.\frac{\sin 2x}{2x})+1\right)$$
$$=\frac{1}{3}(2+1)=1$$

٢)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\tan x}{x}+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$
(نقسم البسط والمقام على x)

٣)
$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 2x-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-3(1-\cos 2x)}{x}=-3\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$$
$$=-3\lim_{x\to 0}2.\frac{1-\cos 2x}{2x}=-6\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x}=-6(0)$$

٤)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(2.\frac{\sin 2x}{2x}).\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}.\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\tan 3x}{3x}}$$
$$=2.\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

مـثـال (٤ , ١٨)

أوجد النهايات التالية:

١) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

٢) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\csc(\cos x)$

٣) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan 2x}$

٤) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin t}{\pi-t}$

الحـــل

١)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
(الوضع من الشكل $\frac{0}{0}$)

٢)
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\cos x\csc(\cos x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin(\cos x)}$$
(الوضع من الشكل $0\times\infty$)
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$$
(وضعنا cosx = t ولاحظنا أن $x\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow t\to 0$)

٣)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x}}{\frac{\tan 2x}{x}}=\frac{0}{2}=0$$
(قسمنا البسط والمقام على x)

٤) $\lim_{t\to\pi}\frac{\sin t}{\pi-t}$ (الوضع من الشكل $\frac{0}{0}$)

نضع: $\pi-x=t \Leftrightarrow \pi-t=x$ وعندما $x\to 0\Leftrightarrow t\to\pi$

بالتالي:
$$\lim_{t\to\pi}\frac{\sin t}{\pi-t}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
(لأن $\sin(\pi-x)=\sin\pi\cos x-\cos\pi\sin x=0-(-1)\sin x=\sin x$)

مـثـال (٤,١٩)

أوجد النهايات التالية:

١) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}$ ٢) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin 2x}{1+x^4}$

٣) $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x^2}$ ٤) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x+x^2}$

الحـــل

١) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}$

من الملاحظ أن: $\sqrt{x}\to\infty$ عندما $x\to\infty$ ، إذن: لا يوجد نهاية للمقدار: $\sin\sqrt{x}$ عندما $x\to\infty$.

من الملاحظ أن: $-1\le\sin\sqrt{x}\le 1$

وبضرب جميع الأطراف بالمقدار الموجب $\frac{1}{x}$ ، نجد:

$$-\frac{1}{x}\le\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\le\frac{1}{x}$$

لكن: $\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ ، فحسب نظرية السندويتش:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}=0$$

٢) أيضا هنا لا يوجد للمقدار sin 2x نهاية عندما $x\to-\infty$ ، من الملاحظ أن:

$$-1\le\sin 2x\le 1$$

وبضرب جميع الأطراف بالمقدار $\frac{1}{1+x^4}$ ، نجد:

$$-\frac{1}{1+x^4}\le\frac{\sin 2x}{1+x^4}\le\frac{1}{1+x^4}$$

وبما أن: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^4}=\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{1+x^4}=0$ ، فإن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{1+x^4}=0$$

٣)
$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}x.\frac{1}{x^2}\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}.\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=0.1=0$$

(لاحظ أن الزاوية $\frac{1}{x^2}$ تنتهي نحو الصفر عندما $x\to\infty$)

٤) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x}$
$=1 . 1=1$

تمارين (١,٤)

١) أثبت باستخدام التعريف أن:

(أ) $\lim_{x\to1}(2x-3)=-1$ (ب) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$ (ج) $\lim_{x\to2}x^2=4$

أوجد النهايات التالية إن وجدت:

٢) (أ) $\lim_{x\to4}(x^2-2x+3)$ (ب) $\lim_{x\to3}\frac{x^4-x^2}{x^2-x}$

٣) $\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{3}}(x^2+4)$

٤) $\lim_{x\to1}\sqrt{5}$

٥) $\lim_{x\to2}(\sqrt{\pi}+3)$

٦) $\lim_{x\to1}\sqrt{5x-4}$

٧) $\lim_{x\to-4}\frac{x+3}{|x+3|}$

٨) $\lim_{x\to1}(2x-3)^{\frac{2}{3}}$

٩) $\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+x}{x-1}$

١٠) $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{|x|}$

١١) $\lim_{x\to2^+}\frac{x^2+1}{x^2-2x}$

١٢) $\lim_{x\to2^+}\sqrt{x^2-4}$

١٣) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}$

١٤) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$

١٥) $\lim_{x\to2}\frac{|x-2|}{x-2}$

١٦) $\lim_{x\to2^-}\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+4}}$

١٧) $\lim_{x\to1}(2x-3)^{\frac{1}{3}}$

١٨) $\lim_{x\to3}(x^2-4x)^{-5}$

١٩) $\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x^3+1}\right)^{-3}$

٢٠) $\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2+1}}$

٢١) $\lim_{x\to3^+}\frac{1}{\sqrt{x-3}}$

٢٢) $\lim_{x\to2}\frac{1}{|x-2|}$

٢٣) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}$

٢٤) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+x)$

٢٥) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}$

٢٦) $\lim\limits_{x\to\infty}5$

٢٧) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x-3}$

٢٨) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{5}$

٢٩) $\lim\limits_{x\to2^+}\sqrt{x^2+4x}$

٣٠) $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{1}{\sqrt{x-3}}$

٣١) $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{x+1}$

٣٢) $\lim\limits_{x\to0^-}(\frac{1}{x^3}-5)$

٣٣) حدد قيمة K لتكون النهايات التالية موجودة:

(أ) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ ، إذا كان: $f(x)\begin{cases}\frac{2}{x+1}, x\geq1\\ Kx+3, x<1\end{cases}$

(ب) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ ، إذا كان: $f(x)\begin{cases}\sqrt{x+4}, x\geq0\\ 2K+x^2, x<0\end{cases}$

أوجد النهايات التالية إن وجدت:

٣٤) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}$

٣٥) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^4-16}{x^2-4}$

٣٦) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-2)^3+8}{x^2+x}$

٣٧) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$

٣٨) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4+2x^2+x-4}{x-1}$

٣٩) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^2-x-2)}{(x^2-4)(x^2-1)}$

٤٠) $\lim\limits_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

٤١) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-2x}$

٤٢) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

٤٣) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-2}$

٤٤) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$

٤٥) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+1}{2x^2-4x+2}$

٤٦) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^4+6x}$

٤٧) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5-x^4+1}{x^2+2x}$

(٤٨ $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x}$

(٤٩ $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x+3}$

(٥٠ $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}-x}{x+1}$

(٥١ $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}$

(٥٢ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

(٥٣ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$

(٥٤ $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

(٥٥ $\lim_{x\to0^+}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})$

(٥٦ $\lim_{x\to1^+}(\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-1})$

(٥٧ $\lim_{x\to1^+}(x-1)(\frac{1+x^2}{x^2-x})$

(٥٨ $\lim_{x\to1^+}\frac{\sin 3x}{2x}$

(٥٩ $\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{\tan 5x}{x+\sin x}}$

(٦٠ $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x}$

(٦١ $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin 9x}$

(٦٢ $\lim_{x\to0}\frac{5-5\cos 2x}{3x}$

(٦٣ $\lim_{x\to0}(\sin x+4)^{\frac{1}{4}}$

(٦٤ $\lim_{x\to0}\frac{x\sin^2 x}{\tan^3 x}$

(٦٥ $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{x^2\tan^2 x}$

(٦٦ $\lim_{x\to0}\frac{x^3-\tan^3 4x}{x^4+\sin^3 2x}$

(٦٧ $\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$

(٦٨ $\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x}$

(٦٩ $\lim_{x\to0^-}\sqrt[5]{x}\sin\frac{1}{x}$

(٧٠ $\lim_{x\to0}\frac{x^4+x^2}{\sin x^2}$

(٧١ $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}$

(٧٢ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$

(٧٣ $\lim_{x\to0^+}(\csc x-\cot x)$

(٧٤ $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$

(٧٥ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x\cos x$

٧٦) $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x^2}{x^2+1}$

٧٧) $\lim_{x\to\infty}\frac{(2+\cos x)^3}{x^4+x^2}$

٧٨) $\lim_{x\to 0} x\cot 2x$

٧٩) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{x-\frac{\pi}{2}}$

٨٠) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}$

٨١) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2x}{1-\sin x}$

٨٢) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{\sin 2x-\sin 3x}$

٨٣) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{\sin x+\sin 5x}$

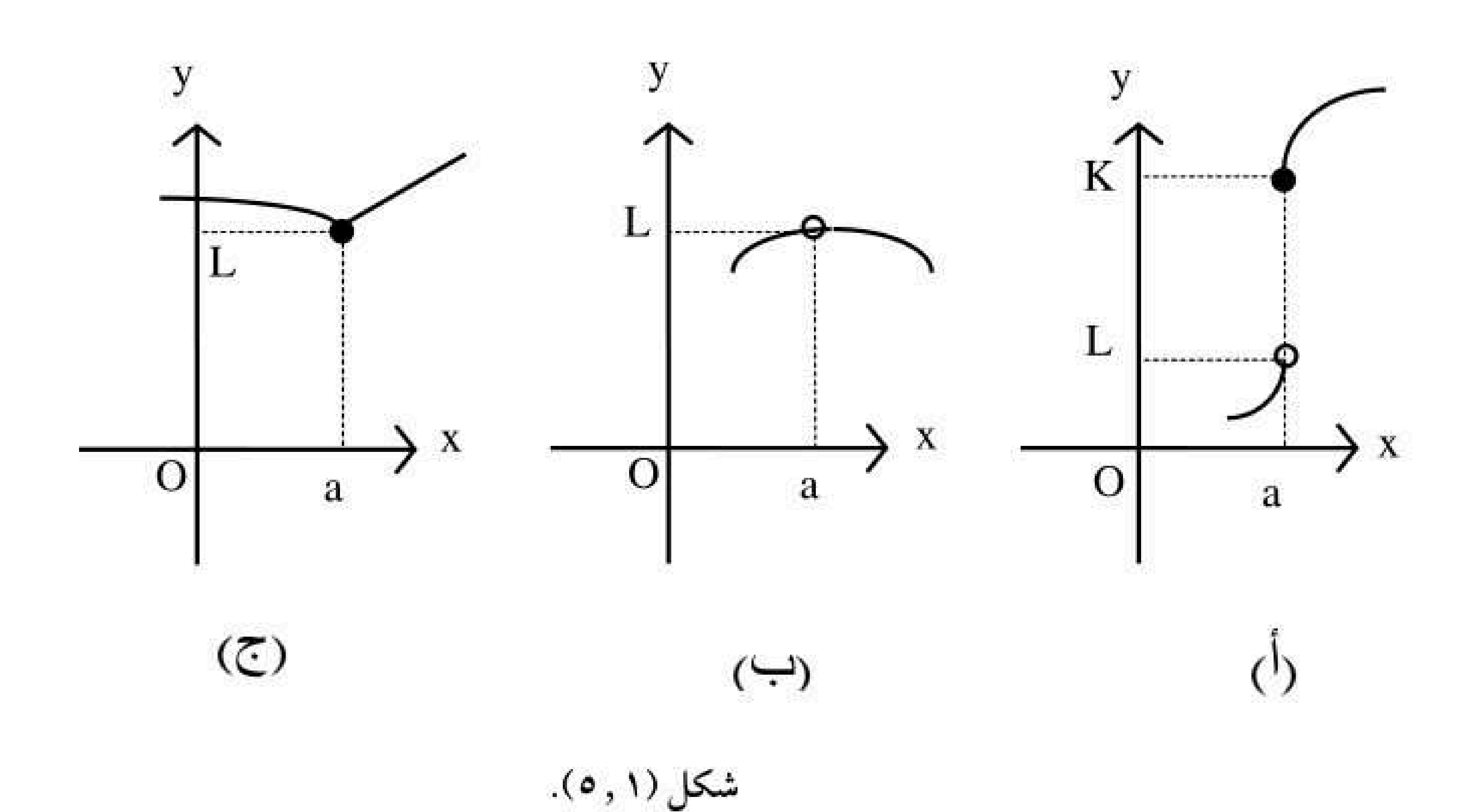
٨٤) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x+1-\cos x}{2x}$

٨٥) $\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{x}$

الفصل الخامس

الاتصال
Continuity

(١ ,٥) اتصال دالة



شكل (١ ,٥).

لاحظ في منحنيات الدوال أعلاه أن:

(أ) الدالة معرفة عند a وأن $\lim_{x\to a^+} f(x)=K$ (النهاية عن يمين a)، $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ (النهاية عن يسار a)

(ب) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$ والدالة غير معرفة عند a

(ج) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

نقول عن الدالة في (أ) والدالة في (ب)، إنها غير متصلتين عند x = a وبهما انقطاع أو عدم اتصال. كما نقول عن الدالة في (ج) إنها متصلة عند a.

تعـــريـــف (١ , ٥)

لتكن f دالة معرفة على فترة مفتوحة تنتمي إليها النقطة a.

نقول إن الدالة f متصلة عند x = a ، إذا كان:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

أو بلغة أخرى إذا كانت نهاية الدالة عندما $x \to a$ تساوي قيمتها عنده.

وهكذا نرى أن الدالة في (أ) غير متصلة عند x = a لأن النهاية عن يمين a لا تساوي النهاية عن يسار a، أي لكون النهاية غير موجودة. وفي (ب) غير متصلة لأن الدالة غير معرفة عند x = a. أما في (ج) فإن الدالة متصلة عند x = a .

مـــثـــال (١ , ٥)

ادرس اتصال الدالة f عند النقطة المرافقة:

١) $f(x) = |2x-5|$ عند $x = \frac{5}{2}$

٢) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, x > 0 \\ 2, x = 0 \\ \frac{2x + x^2}{x}, x < 0 \end{cases}$

عند x = 0

الحـــــل

١) $$f(x) = \begin{cases} 2x-5, x \geq \frac{5}{2} \\ -(2x-5), x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

من الملاحظ أن: $\lim_{x \to \frac{5}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{5}{2}^+} (2x-5) = 0$

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{5}{2}^-} -(2x-5) = 0$$

$$f(\frac{5}{2}) = 0$$

إذن الدالة f متصلة عند $x = \frac{5}{2}$

٢)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0^+} (2\frac{\sin 2x}{2x}) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x+x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(2+x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} (2+x) = 2$$

$$f(0) = 2$$

إذن الدالة f متصلة عند $x = 0$

مـثـال (٥,٢)

أوجد نقاط عدم الاتصال للدالة f حيث:

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-4)}$$

الحـــل

من الملاحظ أن عناصر المجموعة $\{1, 2, 4\}$، هي نقاط عدم اتصال. فمثلا لو أخذنا $x = 1$، لوجدنا أن الدالة f غير معرفة عندها. بالمثل بقية النقاط.

مـثـال (٥,٣)

أوجد قيمة K التي تجعل الدالة f متصلة عند $x = 0$، حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan Kx}{x}, x \neq 0, \cos Kx \neq 0 \\ 5K-2, x = 0 \end{cases}$$

الحـــل

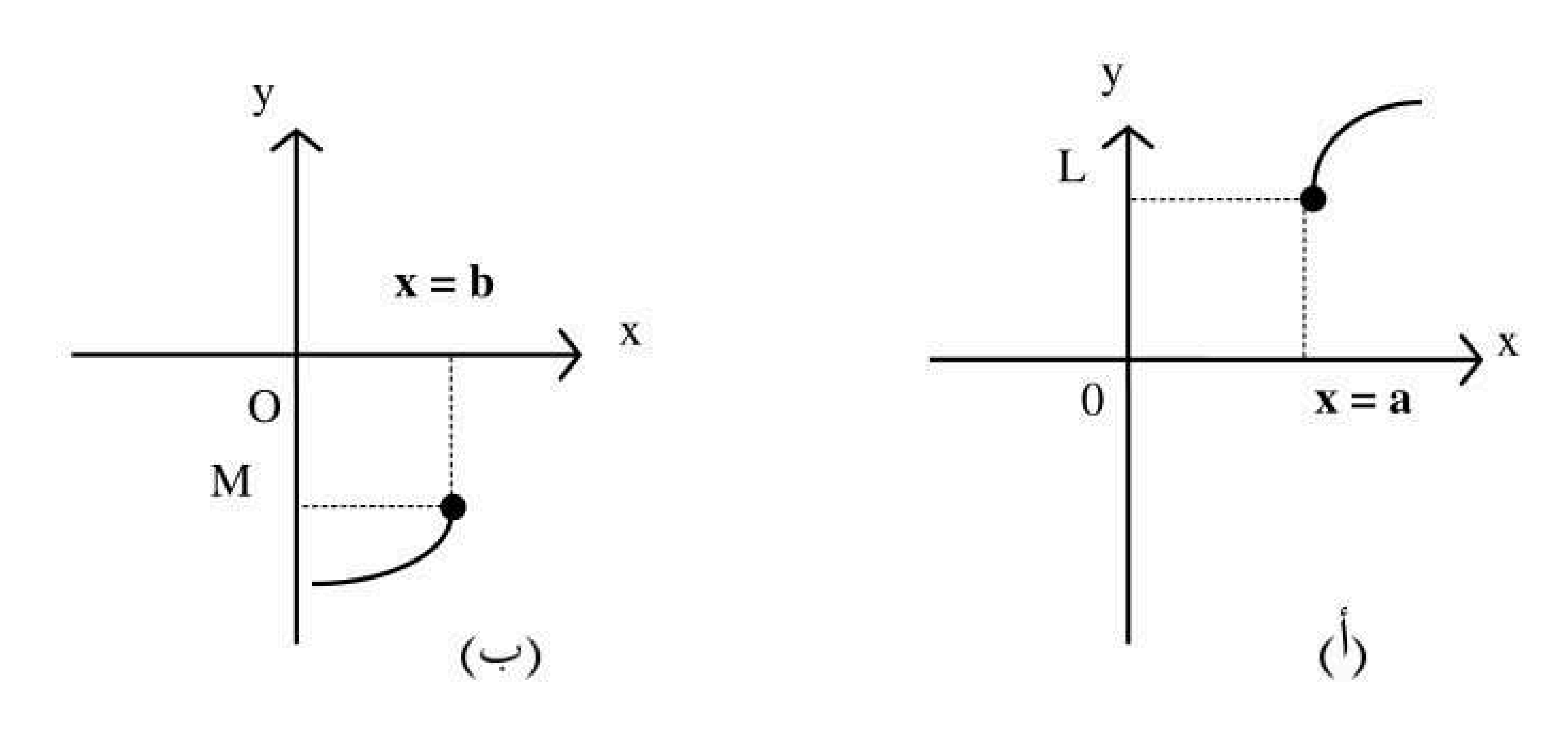
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\tan Kx}{x} = \lim_{x\to 0} (K.\frac{\tan Kx}{Kx}) = K$$

وبما أن: $f(0) = 5K - 2$

فشرط الاتصال:

$$K = 5K - 2 \Rightarrow 2 = 4K \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

(٢ , ٥) الاتصال عن يمين والاتصال عن يسار
The Continuity from right and left



شكل (٢ , ٥).

لاحـــــظ في (أ) أن: $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ وأن: f(a) =L

وكذلك في (ب) أن: $\lim_{x \to b^-} f(x) = M$ وأن: f(b) =M

نقـــول عن الدالـــــة f في (أ) إنها متصلة عن يمين x = a .

كما نقول عن الدالة f في (ب) إنها متصلة عن يسار x = b .

تعـــريـــف (٢ , ٥)

لتكن f دالة معرفة على الفترة .[a,b)

نقول إن الدالة f متصلة عند x = a يمينًا، إذا تحقق:

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)}$$

تعــريــف (٣, ٥)

لتكن f دالة معرفة على الفترة .[a,b)

نقول إن الدالة f متصلة عند x = b يسارًا (عن يسار b)، إذا تحقق:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

لاحظ في الشكل (٢ , ٥) أن الدالة متصلة عند x = a يمينًا وأن الدالة في الشكل (٢ , ٥) (ب) متصلة عند x = b، يسارًا.

فمثلا الدالة $f(x) = \sqrt{x-3}$ متصلة عند x = 3 يمينًا لأن:

$$\lim_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 0 = f(3)$$

وكذلك الدالة f ، حيث $f(x) = \sqrt{2-x}$ متصلة عند x = 2 يسارًا لأن:

$$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{2-x} = 0 = f(2)$$

تعــريــف (٤ , ٥)

نقول إن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة [a,b]، إذا كانت f:

١) متصلة عند كل نقطة من نقاط (a,b)

٢) متصلة عند a يمينًا

٣) متصلة عند b يسارًا

كما نقول إن الدالة f متصلة على مجالها، فيما إذا كانت متصلة عند كل نقطة من عناصر مجالها.

مــثــال (٤ , ٥)

ادرس اتصال الدالة f على مجالها، حيث:

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

الحـــل

من الملاحظ أن الدالة معرفة على الفترة [2 ,2-]

وأنها متصلة عند كل $a \in (-2, 2)$، لأن:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-a^2} = f(a)$$

وأيضا: $\lim_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4}=0=f(2)$

فالدالة متصلة عند x = 2 يسارًا. بالمثل الدالة متصلة عند x = −2 يمينًا.

إذن، الدالة متصلة على الفترة المغلقة [−2, 2] والتي هي مجال الدالة.

تعـــريـــف (٥ , ٥)

نقول إن العدد M هو قيمة عظمى (مطلقة) للدالة f على الفترة [a,b]، إذا كان:

M أكبر قيم الدالة من أجل جميع نقاط هذه الفترة

تعـــريـــف (٥ , ٦)

نقول إن العدد m هو قيمة صغرى (مطلقة) للدالة f على الفترة [a,b]، إذا كان:

m أصغر قيم الدالة من أجل جميع نقاط هذه الفترة

مـــثـــال (٥ , ٥)

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة f على الفترة [−4, 5]، حيث:

$f(x) = 2x - 3$

الحـــــل

من الملاحظ أن: $-4 \le x \le 5 \Leftarrow -8 \le 2x \le 10 \Leftarrow$

$-11 \le 2x-3 \le 7$. إذن القيمـــة العظـــمى للدالة f هي 7 والقيمة الصغرى هي −11 .

(٣ , ٥) خواص الدوال المتصلة

نظريـــة (٥ , ١)

إذا كـــانت الدالتـــان f, g متصلتـــين عند x = a فـــإن الـــدوال:

١) $f \pm g$

٢) fg

٣) $\frac{f}{g}$ بفـــرض أن $g(a) \ne 0$

متصلة أيضًا عند a.

البرهـــان

يمكن استنتاجه مباشرة من خواص النهايات ومن تعريف الاتصال عند نقطة.

نظريـــة (٥,٢)

إذا كانت الدالة f متصلة عند b وحققت الدالة g المساواة: $\lim_{x\to a} g(x) = b$ ، فإن

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

نظريـــة (٥,٣) (تركيب دوال متصلة)

إذا كانت g دالة متصلة عند x = c وكانت f دالة متصلة عند g(c)، فإن الدالة $f \circ g$ متصلة عند c:

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(\lim_{x\to c} g(x)) = f(g(c))$$

مــثــال (٥,٦)

١) أثبت أن الدالة f، حيث $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ متصلة على IR

٢) أثبت أن الدالة h، حيث $h(x) = |x^2 - 1|$ متصلة على IR

الحـــل

١) f دالة متصلة: لأن بسطها يُعرّف دالة متصلة لأنه كثيرة حدود، وكذلك المقام يُعرِّف دالة متصلة للسبب نفسه، وبما أن المقام لا يساوي الصفر دومًا، فإن الدالة f متصلة على IR.

٢) بما أن الدالة f، حيث $f(x) = |x|$ دالة متصلة كما يظهر لنا بعد إعادة تعريفها. وأيضا الدالة g، حيث $g(x) = x^2 - 1$ متصلة على R لأنها دالة كثيرة حدود، فإن الدالة h، حيث:

$h(x) = (fog)(x) = f(x^2 - 1) = |x^2 - 1|$ متصلة على IR.

نظريـــة (٥ , ٤)

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$، فإن:

١) الدالة f محدودة على هذه الفترة.

٢) للدالة f على الفترة قيمة عظمى (مطلقة) M وقيمة صغرى مطلقة m. أي يوجد عـــددان α, β ينتميان للفترة $[a,b]$ بحيث يكون:

$$m = f(\alpha) \quad , \quad M = f(\beta)$$

٣) فإن مدى f هي الفترة $[m,M]$

نظريـــة (٥ , ٥) (نظرية القيمة الوسطى)

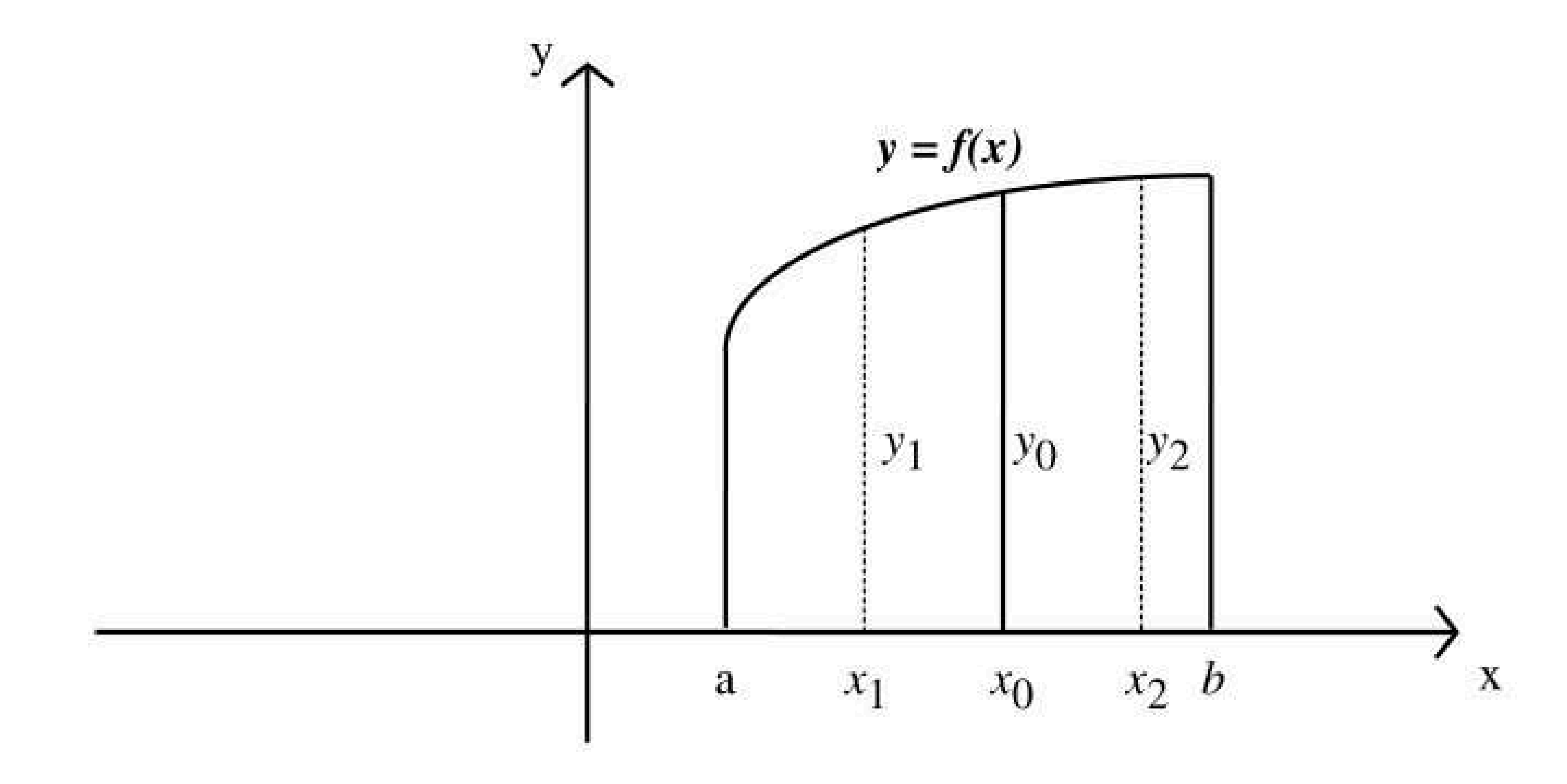
The Intermediate value Theorem

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ وكانت $y_1 = f(x_1)$ ، $y_2 = f(x_2)$ قيمتين للدالة من أجل نقطتين x_1, x_2 تنتميان للفترة $[a,b]$، فإذا

كان: $y_1 < y_2$ (بفرض $y_1 < y_2$) فعندئذ يوجد عدد: $x_0 \in [x_1, x_2]$ ، بحيث يكون: $y_2 > y_0 > y_1$

$y_0 = f(x_0)$ ، شكل (٥ , ٣).

(نقبل هذه النظريات دون برهان).



شكل (٥ , ٣).

مـثـال (٥,٧)

أثبت أن للدالة f ، حيث: $f(x)=x+\cos x+1$ جذرًا على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

الحـــل

$$f(-\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}+1\approx-0.57, f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}+1\approx1.57+1\approx2.57$$

وبما أن $2.57>0>-0.57$

وأن f دالــة متصلــة على IR لأنها مجمـــوع دوال متصلة فحسب النظريـــة (٥,٥)، يوجد عدد $x_0\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ بحيث يكون $f(x_0)=0$

تمـــاريــن (٥,١)

أوجد مجموعة نقاط عدم اتصال الدوال المعرفة على النحو التالي:

١) $f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)}$

٢) $f(x)=\frac{1}{x^3+8}$

٣) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ 1 & x<0\end{cases}$

٤) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 1, & x=0\\ x^2+x, & 0>x>-1\\ 0 & x\leq -1\end{cases}$

٥) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leq 0\\ \tan x, & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 2x, & x\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$

٦) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 4x}{3x}, & x\neq 0\\ 5, & x=0\end{cases}$

٧) $f(x)=\begin{cases}|x+1|-1 & ,x<0\\ \cos 2x & ,x\geq 0\end{cases}$

٨) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x, & x<0\\ 5, & 0\leq x<2\\ \frac{x}{2}, & 2\leq x<3\\ \frac{1}{2}\sqrt{3x}, & x\geq 3\end{cases}$

٩) أثبت أن الدالتين sin و cos متصلتان على IR:

أي أن: $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$ ، $\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos a$

وذلك لكل $a \in IR$

إرشـــاد: اكتب sin*x* على الشكل:

$$\sin x = \sin[(x-a)+a] = \sin(x-a)\cos a + \cos(x-a)\sin a$$

وبالمثل اكتب cosx على الشكل:

$$\cos x = \cos[(x-a)+a] = \cos(x-a)\cos a - \sin(x-a)\sin a$$

باستخدام خواص النهايات، أثبت أن الدوال المعرفة كما يلي متصلة على مجالها:

١٠) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

١١) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

١٢) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

١٣) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

١٤) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

١٥) $f(x) = |x^2-1|$

١٦) $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{x^2+x}$

١٧) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sin x - \cos x + 3}{1+\cos 3x}}$

حدد قيم K، L لتكون الدوال المعرفة كما يلي، متصلة عند النقطة المرافقة:

١٨) $f(x) = \begin{cases} x^2, x>1 \\ L, x=1 \\ (K^2+1)x-K, x<1 \end{cases}$ ، $x=1$

١٩) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+L^2x^3}{x}}, x>0 \\ x^2-L, x<0 \\ 2K, x=0 \end{cases}$ ، $x=0$

٢٠) $f(x)=\begin{cases} K-x , & x<4 \\ 1+2L , & x=4 \\ \sqrt{x} , & x>4 \end{cases}$ ، عند $x=4$

٢١) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x+4}} , & x>0 \\ K+1 , & x=0 \\ \dfrac{\sin(Lx)}{x} , & x<0 \end{cases}$ ، عند $x=0$

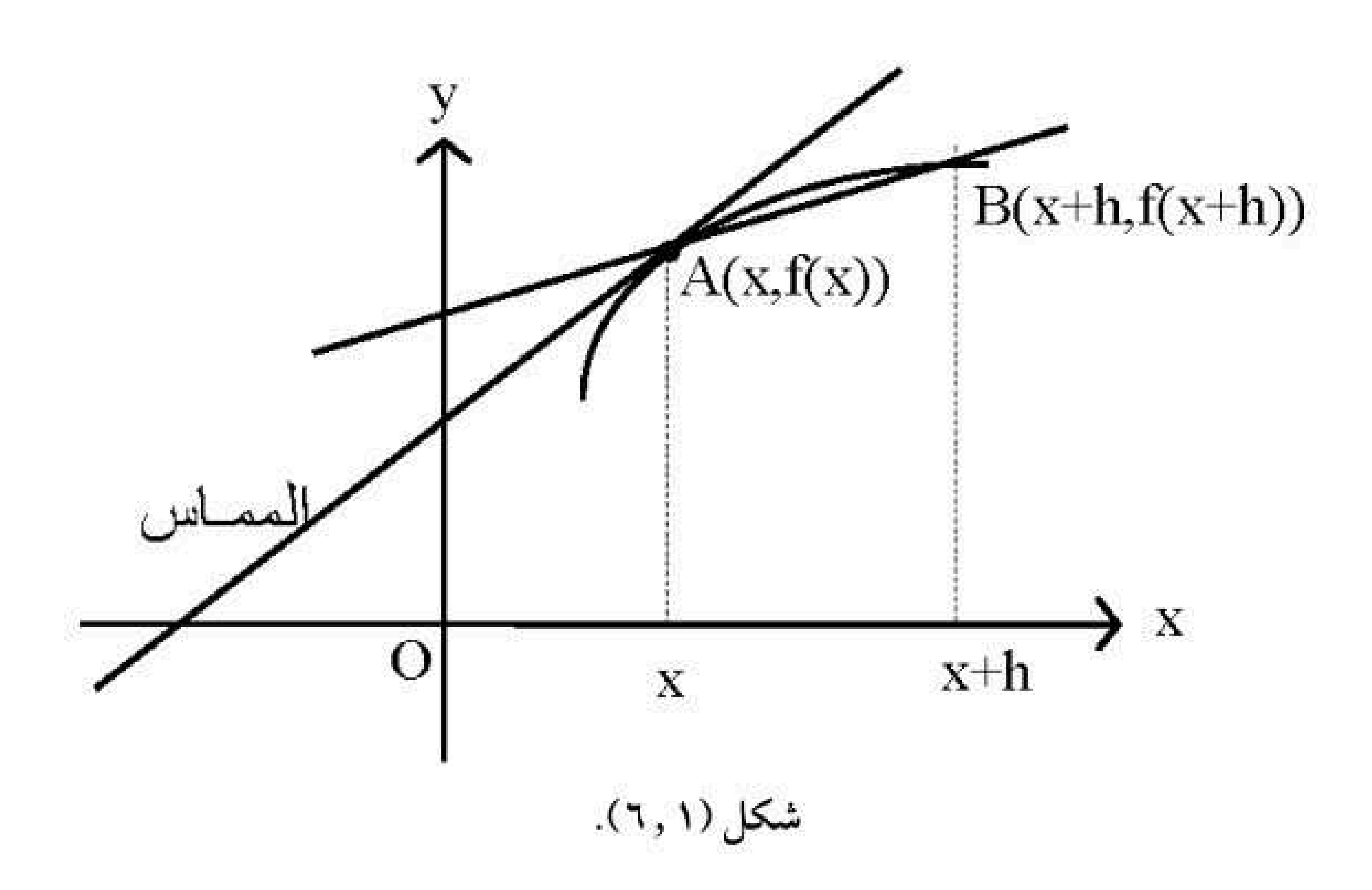
٢٢) $f(x)=\begin{cases} -5\sin x , & x\le -\dfrac{\pi}{2} \\ L\sin x+K , & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 3+\cos x , & x\ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ على IR

الفصل السادس

المشتقات
THE DERIVATIVES



(١ , ٦) المعنى الهندسي للمشتقة



شكل (١ , ٦).

نفرض أن f دالة معرفة على الفترة المفتوحة (a,b). لاحظ في الشكل أن A(x,f(x)) نقطة من منحني الدالة f (حيث: (y = f(x) ، وأن B(x+h, f(x+h)) نقطة أخرى من المنحني نفسه قريبة من A حيث h هو التغير الذي طرأ على x.

من الملاحظ أن ميل القاطع AB هو:

$$m_{AB} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (٦,١)$$

إذا كان لهذه النسبة نهاية عندما $h \to 0$، **فإن ميل القاطع AB ينتهي نحو ميل المماس لمنحني الدالة f عند x وينتهي القاطع نحو المماس للمنحني f عند النقطة $(x, f(x))$**. إذن ميل المماس عند x، هو:

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (٦,٢)$$

(٦,٢) تعـــريــف المشتقـــة
The Definition of The Derivative

تعـــريــف (٦,١)

لتكن f دالة معرفة على الفترة (a,b). إذا كانت $x\in(a,b)$ وكانت نهاية النسبة: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$، موجودة عندما $h\to 0$ فإننا نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x. نرمز لهذه النهاية بالرمز $f'(x)$ أو y' أو $\frac{dy}{dx}$ ونسميها بمشتقة الدالة عند x.

إذن:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (٦,٣)$$

إذا كانت نهاية النسبة السابقة موجودة عندما $h\to 0^+$، فإننا نسمي هذه النهاية **بالمشتقة اليمنى للدالة f عند x** . بالمثل نعرف **المشتقة اليسرى للدالة f عند x** . ومنه نجد أن:

الشرط الضروري والكافي لوجود المشتقة الأولى للدالة f عند x أن تكون المشتقتان اليمنى واليسرى للدالة f عند x متساويتين.

نتيجـــة (٦,١)

ميل المماس للمنحني الذي معادلته $y=f(x)$ عند النقطة $(x,f(x))$ يساوي قيمة المشتقة عند x، أي أن:

$$m=f'(x) \quad (٦,٤)$$

مــثــال (٦,١)

باستخدام التعريف، أوجد مشتقات الدوال المعرفة فيما يلي عند x:

١) $f(x)=x^2-x$ ٢) $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$، $x\neq -1$

٣) $f(x)=\sqrt{2x-3}$

الحـــل

١) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x+h)-(x^2-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x-h-x^2+x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h-1)=2x-1$$

٢) لاحظ أن: $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{x+h}{1+x+h}-\frac{x}{1+x}\right)$$

$$=\frac{1}{h}\cdot\frac{(x+h)(1+x)-x(1+x+h)}{(1+x)(1+x+h)}=\frac{1}{h}\cdot\frac{x+x^2+h+hx-x-x^2-xh}{(1+x)(1+x+h)}$$

$$=\frac{1}{h}\cdot\frac{h}{(1+x)(1+x+h)}=\frac{1}{(1+x)(1+x+h)}$$ ، $h\neq 0$ ، ومنه:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(1+x)(1+x+h)}=\frac{1}{(1+x)(1+x)}=\frac{1}{(1+x)^2}$$

٣) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)-3}-\sqrt{2x-3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{2x+2h-3}-\sqrt{2x-3})(\sqrt{2x+2h-3}+\sqrt{2x-3})}{h(\sqrt{2x+2h-3}+\sqrt{2x-3})}$$

(ضربنا البسط والمقام بمرافق البسط)

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+2h-3)-(2x-3)}{h(\sqrt{2x+2h-3}+\sqrt{2x-3})}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h(\sqrt{2x+2h-3}+\sqrt{2x-3})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2x+2h-3}+\sqrt{2x-3}}=\frac{2}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x-3}}=\frac{2}{2\sqrt{2x-3}}=\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

(٦,٣) مشتقة دالة عند نقطة

نعلم أن:

$$f'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \qquad (٦,٥)$$

لنضع: $t = c$ ، $t + h = x$ ، نجد:

$h = x - c$ وعندما $h \to 0$ ، فإن $x \to c$

وبالتعويض في (٦,٥)، نجد:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad (٦,٦)$$

مـثـال (٦,٢)

أوجد مشتقة الدالة f، حيث: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \ , x = 0 \end{cases}$

عند النقطة $x = 0$ وذلك باستخدام التعريف.

الحـــل

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x}$$

من الملاحظ أن: $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ ، ومنه: $-x \le x\sin\frac{1}{x} \le x$ $(x > 0)$.

وبما أن: $\lim_{x \to 0^+} -x = \lim_{x \to 0^+} x = 0$ ، فحسب نظرية السندويتش:

$$\lim_{x \to 0^+} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

بالمثل، نجد: $\lim_{x \to 0^-} x \sin\frac{1}{x} = 0$. وبالتالي فإن: $f'(0) = 0$

مـثـال (٦,٣)

ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f، حيث $f(x) = |x - 1|$ عند $x = 1$، وذلك باستخدام التعريف.

الحـــل

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \ , x \ge 1 \\ -(x - 1), x < 1 \end{cases}$$

لنحسب المشتقة اليمنى عندما $x \to 1^+$ ، فنجد:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)-0}{x-1} = 1$$

لنحسب المشتقة اليسرى عندما $x \to 1^-$ ، فنجد:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)-0}{x-1} = -1$$

وبما أن المشتقة اليمنى لا تساوي المشتقة اليسرى عند x = 1، فالمشتقة غير موجودة عند 1.

تعـــريــف (٦,٢)

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة، إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط هذه الفترة.

(٦,٤) مشتقات الدوال الجبرية

نظريــة (٦,١)

إذا كانت: $f(x)=x^n$ ، $n \in IN$ (عدد طبيعي) فإن: $f'(x)=nx^{n-1}$

البرهـــان

حسب التعريف: $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

وحسب صيغة ذي الحدين:

$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n$ ، فإن

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$

ومنه:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + nxh^{n-2} + h^{n-1})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + h^{n-1}) = nx^{n-1}$$

مـثـــال (٤ , ٦)

أوجد معادلة الماس لمنحني الدالة المعرفة كما يلي:

$f(x) = x^2$ ، عند النقطة $(1,1)$

الحـــــل

نعلم أن ميل المماس عند 1 يساوي:

$m = f'(1) = [2x]_1 = 2$ (قيمة المشتقة عند x = 1)

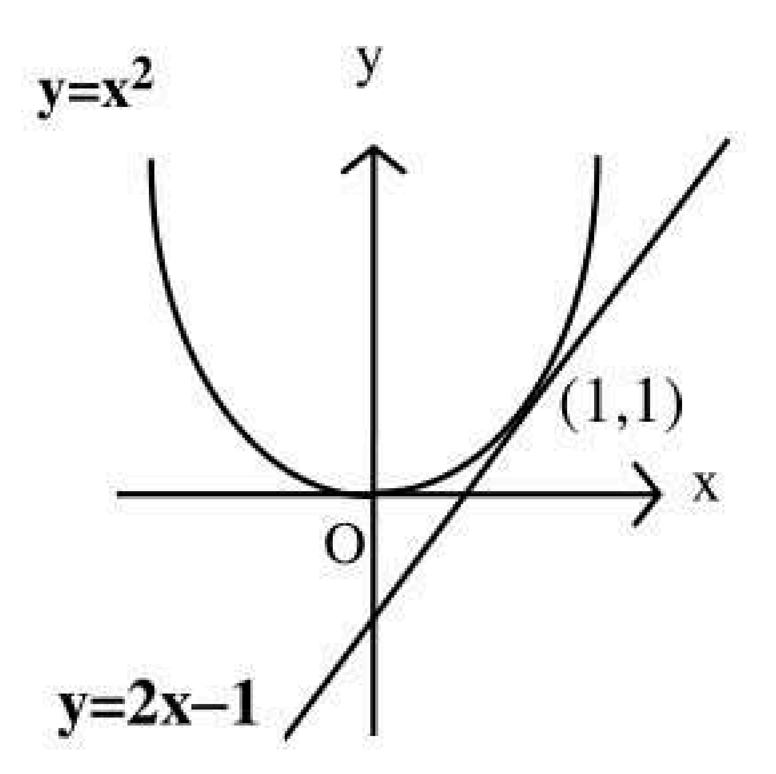
فمعادلة المماس هي:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m \Rightarrow \frac{y-1}{x-1} = 2 \Rightarrow$$
$$y = 2x - 1$$

نظريـــة (٢ , ٦)

١) إذا كانت $f(x) = c$ (c ثابت)، فإن: $f'(x) = 0$

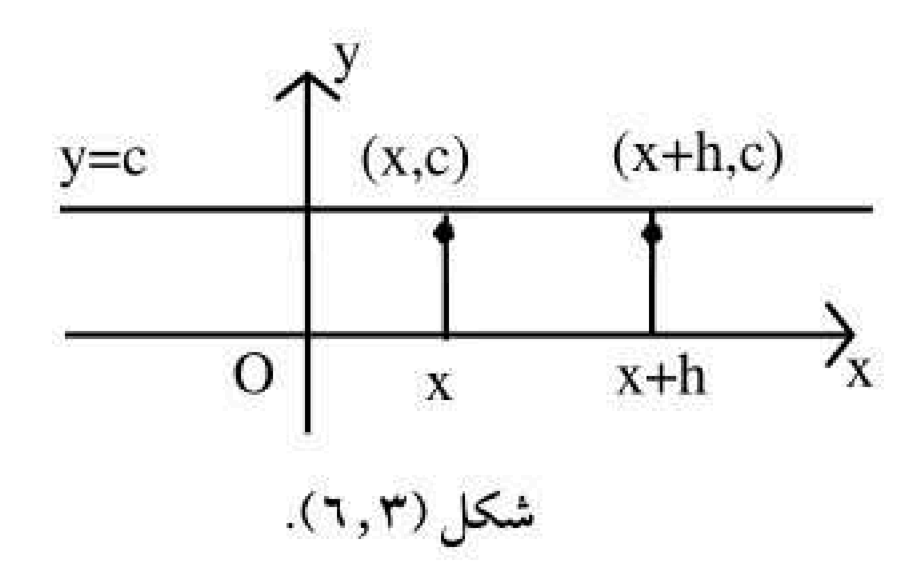
٢) إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق عند x، فإن: $y = cg(x) \Rightarrow y' = cg'(x)$



شكل (٢ , ٦).

البرهـــان

١) $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$



شكل (٣,٦).

٢)
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{cg(x+h)-cg(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} c\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = c\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= cg'(x)$$

نظريـــة (٣,٦)

إذا كانت الدالتان f, g قابلتين للاشتقاق عند x، فإن:

١) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

٢) $(f.g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

٣) $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

بشرط أن يكون $g(x) \neq 0$

البرهـــان

١) $$(f+g)' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= f'(x)+g'(x)$$

٢)
$$(f.g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
(أضفنا وطرحنا في البسط المقدار: f(x)g(x+h))
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]g(x+h)+f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)] + \lim_{h\to 0}[f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$
(وزعنا المقدار السابق إلى مجموعين)
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
($\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ ، لأن g دالة قابلة للاشتقاق فهي متصلة)

لاحظ أن f ، g دالتان قابلتان للاشتقاق عند x حسب المعطى.

٣) لنبرهن أولا أن:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\frac{1}{g(x)}) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}, g(x)\neq 0}$$

من الملاحظ أن:

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{g(x)}) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{hg(x)g(x+h)}$$
$$= -\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \Big/ \lim_{h\to 0}[g(x+h)g(x)]$$
$$= -\frac{g'(x)}{g(x)\lim_{h\to 0} g(x+h)} = -\frac{g'(x)}{g(x)g(x)} = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

من جهة أخرى:

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}) = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{d}{dx}(\frac{1}{g(x)})$$
$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

مـثـال (٦,٥)

أوجد مشتقات الدوال المعرفة كما يلي:

١) $f(x)=ax+b$ ٢) $f(x)=2x^3+3x^2+1$

٣) $f(x)=(x^3+4)(x^2-2)$ ٤) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

الحـــل

١) $f'(x)=a$

٢) $f'(x)=6x^2+6x$

٣) $f'(x)=3x^2(x^2-2)+(x^3+4)(2x)$

$$=3x^4-6x^2+2x^4+8x=5x^4-6x^2+8x$$

٤) $f'(x)=\dfrac{2x(x^2+1)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

نظريـــة (٦,٤)

إذا كانت: $f(x)=x^n$ و n عدد كسري فإن: $f'(x)=nx^{n-1}$ ، (وذلك من أجل قيم x التي تكون عندها المشتقة f' موجودة).

مـثـال (٦,٦)

أوجد مشتقات الدوال المعرفة كما يلي:

١) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}}$ ٢) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}$

٣) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^{\frac{2}{3}}+1}$ ٤) $f(x)=(x^{\frac{1}{7}}+x^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{2}}+2)$

الحـــل

١) $f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

٢) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

٣) $f'(x)=\dfrac{2x(x^{\frac{2}{3}}+1)-x^2(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})}{(x^{\frac{2}{3}}+1)^2}=\dfrac{2x^{\frac{5}{3}}+2x-\frac{2}{3}x^{\frac{5}{3}}}{(x^{\frac{2}{3}}+1)^2}$

$$= \frac{\frac{4}{3}x^{\frac{5}{3}} + 2x}{(x^{\frac{2}{3}} + 1)^2}$$

٤) $f'(x) = (\frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})(x^{\frac{1}{2}} + 2) + (x^{\frac{1}{7}} + x^{\frac{1}{3}})(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})$

نظريـــة (٦, ٥)

كل دالة قابلة للاشتقاق عند نقطة x = a، هي متصلة عند هذه النقطة.

البرهـــان

من الملاحظ أن: $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)}.(x-a)$ ، $x \neq a$

ومنه: $f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)}.(x-a)$

بالتالي، فإن: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) + \lim\limits_{x \to a}\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)}.\lim\limits_{x \to a}(x-a)$

$$= f(a) + f'(a).0 = f(a)$$

(لأن $f(a)$ ثابت فنهايته نفسه، ولأن $\lim\limits_{x \to a}\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} = f'(a)$ حسب (٦, ٦)) هذا يعني أن نهاية الدالة عندما $x \to a$ تساوي قيمتها عند a، أي أن الدالة f متصلة عند a.

نظريـــة (٦, ٦)

لتكن f دالة معرفة على الفترة (a,b)، ولتكن $c \in (a,b)$. إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقـــاق على الفترة (a,b) (وربما لا تكون قابلة للاشتقاق عند c)، وكانت f:

١) متصلة عند c

٢)والنهايتان $\lim\limits_{x \to c^+} f'(x)$ ، $\lim\limits_{x \to c^-} f'(x)$ موجودتان، فإن الشرط الضروري والكافي لوجود المشتقة f' عند c أن يكون $\lim\limits_{x \to c^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f'(x)$

مـــثـــال (٦, ٧)

ادرس قابلية الاشتقاق للدوال المعرفة على مجالها كما يلي:

١) $f(x)=|x|^3$ ٢) $f(x)=\begin{cases}1, x\geq 0\\ -1, x<0\end{cases}$ ٣) $f(x)=|x-2|$

الحـــل

١) $f(x)=\begin{cases}x^3, x\geq 0\\ -x^3, x<0\end{cases} \Leftarrow f'(x)=\begin{cases}3x^2, x>0\\ -3x^2, x<0\end{cases}$

(استبعدنا x = 0). من الملاحظ أن الدالة قابلة للاشتقاق على المجموعة {0} − IR ، إذن هي متصلة على {0} − IR. لندرس قابلية الاشتقاق عند x = 0 وفقا للنظرية (٦ , ٦)

(أ) ندرس الاتصال عند x = 0

من الملاحظ أن:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^3=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} -x^3=0\\ f(0)=0\end{cases}$$

إذن شرط الاتصال متحقق فالدالة متصلة عند x = 0.

(ب) لنأخذ نهاية: $f'(x)$ عندما $x\to 0^+$ ، فنجد:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} 3x^2=0$$

وكذلك نهاية $f'(x)$ عندما $x\to 0^-$ ، فنجد:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}(-3x^2)=0$$

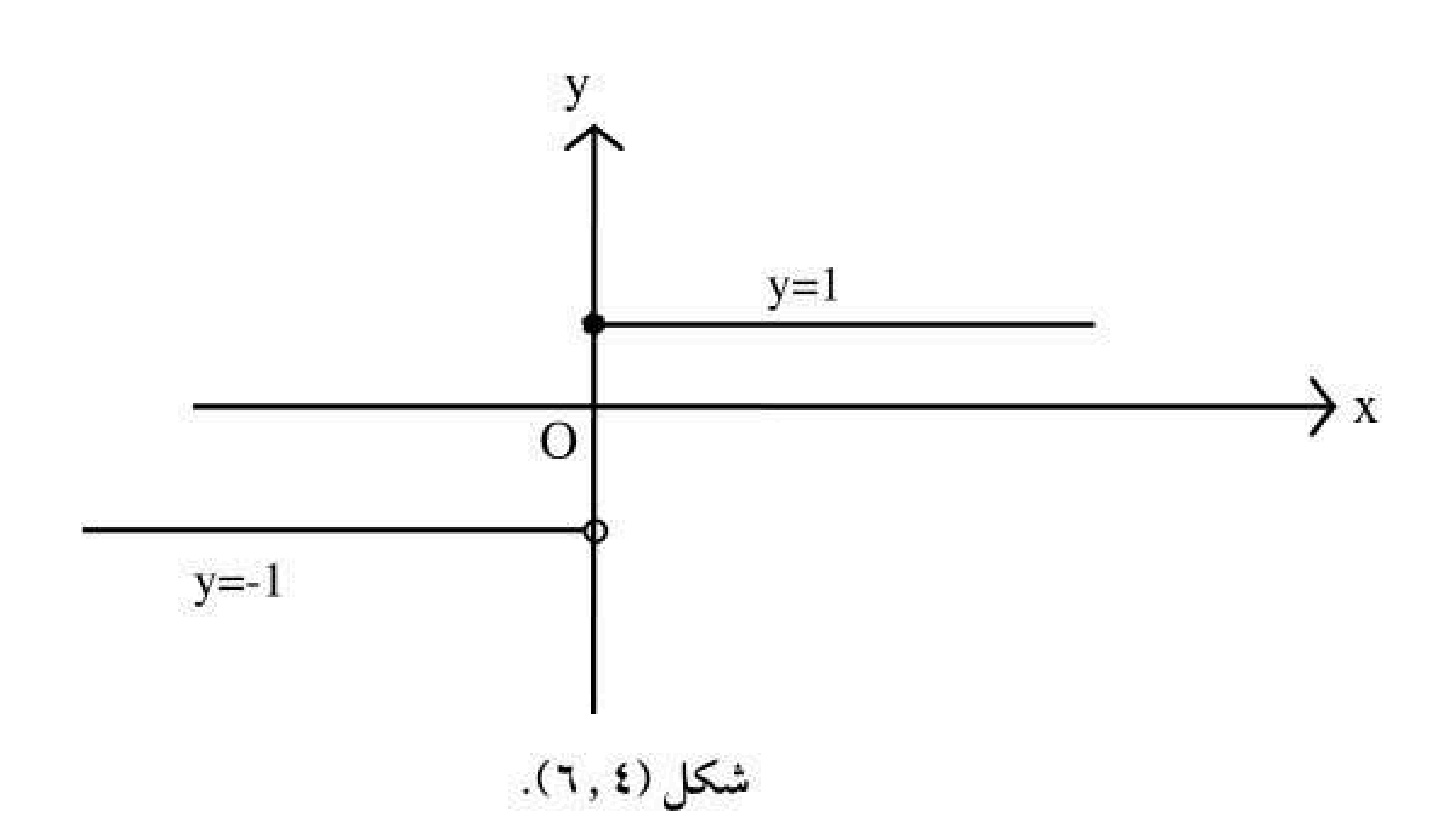
وبما أن الدالة متصلة عند x = 0 ونهاية المشتقة عندما $x\to 0^+$ تساوي نهايتها عندما $x\to 0^-$ فالدالة قابلة للاشتقاق عند x = 0، بالتالي f قابلة للاشتقاق على IR.

٢)(أ) دراسة الاتصال عند x = 0:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 1=1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} -1=-1$$
$$f(0)=1$$

فالدالة غير متصلة عند x = 0 فهي غير قابلة للاشتقاق عند x = 0.

فالدالـــة متصلـــة وقابلـــة للاشتقاق على IR−{0} ومشتقتها على IR−{0} تساوي الصفر. (شكل (٦ , ٤)).



شكل (٤, ٦).

٣)
$$f(x) = |x-2|$$
$$f(x) = \begin{cases} x-2, x \geq 2 \\ -(x-2), x < 2 \end{cases}$$

من الواضح أنها متصلة عند x=2 لتحقيقها شروط الاتصال، وكذلك متصلة على IR-{2} لأنها على شكل كثيرة حدود يسار ويمين x=2.

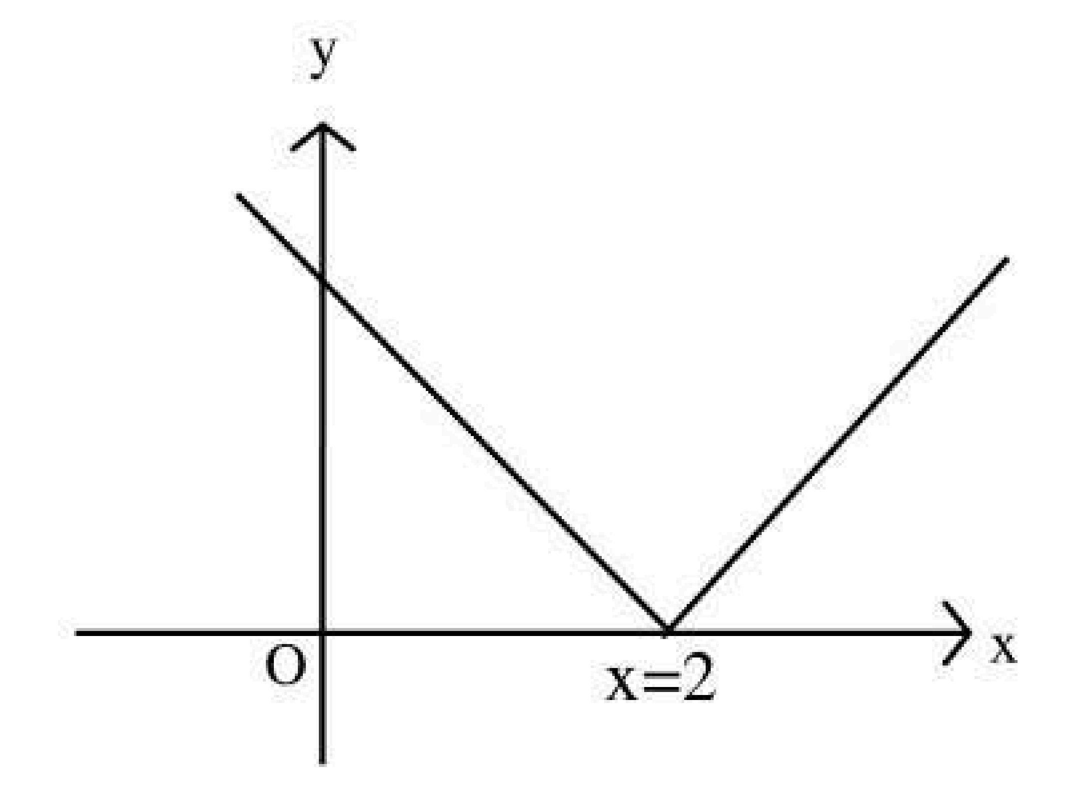
إذن، هي متصلة على IR.

دراسة قابلية الاشتقاق عند x=2:

من الواضح أن: $f'(x) = \begin{cases} 1, x \geq 2 \\ -1, x < 2 \end{cases}$

وبما أن $\lim_{x \to 2^+} f'(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f'(x)$

فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند x=2، ومن الواضح أنها قابلة للاشتقاق على IR-{2}. شكل (٥ , ٦).



شكل (٥, ٦).

(٦,٥) مشتقات الدوال المثلثية

Derivatives of the Trigonometric Functions

نظرية (٦,٧)

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$
$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

انظر شكل(٦,٦).

البرهان

١)مشتقة دالة الجيب:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin x(1-\cos h)+\sin h\cos x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin x(1-\cos h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\sin h\cos x}{h}$$
$$= -\sin x\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = -\sin x .0+\cos x .1 = \cos x$$

٢) مشتقة دالة جيب التمام

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\cos x(1-\cos h)-\sin x\sin h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\cos x(1-\cos h)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\sin h}{h}$$
$$= -\cos x\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}-\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = -\cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1 = -\sin x$$

نتيجـــة (٢ , ٦)

١)

٢) $y' = -\csc^2 x \Leftarrow y = \cot x$

٣) $y' = \sec x \tan x \Leftarrow y = \sec x$

٤) $y' = -\csc x \cot x \Leftarrow y = \csc x$

(انظر شكل (٦ , ٦)).

البرهـــان

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

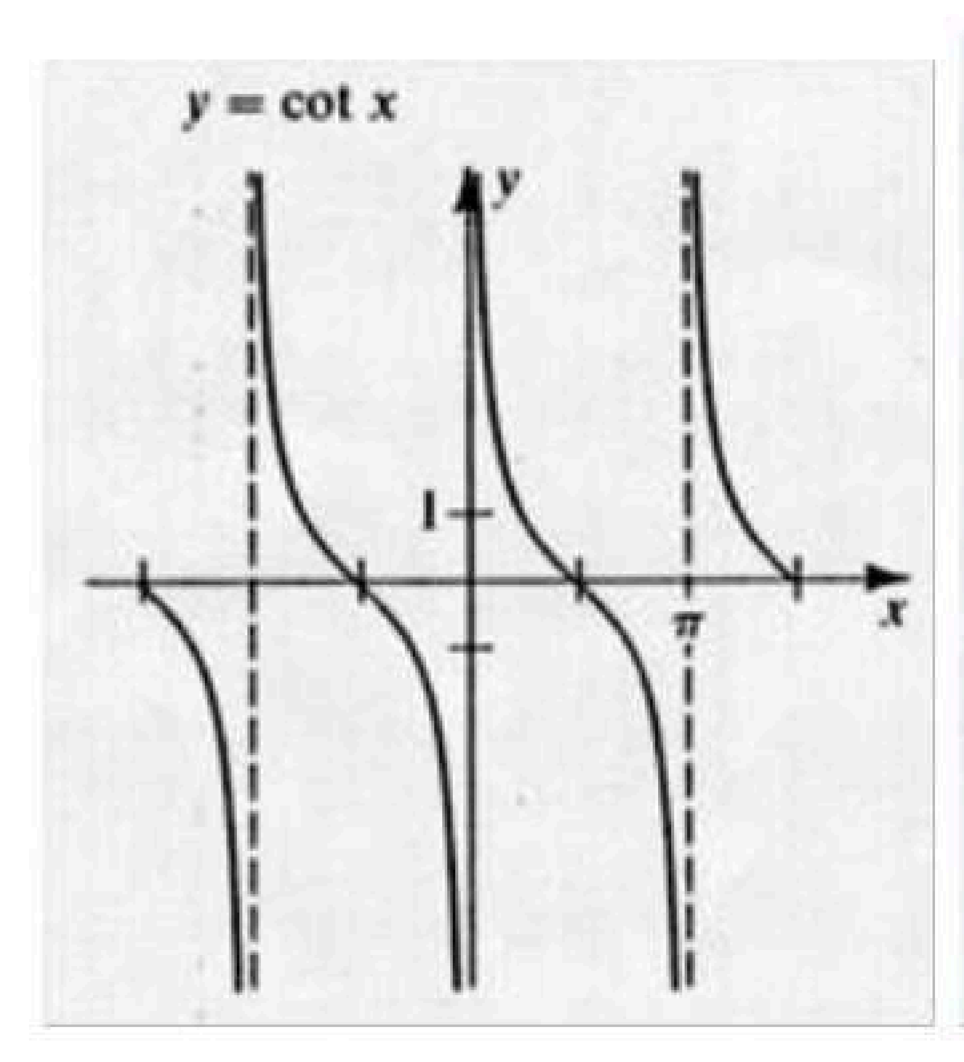
١) $$y' = \frac{\cos x . \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

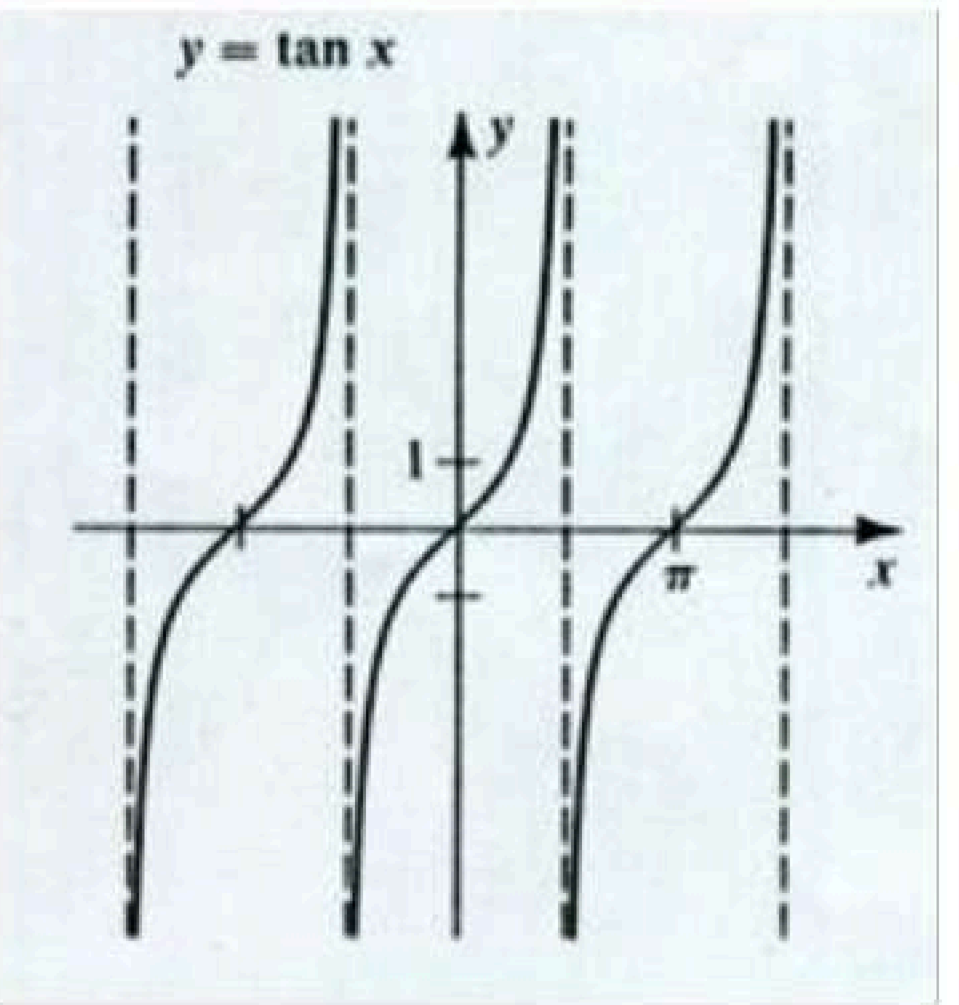
٢)بالمثل نجد مشتقة: $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

٣) $$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

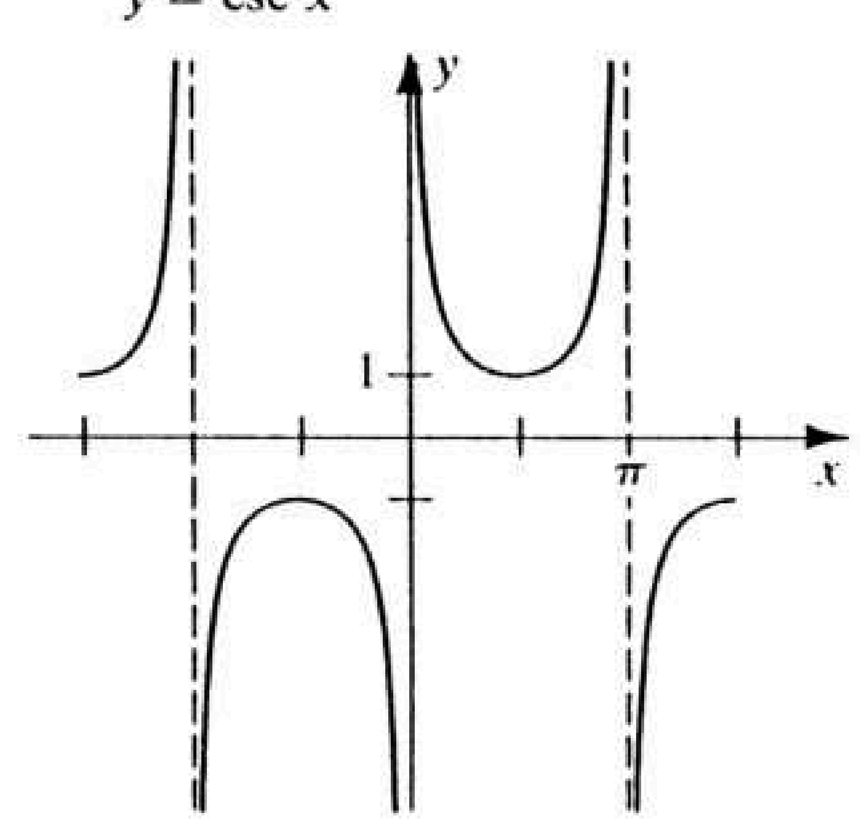
$$y' = \frac{0.\cos x - 1(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}.\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

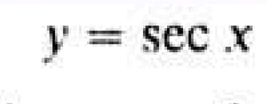
٤) بالمثل نجد مشتقة: $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

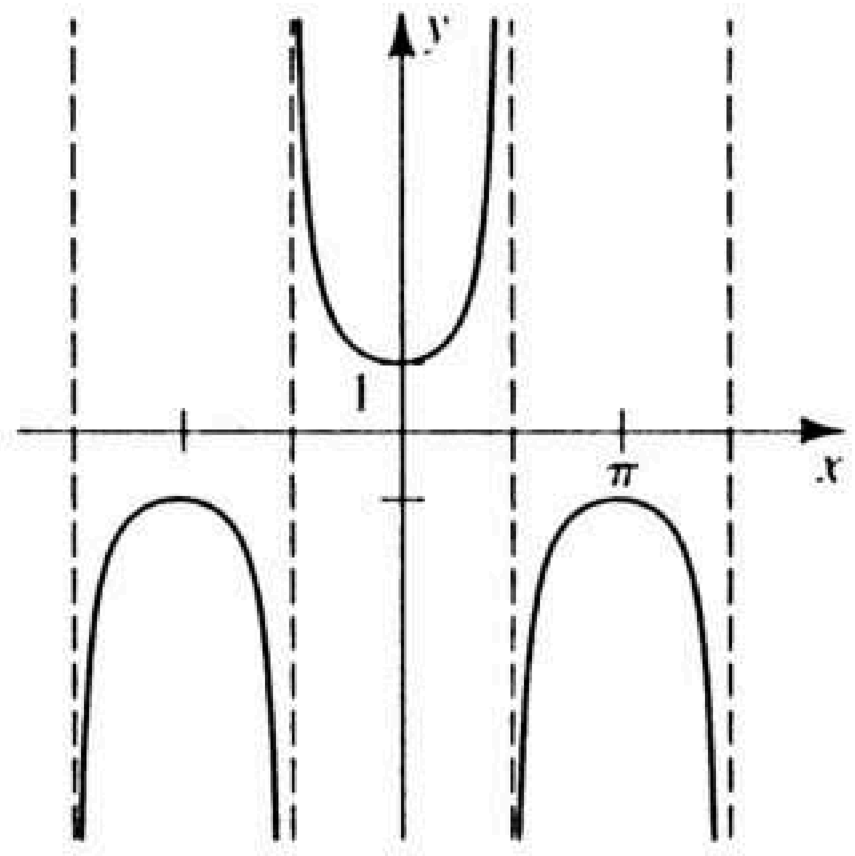


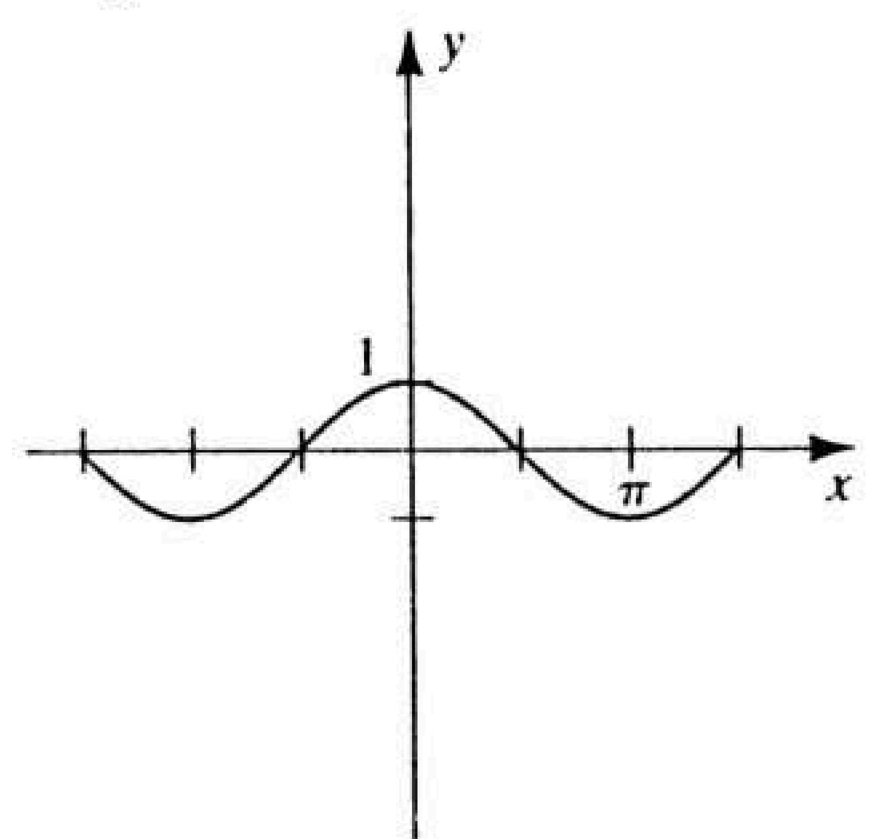




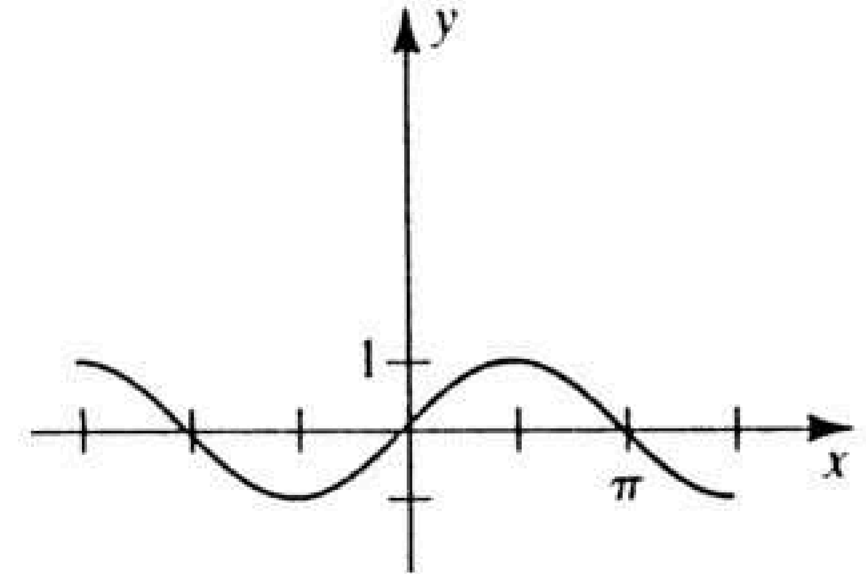








$y = \sin x$



شكل (٦ , ٦).

مـــثـــال (٦,٨)

أوجد مشتقات الدوال المعرفة فيما يلي:

١) $y=\dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}$ ٢) $y=\dfrac{\sec x}{1+\tan x}$

٣) $y=\cot x(1+\csc x)$ ٤) $y=\sin\theta\cos\theta$

الحـــــل

١) $$y=\frac{1-\cos x}{1+\sin x}\Rightarrow y'=\frac{\sin x(1+\sin x)-(1-\cos x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$
$$=\frac{\sin x+\sin^2 x-\cos x+\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=\frac{1+\sin x-\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

٢) $$y=\frac{\sec x}{1+\tan x}\Rightarrow y'=\frac{\sec x\tan x(1+\tan x)-\sec x(\sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}$$
$$=\frac{\sec x\tan x+\sec x\tan^2 x-\sec^3 x}{(1+\tan x)^2}$$

٣) $$y=\cot x(1+\csc x)\Rightarrow y'=-\csc^2 x(1+\csc x)+\cot x(-\csc x\cot x)$$
$$=-\csc^2 x-\csc^3 x-\cot^2 x\csc x$$

٤) $$y'=\cos\theta\cos\theta+\sin\theta(-\sin\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

(٦,٦) قاعـــدة السلسلـــة

The Chain Rule

نعلم أنه إذا كان: $y=f(u)$ حيث $u=g(x)$

فإن: $(fog)(x)=f(g(x))=f(u)$

فمثلا إذا كان: $y=(x^2+1)^2$

فبالإمكان أن نضع: $u=g(x)=x^2+1 \Rightarrow y=f(u)=u^2$

عندئذ: $(fog)(x)=f(u)=u^2=(x^2+1)^2$

من الملاحظ أن: $\dfrac{du}{dx}=2x$ ، $\dfrac{dy}{du}=2u=2(x^2+1)$

وبما أن: $y=x^4+2x^2+1$ ، فإن: $\dfrac{dy}{dx}=4x^3+4x$ ، بالتالي فإن: $\dfrac{dy}{dx}=2(x^2+1).2x=\dfrac{dy}{du}.\dfrac{du}{dx}$

نتساءل الآن إن كانت النتيجة التي حصلنا عليها وهي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

صحيحة دومًا. والنظرية التالية التي تسمى بقاعدة السلسلة تجيب على ذلك.

نظريـــة (٦,٨) (قاعدة السلسلة)

إذا كانت: $y=f(u)$ حيث $u=g(x)$ ، وكانت:

المشتقتان: $\frac{dy}{du}$ ، $\frac{du}{dx}$ موجودتين (عند u، x على الترتيب)، فإن:

مشتقة دالة التركيب: $y=f(g(x))$ (عند x) تعطى بالصيغة:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=f'(u).g'(x)=f'(g(x))g'(x) \qquad (٦,٧)$$

ومنه:

$$\frac{d}{dx}(u^n)=nu^{n-1}u' \text{ حيث } u=g(x) \qquad (٦,٨)$$

مـــثـــال (٦,٩)

أوجد مشتقات الدوال التالية:

١) $y=\cos 2x$ ٢) $y=(x^2+1)^7$

٣) $y=\sin^2 x$ ٤) $y=x(1+x^{\frac{1}{2}})^3$

الحـــل

١) $y=\cos 2x=\cos u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\sin u u'=-\sin(2x)(2)$

٢) $y=(x^2+1)^7=u^7 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=7u^6u'=7(x^2+1)^6(2x)$

٣) $y=\sin^2 x=u^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=2uu'=2\sin x\cos x$

٤) $y=x(1+x^{\frac{1}{2}})^3 \Rightarrow y'=(1+x^{\frac{1}{2}})^3+x\frac{d}{dx}(1+x^{\frac{1}{2}})^3 \Rightarrow$

$$y'=(1+x^{\frac{1}{2}})^3+x[3(1+x^{\frac{1}{2}})^2(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}})]=(1+x^{\frac{1}{2}})^3+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{2}})^2$$

(٦,٧) الاشتقاق الضمني
The Implicit Differentiation

(أ) لنتأمل في المساواة التالية:

$$y + xy + x - 3 = 0 \qquad (٦,٩)$$

تجد أنه باستطاعتنا حساب y بدلالة x والحصول على الصيغة:

$$y(1+x) = 3 - x \Rightarrow y = f(x) = \frac{3-x}{1+x}, x \neq -1 \qquad (٦,١٠)$$

ولكن بدون تحمل هذا العناء يمكن إيجاد المشتقة: $\frac{dy}{dx}$

وذلك باشتقاق طرفي المعادلة (٦,٩) بالنسبة للمتغير x مستفيدين من قاعدة السلسلة، فنجد:

$$y' + y + xy' + 1 = 0$$

ومنه: $y'(1+x) = -(1+y)$

إذن: $y' = -\frac{1+y}{1+x}, x \neq -1$

إن الدالة f المعرفة بالقاعدة (٦,١٠) والتي تزودنا بالقيمة y تسمى **بالدالة المباشرة أو الظاهرة**، أما المعادلة (٦,٩) فتحدد تبعية المقدار y للمتغير x بشكل ضمني ونقول إن y معرفة ضمنيًّا بالمعادلة (٦,٩) أو أن f دالة ضمنية بالمتغير x. أو أن **f محددة بشكل ضمني بالمعادلة (٦,٩)**.

فمثلا f المعرفة بالقاعدة $y = f(x) = \cos 3x + \tan 2x$ هي دالة مباشرة أو ظاهرة.

(ب) لاحظ في المعادلة التالية:

$$x \sin y + y \cos x = 0 \qquad (٦,١١)$$

أنه يستحيل إيجاد y بدلالة x، لكن يمكن إيجاد مشتقها f' باشتقاق طرفي المعادلة (٦,١١) بالنسبة للمتغير x، فنجد:

$$\sin y + x \cos y\, y' + y' \cos x - y \sin x = 0 \Rightarrow$$

$$y'(x \cos y + \cos x) = y \sin x - \sin y \Rightarrow$$

$$y' = \frac{y \sin x - \sin y}{x \cos y + \cos x}, \ x \cos y + \cos x \neq 0 \qquad (٦,١٢)$$

مـــثـــال (٦,١٠)

أوجد ميل المماس للمنحني المعرف بالقاعدة (٦,١١)، عند النقطة $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ منه.

الحـــــل

من (٦, ١٢)، نجد $m = y'(\frac{\pi}{2},\pi) = \dfrac{\pi \sin\frac{\pi}{2} - \sin\pi}{\frac{\pi}{2}\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{-\frac{\pi}{2}} = -2$

مــثــال (٦, ١١)

أوجد $y'' = \frac{d}{dx}(y')$ للدالة f المعرفة ضمنيًّا بالمعادلة:

$$3y^2 + 4x^2 = 7$$

ثم أوجد معادلتي المماس والعمود على المماس للمنحني عند النقطة (1,1) الواقعة عليه.

الحـــــل

$$3y^2 + 4x^2 = 7 \Rightarrow 6yy' + 8x = 0 \Rightarrow y' = -\frac{4x}{3y} \Rightarrow$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = -\frac{4}{3}\cdot\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{4}{3}\cdot\frac{y + \frac{4}{3}\frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{4}{3}\cdot\frac{3y^2 + 4x^2}{3y^3}$$

(عوضنا عن y' بما يساويها)

$$= -\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3y^3} = -\frac{28}{9y^3}$$

(لاحظنا أن $3y^2 + 4x^2 = 7$)

ميل المماس للمنحني: $m = y'(1,1) = -\frac{4}{3}$

ميل العمود على المماس: $m' = -\frac{1}{m} = \frac{3}{4}$

معادلة المماس عند النقطة (1,1): $\frac{y-1}{x-1} = -\frac{4}{3} \Rightarrow 3y + 4x = 7$

معادلة العمود على المماس عند النقطة نفسها: $\frac{y-1}{x-1} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4y - 3x = 1$

مــثــال (٦, ١٢)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ فيما يأتي:

١) $y = \tan^2 x + \sin^3 x^2$

٢) $y = \sec(\tan 2x)$

٣) $xy^2 + y\sec x^2 + 3 = 0$

٤) $y = \sin x^3 + \sin^3 2x$

الحـــــل

١) $y' = 2\tan x \sec^2 x + 3\sin^2 x^2 \cos x^2 (2x)$

٢) $y = \sec u \Rightarrow y' = \sec(\tan 2x)\tan(\tan 2x)\sec^2 2x(2)$

٣) $y^2+2xyy'+y'\sec x^2+y\sec x^2\tan x^2(2x)=0\Rightarrow$

$$y'(2xy+\sec x^2)=-(y^2+2xy\sec x^2\tan x^2)\Rightarrow$$

$$y'=-\frac{y^2+2xy\sec x^2\tan x^2}{2xy+\sec x^2}$$

٤) $y'=\cos x^3(3x^2)+3\sin^2(2x)\cos 2x(2)$

نظرية (٩,٦)

مشتقة: $y=x^n$ حيث n عدد نسبي (كسري)، هي $y'=nx^{n-1}$

(من أجل جميع قيم x التي تكون عندها المشتقة y' موجودة).

البرهـــان

(أ) $n\in IN^-$ (عدد صحيح سالب)

نضع: $n=-m$ ($m\in IN$)، فنجد: $y=x^{-m}=\dfrac{1}{x^m}$

بالاشتقاق، نجد:

$$y'=\frac{-m\,x^{m-1}}{x^{2m}}=-m\,x^{m-1-2m}$$

$$=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}$$

(ب) $n\in Q^+$ (عدد نسبي موجب)

نضع: $n=\dfrac{p}{q}$ $(p,q\in Z^+)$، فنجد: $y=x^{\frac{p}{q}}$

ومنه: $y^q=x^p$

بالاشتقاق، نجد:

$$\Leftarrow q\,y^{q-1}y'=p\,x^{p-1}$$

$$y'=\frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{\frac{p}{q}})^{q-1}}=\frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}}$$

$$=\frac{p}{q}x^{p-1-p+\frac{p}{q}}=nx^{n-1}$$

(ج) $n\in Q^-$ (عدد نسبي سالب)

نضع: $n=-mx$ ($m\in Q^+$)، فنجد $y=x^{-m}=\dfrac{1}{x^m}$

وبالأسلوب نفسه الذي اتبعناه في (أ)، نجد أن:

$$y' = n\,x^{n-1}$$

ومن الواضح أن النظرية صحيحة إذا كان $n = 0$.

نظريـــة (٦,١٠)

إذا قبلت الدالة f المعرفة على الفترة (a,b) التي تنتمي إليها النقطة x دالة عكسية f^{-1}، وإذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x ومشتقتها $f'(x) \neq 0$. وإذا كان $y = f(x)$، فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق عند y وإن مشتقتها تساوي:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

مـثـال (٦,١٣)

لتكن f دالة معرفة بقاعدتها:

$$f : x \mapsto x^{\frac{1}{3}} + 1$$

أوجد: $(f^{-1})'(3)$

الحـل

إن هذه الدالة تقبل دالة عكسية على IR، ومن الواضح أن حل المعادلة: $y = f(x)$ إذا كان $y = 3$ هو:

$$3 = x^{\frac{1}{3}} + 1 \Rightarrow x = 8$$

إذن:

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(8)} = \frac{1}{\frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}}} = 3(8)^{\frac{2}{3}} = 3(4) = 12$$

$$\left(f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)$$

طريقة أخرى:

قاعدة الدالة العكسية f^{-1} هي: $f^{-1} : x \mapsto (x-3)^3$

بالتالي، فإن:

$$(f^{-1})'(x) = 3(x-1)^2 \Rightarrow (f^{-1})'(3) = 3(2)^2 = 12$$

جدول المشتقات

الدالـــة	المشتقـــة	ملاحظات
c	0	c ثابـــت
cx^n	cnx^{n-1}	c عدد ثابت، n عدد قياسي
cu^n	$cnu^{n-1}u'$	n عدد قياسي، u=g(x) قابلة للاشتقاق
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$	f، g قابلتان للاشتقاق
$f(x).g(x)$	$f'(x).g(x)+f(x)g'(x)$	f، g قابلتان للاشتقاق
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$	f، g قابلتان للاشتقاق، $g(x)\neq 0$
sin u	$(\cos u)u'$	u=g(x) قابلة للاشتقاق
cos u	$(-\sin u)u'$	u قابلة للاشتقاق
tan u	$(\sec^2 u)u'$	u قابلة للاشتقاق
cot u	$(-\csc^2 u)u'$	u قابلة للاشتقاق
sec u	$(\sec u \tan u)u'$	u قابلة للاشتقاق
csc u	$(-\csc u \cot u)u'$	u قابلة للاشتقاق
c f (u)	cf′(u)u′	u=g(x) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير x f(u) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير u

(٦,٨) المشتقات من مراتب عليا

The Higher Order Derivatives

تعريـــف (٦,٣)

إذا كانت الدالة f' قابلة للاشتقاق عند x، فإننا نسمي مشتقتها بالمشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بالرمز f'' وهكذا فإن:

$$f''(x)=[f'(x)]'=\frac{d}{dx}(f'(x))$$

ويرمز لها أيضا بالرمز: $f''(x)=\frac{d^2(f(x))}{dx^2}$

وبالطريقة نفسها نحصل على المشتقة الثالثة وهي تساوي:

$$f^{(3)}(x)=f'''(x)=\frac{d}{dx}(f''(x))=\frac{d^3(f(x))}{dx^3}$$

وأخيرا نرمز للمشتقة من الرتبة n بالرمز:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n(f(x))}{dx^n} \qquad (٦,١٣)$$

مـثـــال (٦,١٤)

أوجد المشتقات من الرتب الموضحة أمام كل دالة:

١) $f(x) = x^5$ ، $n = 4$ ٢) $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$ ، $n = 2$

٣) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ، من الرتبة n ٤) $f(x) = \sin x$ ، من الرتبة n

٥) $f(x) = \sin 2x$ ، من الرتبة n ٦) $f(x) = x^{20}$ من الرتبة 20 والرتبة 21

الحـــل

١) $f'(x) = 5x^4 \Leftarrow f''(x) = 4.5x^3 \Leftarrow f^{(3)}(x) = 3.4.5x^2 \Leftarrow f^{(4)}(x) = 5!x$

٢) $f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} \Leftarrow f''(x) = -\frac{4}{25}x^{-\frac{9}{5}}$

٣) $f(x) = (x+1)^{-1} \Leftarrow f'(x) = -1(x+1)^{-2} \Leftarrow f''(x) = 1.2(x+1)^{-3} \Leftarrow \ldots$

$\Leftarrow f^{(3)}(x) = -3!(x+1)^{-4} \Leftarrow \ldots$

$\Leftarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x+1)^{-(n+1)}$

٤) $f(x) = \sin x \Leftarrow f'(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \Leftarrow f''(x) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}) \Leftarrow \ldots$

$\Leftarrow f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$

٥) $f(x) = \sin 2x \Leftarrow f'(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2}) \Leftarrow \ldots$

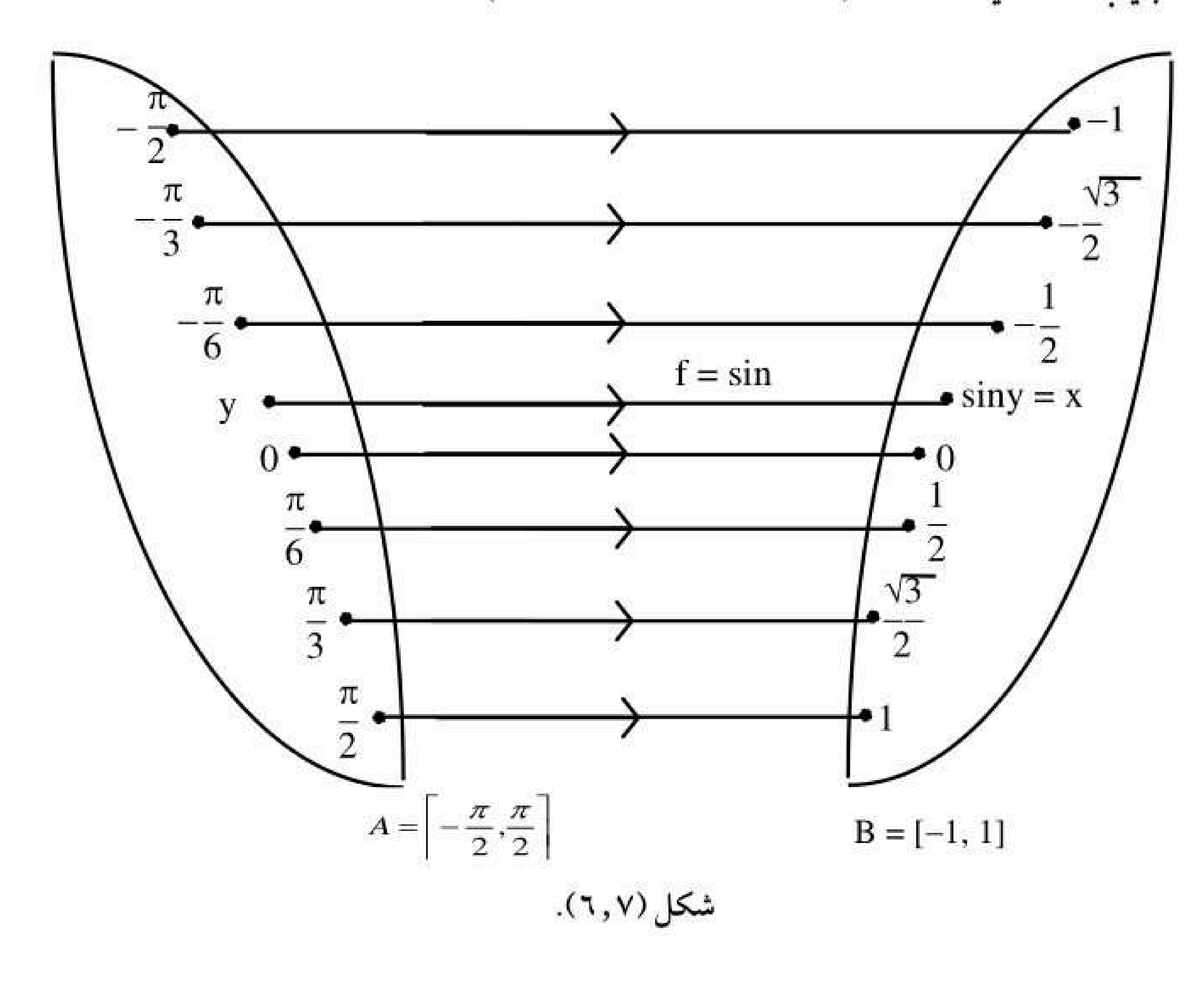
$\Leftarrow f^{(n)}(x) = 2^n \sin(2x + n\frac{\pi}{2})$

٦) $f(x) = x^{20} \Leftarrow f'(x) = 20x^{19} \Leftarrow f''(x) = 19.20x^{18} \Leftarrow$

$f^{(3)}(x) = 18.19.20x^{17} \Leftarrow f^{(20)}(x) = 20!x^0 = 20! \Leftarrow f^{(21)}(x) = 0$

(٩ , ٦) الدوال المثلثية العكسية
The Inverse Trigonometric Functions

(أ) دالة الجيب العكسية $\sin^{-1}$ (The inverse sine function)



شكل (٦,٧).

$$\sin = f : y \mapsto x = \sin y$$
$$\frac{\pi}{2} \geq y \geq -\frac{\pi}{2}$$

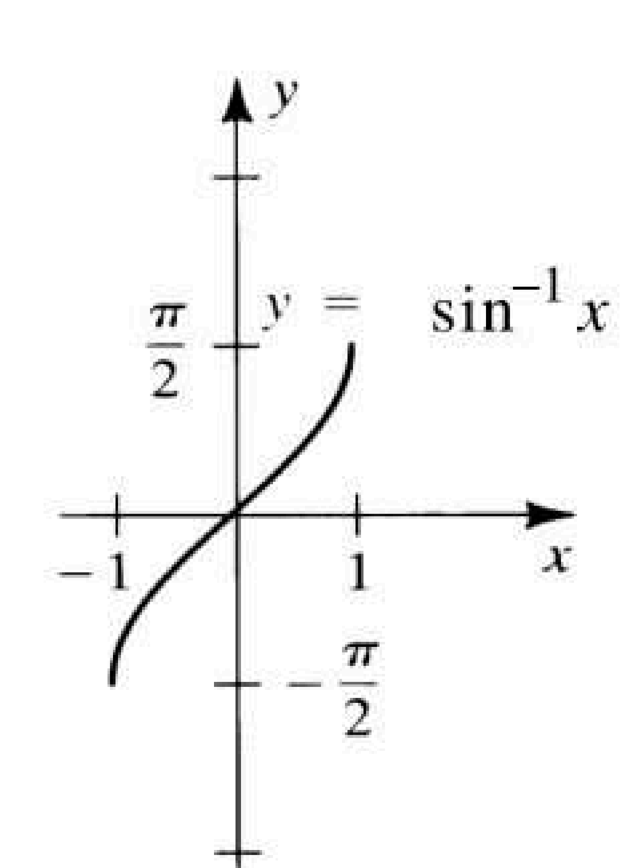
تأمل في دالة الجيب sin تجد أن كل زاوية تنتمي للمجموعة A يقابلها عدد وحيد ينتمي للمجموعة B، وبالعكس كل عدد x ينتمي للمجموعة B يوافقه زاوية وحيدة تنتمي للمجموعة A. إذن هذه الدالة تقبل دالة عكسية نسميها بدالة الجيب العكسية ونرمز لها بالرمز $\sin^{-1}$، إذن:

$$f^{-1} = \sin^{-1} : x \mapsto y = \sin^{-1} x$$

باختصار:

$$x = \sin y \Leftrightarrow y = \sin^{-1} x$$
$$\frac{\pi}{2} \geq y \geq -\frac{\pi}{2} \quad \text{حيث}$$
(٦,١٤)

فمثـــــــلاً: $\sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}, \sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}, ..., \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$
(شكـل (٦,٧)).

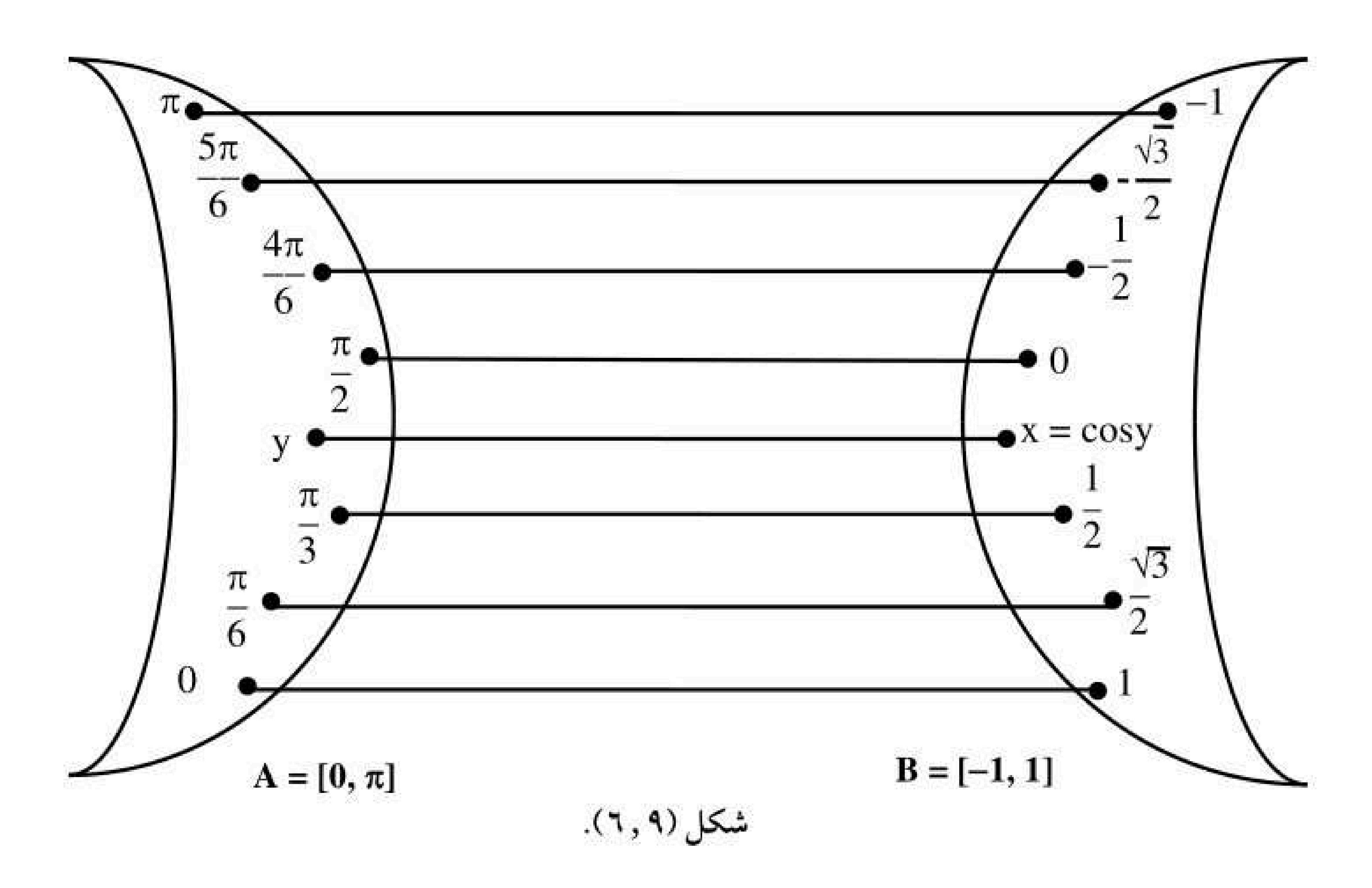


مجال الدالة: [1 ,1−]

مداها: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

شكل (٦,٨).

(ب) دالة جيب التمام العكسية $\cos^{-1}$ (The inverse cosine function)



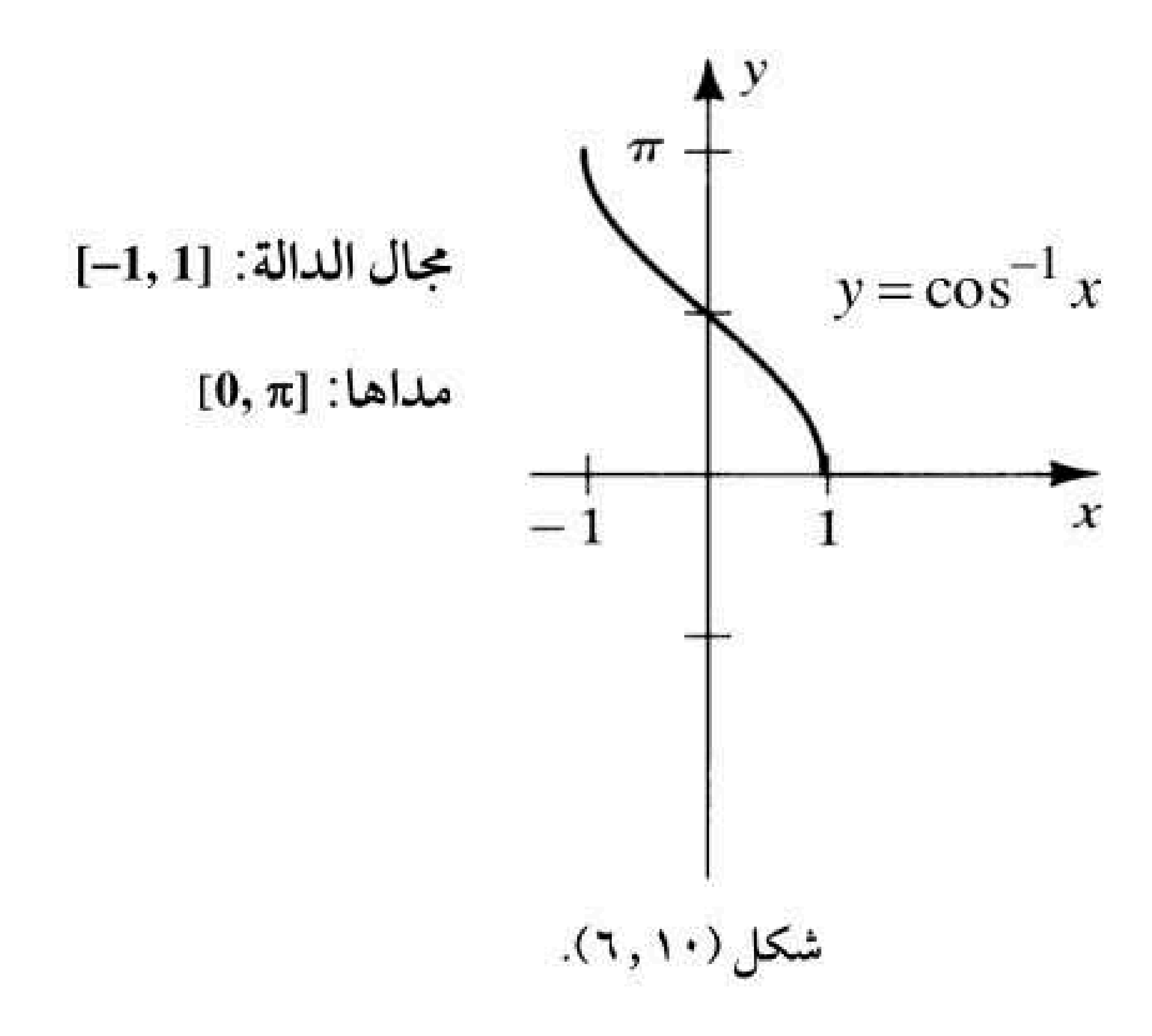
شكل (٩ ,٦).

$$\cos = f : y \mapsto x = \cos y$$
$$\pi \geq y \geq 0$$

بالأسلوب نفسه الذي وجدناه عند دراسة دالة الجيب العكسية، نجد هنا:

$$\begin{cases} x = \cos y \Leftrightarrow y = \cos^{-1} x \\ \pi \geq y \geq 0 \end{cases} \qquad (٦,١٥)$$

نسمي الدالة $\cos^{-1}$ بدالة جيب التمام العكسية.



شكل (٦,١٠).

نظريــة (٦,١١)

١) إذا كانت $y=f(x)=\sin^{-1}x$ حيث: $\frac{\pi}{2}>y>-\frac{\pi}{2}$ ، فإن:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

٢) إذا كانت $y=f(x)=\cos^{-1}x$ حيث: $\pi>y>0$ ، فإن:

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

البرهــان

١) $$x=\sin y \Leftarrow y=\sin^{-1}x \qquad (٦,١٦)$$

$$(\frac{\pi}{2}>y>-\frac{\pi}{2})$$

لنشتق طرفي المساواة في (٦,١٦) بالنسبة للمتغير x، فنجد:

$$1=\cos y\, y'$$

ومنه:

$$y'=\frac{1}{\cos y} \qquad (٦,١٧)$$

واستنادًا إلى العلاقة (٦,١٦)، وللمتطابقة: $\cos^2 y+\sin^2 y=1$ ، نجد $\cos^2 y=1-\sin^2 y=1-x^2$ (بالاستفادة من (٦,١٦))، وبما أن:

$\cos y>0$ لأن $\frac{\pi}{2}>y>-\frac{\pi}{2}$ ، فإن:

$$\cos y = \sqrt{1-x^2}$$

بالتعويض في العلاقة (٦ , ١٧)، نجد:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

٢) برهان هذه الفقرة مشابه تمامًا لبرهان الفقرة (١) ونتركه كتمرين للقارئ.

مـثـال (٦ , ١٥)

أوجد قيم المقادير التالية:

١) $\sin[\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})]$

٢) $\cos(2\sin^{-1}\frac{3}{5})$ ، $\sin(2\cos^{-1}\frac{4}{5})$

٣) $\sin(\cos^{-1}\frac{1}{3}+\sin^{-1}-\frac{1}{5})$

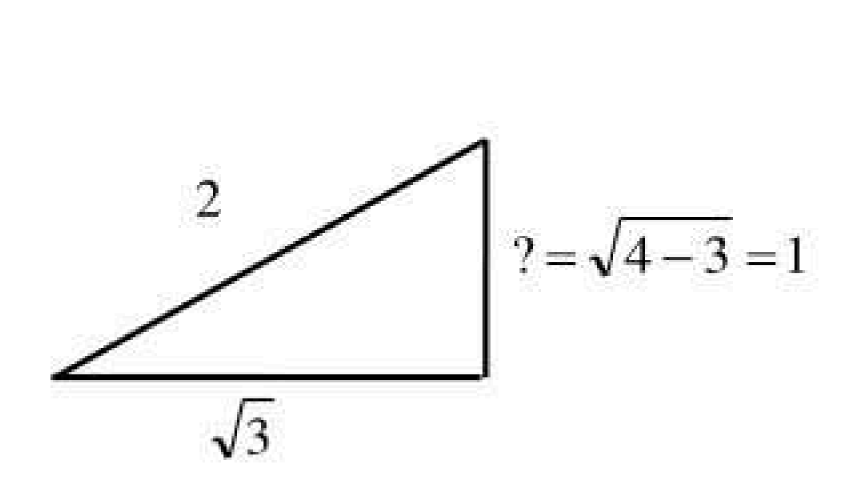
الحـــل

١) نضع $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftarrow x=\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ لكن فترة تعريف x هي: $0 \le x \le \pi$ فالزاوية تقع في الربع الثاني. إذن:

$\sin x > 0$ وهي تساوي: $\sin x = \frac{1}{2}$

(من الملاحظ أن الزاوية $x = \frac{5\pi}{6}$، إذن:

$\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$)



٢) نضع $\frac{3}{5} = \sin x \Leftarrow x = \sin^{-1}\frac{3}{5}$ والزاوية حادة.

إذن: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= (\frac{4}{5})^2 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{7}{25}$$

بالمثل: نضع $\cos x = \frac{4}{5} \Leftarrow \cos^{-1}\frac{4}{5} = x$

والزاوية حادة،إذن: $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2(\frac{3}{5})(\frac{4}{5}) = \frac{24}{25}$

٣) نضع: $\sin x = -\frac{1}{5} \Leftarrow x = \sin^{-1}(-\frac{1}{5})$

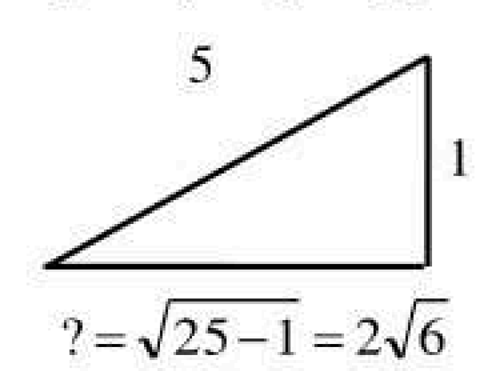
نضع: $\cos y = \frac{1}{3} \Leftarrow y = \cos^{-1}\frac{1}{3}$

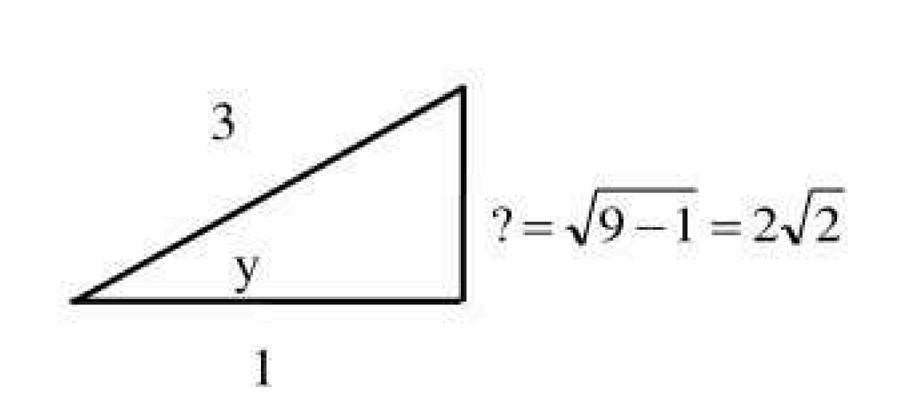
لكنّ: $\frac{\pi}{2} \ge x \ge -\frac{\pi}{2}$ ، $\pi \ge y \ge 0$ (من تعريف الدوال المثلثية العكسية)

إذن: x تقع في الربع الرابع،و y زاوية حادة

بالتالي: $\sin(y+x) = \sin y \cos x + \cos y \sin x$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} . \frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{5}) = \frac{1}{15}(8\sqrt{3}-1)$$





$\cos x = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ (تقع x في الربع الرابع)، $\sin y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (y حادة).

مـثـال (٦,١٦)

أوجد مشتقة كل مما يأتي:

١) $y = \sin^{-1}\sqrt{1-2x}$ ٢) $y = (\cos^{-1}(x-1)^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$

الحــــل

١) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)}} . \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{2x}}\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

٢) $y' = \frac{3}{2}(\cos^{-1}(x-1)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^4}}.2(x-1))$

$$= -3\frac{(\cos^{-1}(x-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^4}}$$

(ج) با لمثــل نعــرف دالة الظــل العكسيــة $\tan^{-1}$ (The inverse tangent function)

ودالة ظــل التمام العكسية $\cot^{-1}$ **با لشكل** (The inverse Cotangent function):

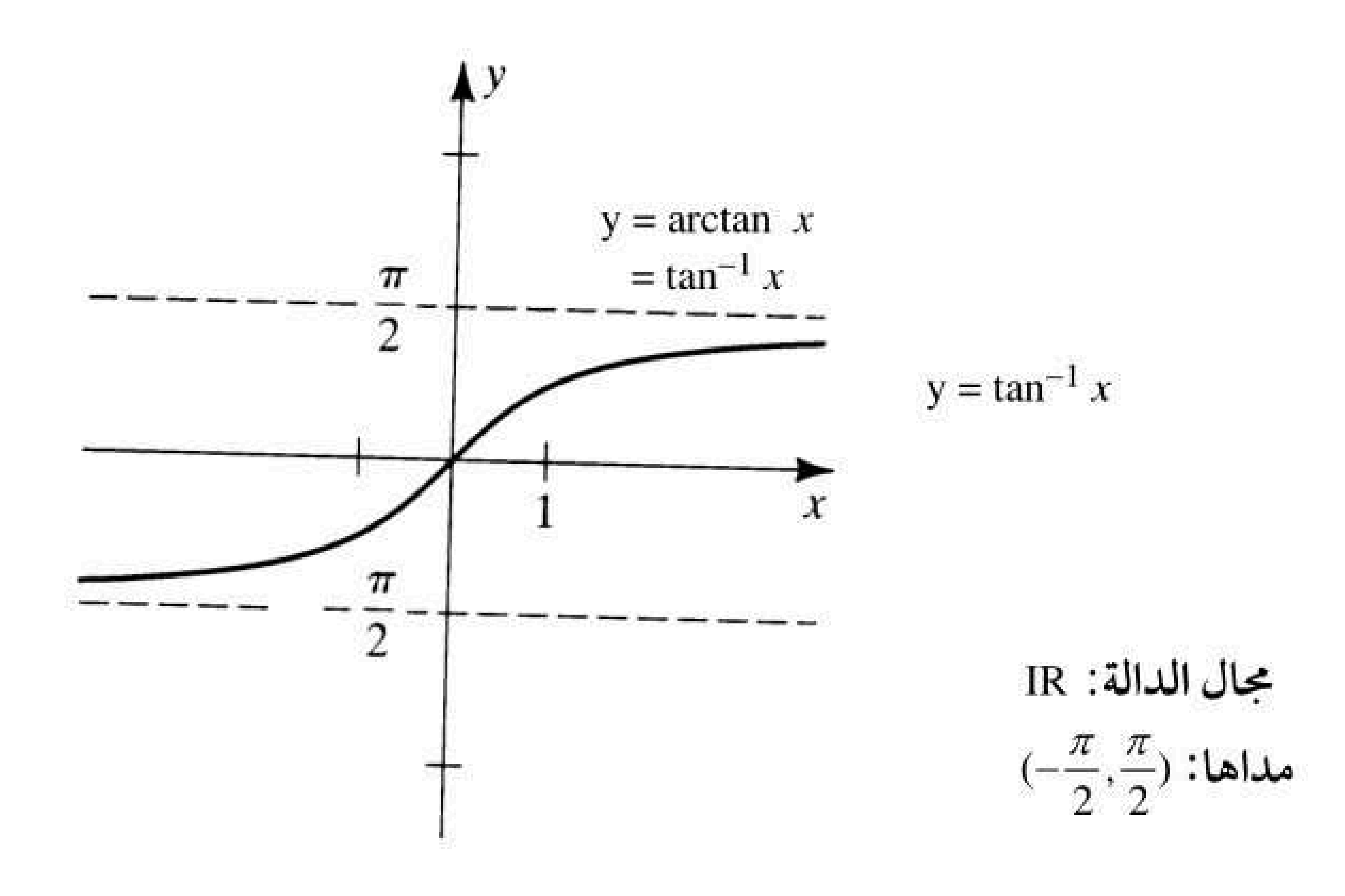
(٦,١٨)

١) $x = \tan y \Leftrightarrow y = \tan^{-1} x$

حيث: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ شكل (٦,١١)

٢) $x = \cot y \Leftrightarrow y = \cot^{-1} x$

حيث $0 < y < \pi$ شكل (٦,١٢)



$y = \tan^{-1} x$

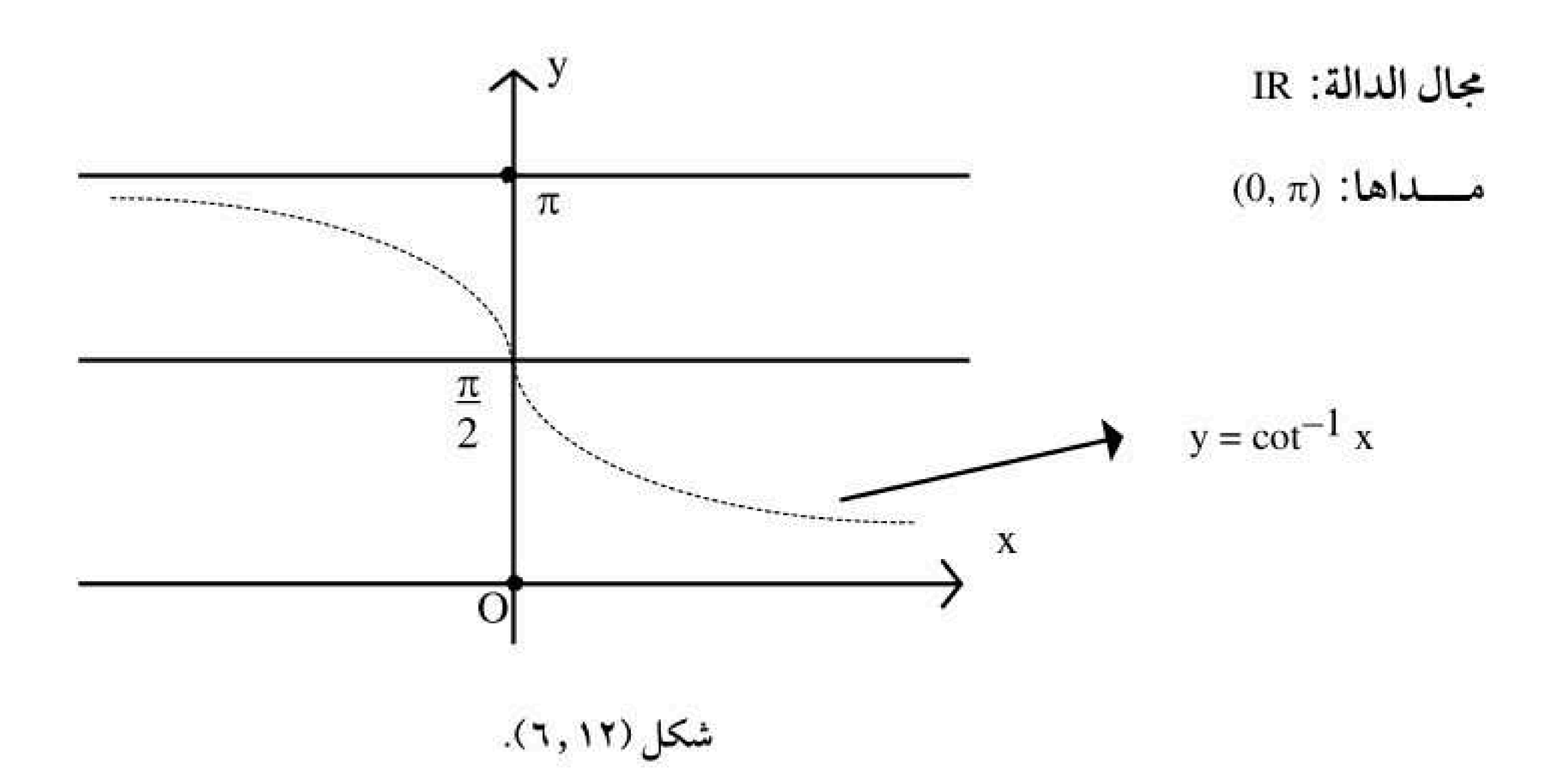
مجال الدالة: IR

مداها: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

شكل (٦,١١).

مجال الدالة: IR

مـــداها: $(0, \pi)$



$y = \cot^{-1} x$

شكل (٦,١٢).

نظريــة (٦, ١٢)

١) $y=\tan^{-1}x, \frac{\pi}{2}>y>-\frac{\pi}{2} \Rightarrow y'=\frac{1}{1+x^2}$

٢) $y=\cot^{-1}x, \pi>y>0 \Rightarrow y'=-\frac{1}{1+x^2}$

البرهـــان

١) $x=\tan y \Leftarrow y=\tan^{-1}x$ (٦, ١٩)

لنشتق طرفي المعادلة (٦, ١٩) بالنسبة للمتغير x، فنجد:

$$1=\sec^2 y\,y'=(1+\tan^2 y)y'$$
$$=(1+x^2)y'$$

(استنادا للمعادلة (٦, ١٩))

ومنه: $y'=\frac{1}{1+x^2}$

٢) بالمثل نبرهن الحالة الثانية.

(د) وأيضا نعــرف دالة القاطــع العكسية $\sec^{-1}$ ودالة قاطع التمام العكسية $\csc^{-1}$ (The inverse cosecant function) بالشكل:

(٦,٢٠)

١) $x=\sec y \Leftrightarrow y=\sec^{-1}x$ شكل (٦, ١٣)

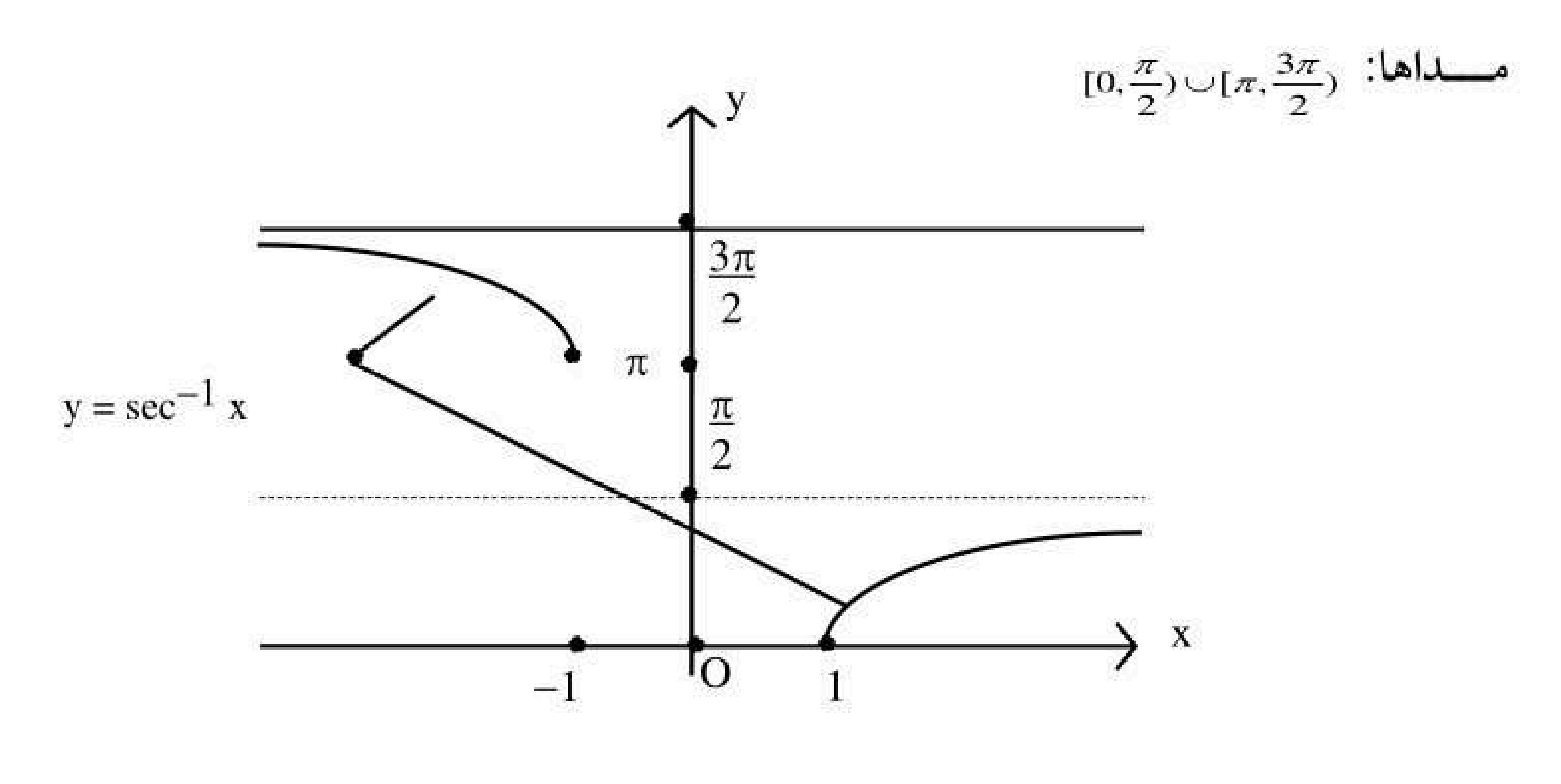
حيث: $0\le y<\frac{\pi}{2}$ و $\pi\le y<\frac{3\pi}{2}$

٢) $x=\csc y \Leftrightarrow y=\csc^{-1}x$

حيث: $0<y\le\frac{\pi}{2}$ و $\pi<y\le\frac{3\pi}{2}$

مجال الدالة: $IR-(-1, 1)=\{x:|x|\geq 1\}$

مـــداها: $[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3\pi}{2})$



شكل (١٣, ٦).

نظريـــة (١٣, ٦)

١) $y=\sec^{-1}x \Rightarrow y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

حيث: $\frac{\pi}{2}>y>0$ و $\frac{3\pi}{2}>y>\pi$

٢) $y=\csc^{-1}x \Rightarrow y'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

حيث: $\frac{\pi}{2}>y>0$ و $\frac{3\pi}{2}>y>\pi$

البرهـــان

لنثبت الفقرة الأولى فقط وبالمثل تُبرهن الثانية.

من الملاحظ أن:

$$x=\sec y \Leftarrow y=\sec^{-1}x \qquad (٦,٢١)$$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x، نجد:

$$1 = \sec y \tan y\, y'$$

ومنه: $y' = \dfrac{1}{\sec y \tan y}$ (٦,٢٢)

لكن: $\tan^2 y = \sec^2 y - 1 \Leftarrow \sec^2 y = 1 + \tan^2 y$ $\Leftarrow$

$\tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1}$ ونهمل إشارة السالب لأن $y \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

إذن: $\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$ (استنادا للعلاقات (٦,٢١)).

ومنه: $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ (استنادا للعلاقة (٦,٢١) وللعلاقة (٦,٢٢)).

مــثــال (٦,١٧)

أوجد مشتقات الدوال المعرفة كالآتي:

١) $f(x) = x \tan^{-1}\sqrt{x}$ ٢) $f(x) = (1 + \cot^{-1} x^2)^{\frac{3}{2}}$

٣) $f(x) = \dfrac{x}{\sec^{-1} x}$ ٤) $f(x) = \sec^{-1} 2x - 2\csc^{-1} 3x$

الحــــل

١) $f'(x) = \tan^{-1}\sqrt{x} + \dfrac{x}{1+x} . \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

٢) $f'(x) = \dfrac{3}{2}(1 + \cot^{-1} x^2)^{\frac{1}{2}} (-\dfrac{1}{1+x^4} . 2x)$

$$= \frac{-3x(1 + \cot^{-1} x^2)^{\frac{1}{2}}}{1 + x^4}$$

٣) $f'(x) = (\sec^{-1} x - \dfrac{x}{x\sqrt{x^2 - 1}}) \dfrac{1}{(\sec^{-1} x)^2}$

$$= \frac{1}{\sec^{-1} x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}(\sec^{-1} x)^2}$$

٤) $f'(x) = \dfrac{2}{2x\sqrt{4x^2 - 1}} + 2\dfrac{3}{3x\sqrt{9x^2 - 1}} = \dfrac{1}{x\sqrt{4x^2 - 1}} + \dfrac{2}{x\sqrt{9x^2 - 1}}$

مــثــال (٦,١٨)

أوجد مشتقات الدوال المعرفة كالآتي:

١) $y = \tan^{-1}(x^2 + 1)$ ٢) $y = \cot^{-1}\sqrt{x + 1}$

٣) $y = x \sec^{-1}(2x + 1)$ ٤) $y = \csc^{-1}(\dfrac{1}{x})$

$(1 > x > 0)$

الحـــل

١) $y=\tan^{-1}(x^2+1) \Rightarrow y'=\dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}$

٢) $y=\cot^{-1}\sqrt{x+1} \Rightarrow y'=\dfrac{-1}{1+x+1}.\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$$=\frac{-1}{2+x}.\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

٣) $y=x\sec^{-1}(2x+1)$

$$y'=\sec^{-1}(2x+1)+x\frac{2}{(2x+1)\sqrt{(2x+1)^2-1}}$$

٤) $y=\csc^{-1}\dfrac{1}{x} \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}.(-\dfrac{1}{x^2})$

$$=\frac{1}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}=\frac{|x|}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(لأن $1>x>0$)

طريقـــة ثانيـــة:

$$y=\csc^{-1}\frac{1}{x} \Rightarrow \csc y=\frac{1}{x} \Rightarrow \sin y=x \Rightarrow y=\sin^{-1}x$$

ومنه: $(1>x>0)\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

مـــثـــال (١٩, ٦)

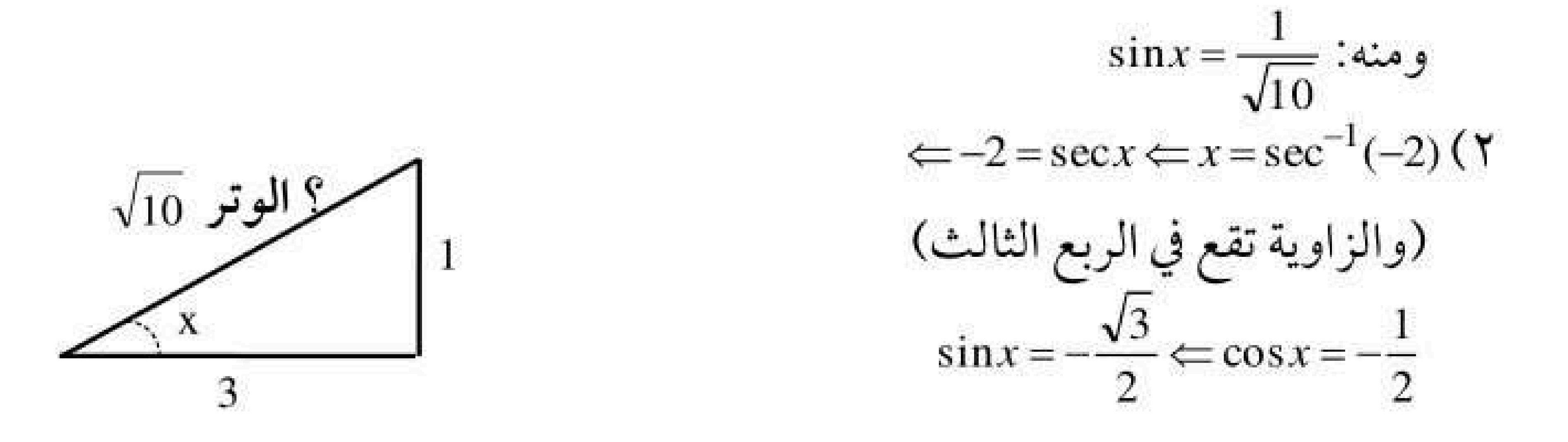
أوجد قيمة كل من:

١) $\sin(\tan^{-1}\frac{1}{3})$ ٢) $\sin(\sec^{-1}(-2))$

الحـــل

١) $x=\tan^{-1}\frac{1}{3} \Leftarrow \tan x=\frac{1}{3}$ (والزاوية x تقع في الربع الأول)

ومنه: $\sin x = \frac{1}{\sqrt{10}}$



٢) $x = \sec^{-1}(-2) \Leftarrow -2 = \sec x \Leftarrow$

(والزاوية تقع في الربع الثالث)

$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٦,١٠) التقريب الخطي
Linear Approximation

لنفرض أن: p(x, f(x)) نقطة محددة من منحني الدالة f المعرف بالمعادلة:

y = f(x)

والمعرف على الفـترة (a,b) شكـل (٦,١٤)، وأن: $Q(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ نقطـة أخـرى مـن المنحني قريبة من الموضع الابتدائي p، حيث Δx التغير الذي طرأ على المتغـير x. بفـرض أن Δy هو التغـير الذي طرأ على المتغير y، فإن:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \tag{٦,٢٣}$$

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x، فإن:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

هذا يعني أن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ قريب جدًّا من $f'(x)$ عندما يكون $|\Delta x|$ صغيرًا جدًّا.

إذن: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$ عندما يكون $|\Delta x|$ صغيرًا جدًّا.

ومنه نحصل على الصيغ المتكافئة الآتية:

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \tag{٦,٢٤}$$

($|\Delta x|$ صغير جدًّا)

تعــريــف (٦,٤)

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x، فإن تفاضل هذه الدالة عند x يُرمز له بالرمز dy ويُعرّف بالصيغة التالية:

$$dy = f'(x)\Delta x \tag{٦,٢٥}$$

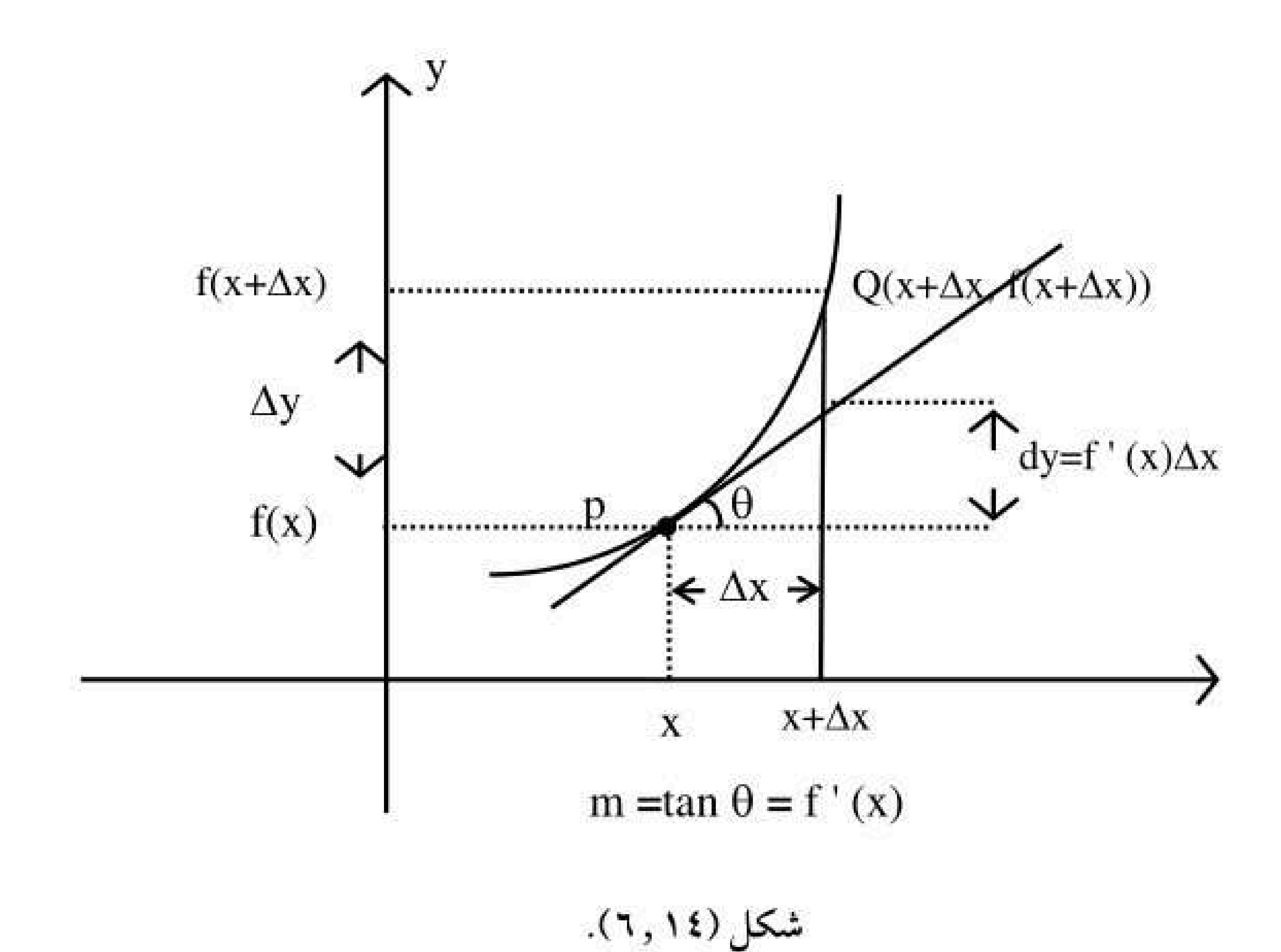
تكتب الصيغة (٦,٢٤) بالشكل:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy$$
($|\Delta x|$ صغير جدًّا)

المقـــدار:

$$L(x) = f(x) + dy \tag{٦,٢٦}$$

نسميه بالتقريب الخطي للمقدار: f(x + Δx) (عندما يكون $|\Delta x|$ صغيرًا جدًّا).



شكل (٦,١٤).

مـــثـــال (٦,١٩)

إذا كانت f دالة معرفة بالشكل: $f(x)=x^3$ ، فأجب عما يأتي:

١) أوجد: dy ، Δy

٢) إذا تغيرت x من القيمة 1 إلى القيمة 1.1، فأوجد:

dy ، Δy ، وتقريبًا خطيًّا للمقدار f(1.1).

الحـــل

١) $dy=f'(x)\Delta x=3x^2\Delta x$

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^3-x^3\\&=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3\\&=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\\&=\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)\end{aligned}$$

٢) $\Delta x=1.1-1=0.1$ ، إذن:

$$\begin{aligned}dy&=3(1)^2(0.1)=0.3\\\Delta y&=0.1(3+0.3+0.01)=0.1(3.31)=0.331\\f(1.1)&\approx L(1)=f(1)+dy=1+0.3=1.3\end{aligned}$$

مـــثـــال (٦,٢٠)

بالاستفادة من الدالة f المعرفة بالمعادلة:

$$y=f(x)=\sqrt{x}$$

أوجد قيمًا تقريبية للأعداد:

$$\sqrt{3.9}،\sqrt{4.1}$$

قارن ما تحصل عليه بما تجده من قيم لهذه الأعداد باستخدام الآلة الحاسبة.

الحـــل

لنغير x من القيمة 4 إلى القيمة 4.1، فنجد: $\Delta x=0.1$

وباستخدام العلاقة (٦,٢٦)، نجد:

$$\begin{aligned} f(4.1) &\approx f(4)+f'(4)(0.1) \\ &\approx \sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}(0.1) \\ &\approx 2+\frac{0.1}{4}=2+0.025 \\ &\approx 2.025 \end{aligned}$$

وباستخدام الآلة الحاسبة، نجد: $\sqrt{4.1}\approx 2.0248456$

وأيضًا:

$$\begin{aligned} f(3.9) &\approx f(4)+f'(4)(-0.1) \\ &\approx 2-0.025 \\ &\approx 1.975 \end{aligned}$$

وباستخدام الآلة الحاسبة، نجد: $\sqrt{3.9}\approx 1.9748417$

مـــثـــال (٦,٢١)

استفد من الدالة f المعرفة بالمعادلة: $y=f(x)=\sin 2x$ لإيجاد قيمة تقريبية للمقدار: $f(0.01)$.

الحــــل

$$\begin{aligned} f(0.01) &\approx f(0)+2\cos 0(0.01) \\ &\approx 0.02 \end{aligned}$$

نتيجـــة (٦,٣)

من العلاقة (٦,٢٥) نجد أن تفاضل المتغير (المستقل) x، هو:

$$dx=\Delta x$$

إذن، تكتب العلاقة (٦,٢٥) على الشكل:

$$dy=f'(x)dx$$

هذا يعني أن تفاضل الدالة f المعرفة بالقاعدة:

$$y=f(x)$$

عند x يساوي مشتقة الدالة عند x مضروبًا بتفاضل المتغير (المستقل) x.

ومنه، فإن:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

فمشتقة الدالة f عند x تساوي قسمة تفاضل الدالة عند x على تفاضل المتغير (المستقل) x.

(٦ , ١١) طريقة نيوتن لإيجاد الجذور التقريبية للدوال

تأمل الدالة التالية:

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

تجد أن f متصلة على IR وأن: $f(0) = -1, f(1) = 1$

حسب نظرية القيمة الوسطى، يوجد جذر c لهذه الدالة يحقق الشرط: $0 < c < 1$.

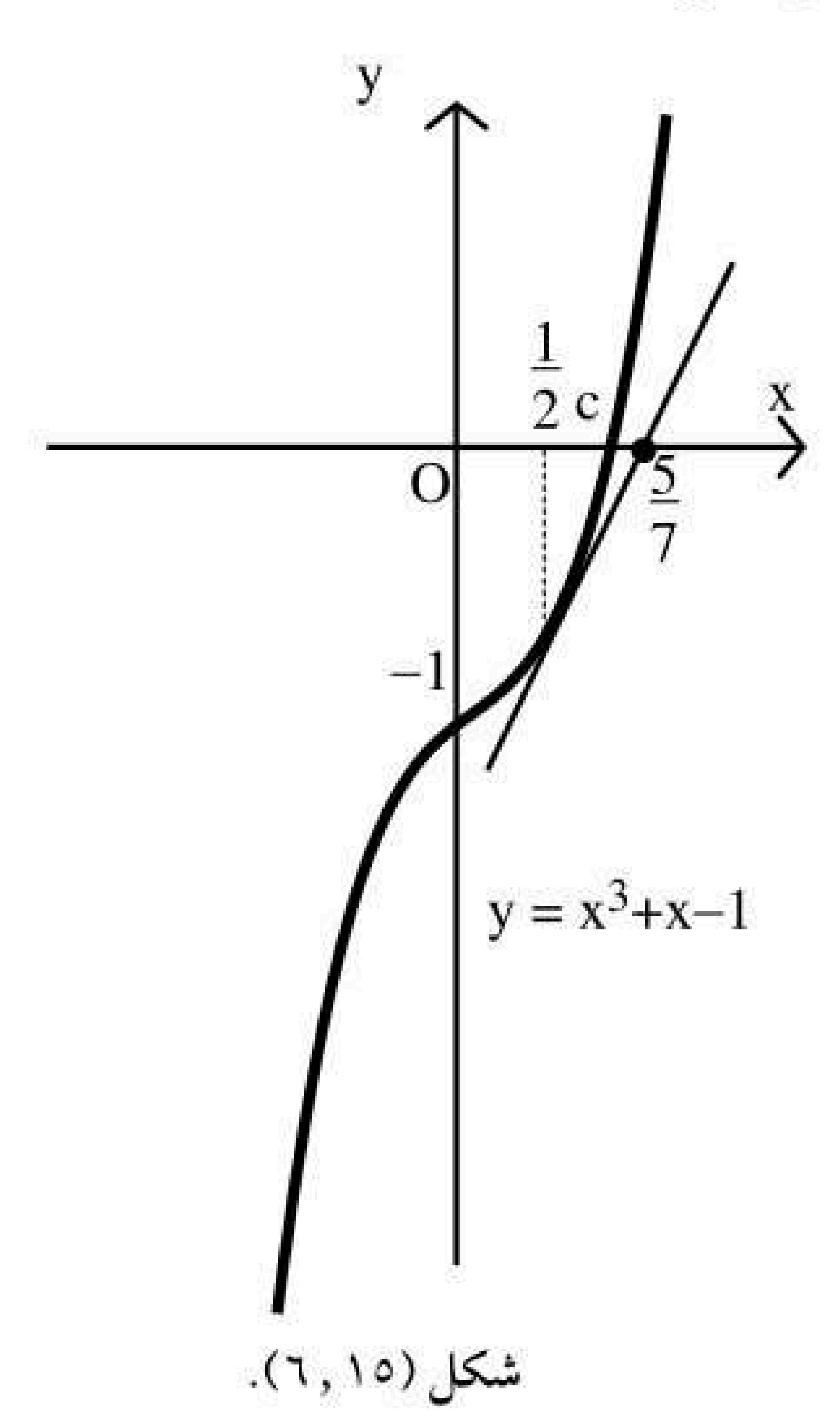
يتضح من بيان الدالة f أن هذا الجذر وحيد شكل (٦ , ١٥). لنختر العدد $x_1 = \frac{1}{2}$ منتصف الفترة (0,1) كتقريب أول لهذا الجذر، ولنكتب معادلة المماس لمنحني الدالة عند النقطة $(x_1, f(x_1))$، فنجد:

$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ وبافتراض x_2 هو الإحداثي السيني لنقطة تقاطع هذا المماس مع المحور x ، فإن:

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

ومنه:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, f'(x_1) \neq 0 \quad (٦ , ٢٦)$$



شكل (٦ , ١٥).

وبما أن: $f'(x) = 3x^2 + 1$ ، فإن:

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{8} \text{ ، } f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

وحسب (٦ , ٢٦)، نجد:

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{3}{8}}{\frac{7}{4}} = \frac{5}{7} \approx 0.7142857$$

لنعتبر x_2 كتقريب ثان للجذر c، ولنكتب من جديد معادلة المماس للمنحني عند النقطة $(x_2, f(x_2))$، فنجد:

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$$

إن الإحداثي السيني لنقطة تقاطع هذا المستقيم مع المحور x هو:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, f'(x_2) \neq 0 \qquad (٦,٢٧)$$

لنعتبر x_3 تقريبًا جديدًا ولنتابع بنفس الأسلوب، فنجد:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, f'(x_n) \neq 0} \qquad (٦,٢٨)$$

وهكذا، فإن:

$$x_3 = \frac{5}{7} - \frac{(\frac{5}{7})^3 + \frac{5}{7} - 1}{3(\frac{5}{7})^2 + 1} = \frac{593}{868} \approx 0.6831797$$

$$x_4 = x_3 - \frac{(x_3)^3 + x_3 - 1}{3(x_3)^2 + 1} \approx 0.6823285$$

$$x_5 = x_4 - \frac{(x_4)^3 + x_4 - 1}{3(x_4)^2 + 1} \approx 0.6823279$$

من الملاحظ أن: $(x_5)^3 + x_5 - 1 \approx 0.0000001$

يمكن أن نبين أنه إذا كان: $x_1 \approx c$ وكانت f'' متصلة بالقرب من c، $f'(c) \neq 0$ ، فإن الأعداد $x_2, x_3, x_4, ...$ **تقترب سريعًا من العدد c.** من الملاحظ أن هذه الشروط محققة فالدالة f دالة كثيرة حدود، $f'(x) > 0$ دومًا، x_1 قريبة من c. من جهة أخرى **للحصول على جذر مقرب إلى K عدد عشري، علينا متابعة العملية السابقة** حتى نحصل على تقريبين متتابعين تكون فيهما الأعداد العشرية الأولى والتي عددها K نفسها في الحالتين.

فإذا أردنا جذرًا للمعادلة مقربًا إلى رقمين عشريين فقط، نتوقف عند x_4 ونحصل على القيمة التقريبية: $c \approx 0.68$

وإن أردنا جذرًا للدالة مقربًا إلى خمسة أرقام عشرية نتوقف عند x_5 لنجد:

$$c \approx 0.68232$$

تمـــاريـــن (٦,١)

أوجد باستخدام التعريف مشتقات الدوال المعرفة كما يلي:

١) $f(x)=x^2+x+1$
٢) $f(x)=\sqrt{x-1}$
٣) $f(x)=\frac{1}{x+2}$
٤) $f(x)=x^3-3x+2$
٥) $f(x)=\frac{x}{3x-2}$
٦) $f(x)=\sqrt{4x^2-x}$
٧) $f(x)=x+\frac{1}{x}$
٨) $f(x)=x^2+\sqrt{1-2x}$
٩) $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$
١٠) $f(x)=x^4+5x$

باستخدام التعريف أوجد مشتقات الدوال المعرفة كما يلي عند النقاط المبينة إن وجدت:

١١) $f(x)=|2x-3|$ عند $x=\frac{3}{2}$

١٢) $f(x)=|x|^2$ عند $x=0$

١٣) $f(x)=\begin{cases}8x-9, x<2\\ 2x^2-1, x\geq 2\end{cases}$ عند $x=2$

١٤) $f(x)=\begin{cases}|x+1|-1, x<0\\ x^2+x, x\geq 0\end{cases}$ عند $x=0$

١٥) إذا كان: $f(x)=\begin{cases}ax^2+b, x\leq 1\\ \frac{1}{x} \quad , x>1\end{cases}$ ، فحدد قيم a,b التي تجعل الدالة f قابلة للاشتقاق عند x = 1

١٦) ادرس قابلية الاشتقاق للدوال المعرفة كما يلي عند النقاط المرافقة:

(أ) $f(x)=|\sin x|$ ، عند $x=\pi$

(ب) $f(x)=\begin{cases}3x+6, x<1\\ x-4, x\geq 1\end{cases}$ ، عند $x=1$

(ج) $f(x)=\begin{cases}x+x^2, x<0\\ x \quad , x\geq 0\end{cases}$ ، عند $x=0$

(د) $f(x)=\begin{cases}3-x^2, x\leq 1\\ \frac{2}{x} \quad , x>1\end{cases}$ ، عند $x=1$

أوجد مشتقات الدوال المعرفة كما يلي (دون استخدام قاعدة السلسلة):

١٧) $f(x)=x^2-2x+1$
١٨) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$
١٩) $f(x)=(2x-3)^2$
٢٠) $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}$
٢١) $f(x)=x(x-1)^2$
٢٢) $f(x)=\frac{1}{(x-3)(x-4)}$
٢٣) $f(x)=x^4+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+1$
٢٤) $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+3}$
٢٥) $f(x)=(x^{-3}+x^2)(\sqrt{x}+5)^2$
٢٦) $f(x)=(3+x^5)(x^3+2)$
٢٧) $f(x)=\frac{(x^4+x^5)(x^2+7)}{(x^2+x)}$
٢٨) $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

٢٩) أوجد ميل المماس للمنحنيات المعرفة في التمارين (١٧)، (٢٤)، (٢٦) عند: x = 1.

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من الدوال المعرفة كما يلي:

٣٠) $y=(2x^3+3x)^5$
٣١) $y=(x^2-\sqrt{x})^3(x^2+1)^2$
٣٢) $y=\frac{x^2+\sqrt{2x-1}}{(x^2+1)^2}$
٣٣) $y=[\sqrt{x}+(x^2-1)^3]^4$
٣٤) $\sqrt{xy}=2\sqrt{y}-2x$
٣٥) $x^3+y^3=1$
٣٦) $(x+y^2)^2-2xy=2$
٣٧) $x^3y+y^3x+xy=3$

٣٨) أوجد ميل المماس للمنحني المعرف في التمرين (٣٤) عند النقطة (1,4) وبالمثل للمنحنيين المعرفين في التمرينين (٣٦)، (٣٧) عند النقطة (1,1).

أوجد $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي:

٣٩) $y=\sin 2x+\cos x$
٤٠) $y=x\sin x+\cos 3x$
٤١) $y=\sin x^2+\sec x$
٤٢) $y=\tan 3x+\cot 2x$
٤٣) $y=\sin^2 x$
٤٤) $y=\tan^3 x$
٤٥) $y=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$
٤٦) $y=(2+\csc x)^3$

٤٧) $y=\sin^3 x\cos^2 x$

٤٨) $y=(\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})^3$

٤٩) $y=\sec[\tan(x^2+1)]$

٥٠) $y=\csc(\cos^2 3x)$

٥١) $y+y\sin x+x\cos y=3$

٥٢) $x+\sin(xy+y)+\cos y^2=5$

٥٣) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$

٥٤) $y=\sqrt{x+\tan 3x+4}$

٥٥) $y=\cot^2(3x+1)+\sec^2(2x+1)$

٥٦) $y=\sqrt{\sec x+\csc x}$

أوجد ميل المماس للمنحنيات المعرفة في التمارين ٥١، ٥٢، ٥٣، ٥٤ عندالنقاط التالية وعلى الترتيب: (0,3)، (4,0)، (4,4)، (0,2).

أوجد مشتقات الدوال المعرفة كما يلي:

٥٧) $y=\sin^{-1}2x+\cot^{-1}3x$

٥٨) $y=\tan^{-1}x^2+\cot^{-1}\frac{1}{x}$

٥٩) $y=x^2\sec^{-1}x+\csc^{-1}2x$

٦٠) $y=\tan^{-1}(3x+2)$

٦١) $y=\sec(\csc^{-1}x)$

٦٢) $y=(\sin^{-1}2x+\cos^{-1}3x)^2$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي:

٦٣) $\sin^{-1}(xy)=y+3$

٦٤) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}y=xy+\frac{\pi}{2}$

٦٥) $y=\sqrt{\sec^{-1}(xy)+x}$

٦٦) $(1+\cot^{-1}x^2)^2=x^2+y^2$

أوجد قيم المقادير التالية:

٦٧) $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3})$

٦٨) $\cos(2\sin^{-1}(-\frac{1}{3}))$

٦٩) $\sin^{-1}1+\cos^{-1}(-1)+\tan(-1)$

٧٠) $\tan(\cos^{-1}\frac{1}{3}+\sin^{-1}\frac{1}{3})$

٧١) $\sec(2\cos(-1)+\tan^{-1}1)$

٧٢) $\sin(2\cos^{-1}(-\frac{1}{4}))$

أوجد المشتقات من الرتب الموضحة للدوال المعرفة كما يلي:

٧٣) $y=x^5+4x^3+3$ من جميع الرتب

٧٤) $y=\frac{1}{x+1}$ من الرتبة n

٧٥) $y = \sin 3x$ من الرتبة n

٧٦) $y = \cos 2x$ من الرتبة n

٧٧) $y = x^{19} + x^{18} + 5x^3 + 1$ من الرتبة 18، 19

٧٨) $y = \sec^3 x$ من الرتبة الثانية

٧٩) أوجد y'' للدوال المعرفة كما يلي:

(أ) $x^2 + y^2 = 1$ (ب) $\sqrt{x+y} + y^2 = 2$ (ج) $\sin^{-1}(xy) + y = 1$

(د) $y = \sec^3 x$ (هـ) $y = \tan^2 2x$ (و) $y = \tan^{-1} x^2$

٨٠) إذا كان: $f'(7) = 5$ ، $g(3) = 7$ ، $g'(3) = 4$ فأوجد: $(fog)'(3)$

٨١) إذا كان: $g'(5) = 3$ ، $g(5) = 4$ ، $g'(4) = 6$ فأوجد: $(gog)'(5)$

٨٢) إذا كانت f معرفة بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, x > 0 \\ L \ , x = 0 \\ K \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

فإن قيمتي K، L اللتين تجعلان f قابلة للاشتقاق عند x = 0 هما:

(أ) K = 0 ،L = 0 (ب) K = 1 ،L = 0

(ج) K = L =1 (د) K = 0 ،L = 1

٨٣) إذا كان: $x = \cos 3t$ ، $y = \sin^2 t$ فإن $\frac{dy}{dx}$ عند $t = \frac{\pi}{4}$ تساوي:

(أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\sqrt{3}$ (ج) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (د) لا شيء مما ذكر

إرشـــاد: $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ حيث $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ، $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

٨٤) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان:

$x = \sin^3 t$ ، $y = \cos^3 t$

$x = t^2 + 5t$ ، $y = t^3 + t^2 + 1$

$(\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}})$

٨٥) إذا كان $y = z^3 + z^2 + 1$ ، $z=\sin 2x+x^2$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$ مستفيدًا من قاعدة السلسلة $(\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx})$.

٨٦) أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي:

(أ) $x=t^3+t^2$ $y=t\cos t$

(ب) $x=\frac{t+1}{t-1}$ $y=\sin t\csc 2t$

(ج) $t=\tan 2x$ $y=\cos^2 3t$

(د) $x=z^2+2z+5$ $y=\sec z^2$

(هـ) $y=\sin 3z$ $z=x\cos 2x$

(و) $y=\sin^2[3(z+1)]$ $z=\tan^3 x$

٨٧) إذا كان حجم الاسطوانة معرَّفًا بالصيغة:

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2 y$$

وكان طول ارتفاع الأسطوانة مقدارًا ثابتًا ويساوي 30 سم، فأوجد

١) ΔV،dV

٢) إذا تغيرت x من القيمة 7 إلى القيمة 7.005، فأوجد تقريبًا خطيًّا للمقدار: $V(7.005)$. ما هو الخطأ المرتكب في أخذ هذه القيمة.

٨٨) إذا كان حجم الكرة يعطى بالصيغة:

$$V=\frac{4}{3}\pi x^3$$

حيث x طول نصف قطر الكرة، فأوجد:

١) ΔV،dV

٢) إذا تغيرت x من القيمة 11 إلى القيمة 11.003 ، فأوجد تقريبًا خطيًّا للمقدار: $\sqrt{(11.003)}$.
ما هو الخطأ المرتكب في أخذ هذه القيمة.

٨٩) استعن بالدالة f المعرفة بالشكل:

$$f(x) = x^2 - n$$

حيث: n = 3, 5, 7, 11

لإيجاد جذور الأعداد التالية:

$\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7},\sqrt{11}$ ، مقربة إلى خمسة أرقام عشرية مطبقًا طريقة نيوتن.

٩٠) أوجد جذور المعادلات التالية الواقعة في الفترات المرافقة:

(أ) $x^4 + x - 1 = 0, [0,1]$ مقربة إلى أربعة أرقام عشرية.

(ب) $x^3 - x^2 - 2 = 0, [1,2]$ مقربة إلى أربعة أرقام عشرية.

(ج) $x - \cos x = 0, [0,\frac{\pi}{3}]$ مقربة إلى عشرين رقمًا عشريًّا.

(د) $x^4 - 100 = 0, [0,4]$ مقربة إلى ستة أرقام عشرية.

الفصل السابع

خواص الدوال القابلة للاشتقاق
THE PROPERTIES OF THE DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

(١ , ٧) القيم القصوى للدوال

تعـــريـــف (١ , ٧)

لتكن f دالة معرفة على الفترة I. نقول إن الدالة f:

١) متزايدة (Increasing) على I، إذا تحقق التالي:

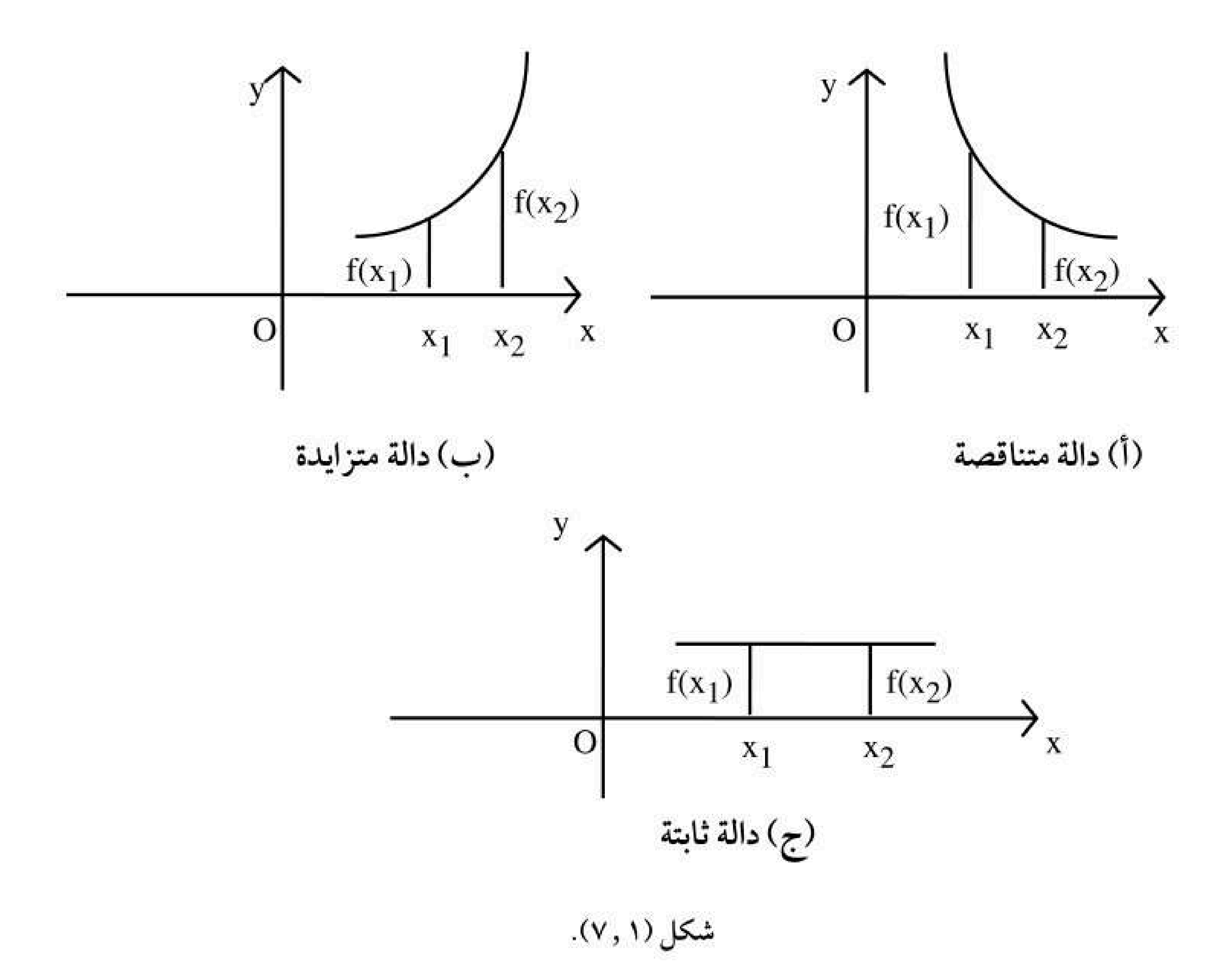
$$\forall x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

٢) متناقصة (decreasing) على I، إذا تحقق التالي:

$$\forall x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

٣) ثابتة (Constant) على I، إذا تحقق التالي:

لكل $x_1, x_2 \in I$ ، فإن: $f(x_1) = f(x_2)$



شكل (١ , ٧).

تعـــريـــف (٢ , ٧)

نقول إن للدالة f قيمة عظمى (Maximum Value) (مطلقة) عند نقطة c من مجالها S، إذا كان:

f(c) أكبر قيمة للدالة على مجالها S، أي أن:

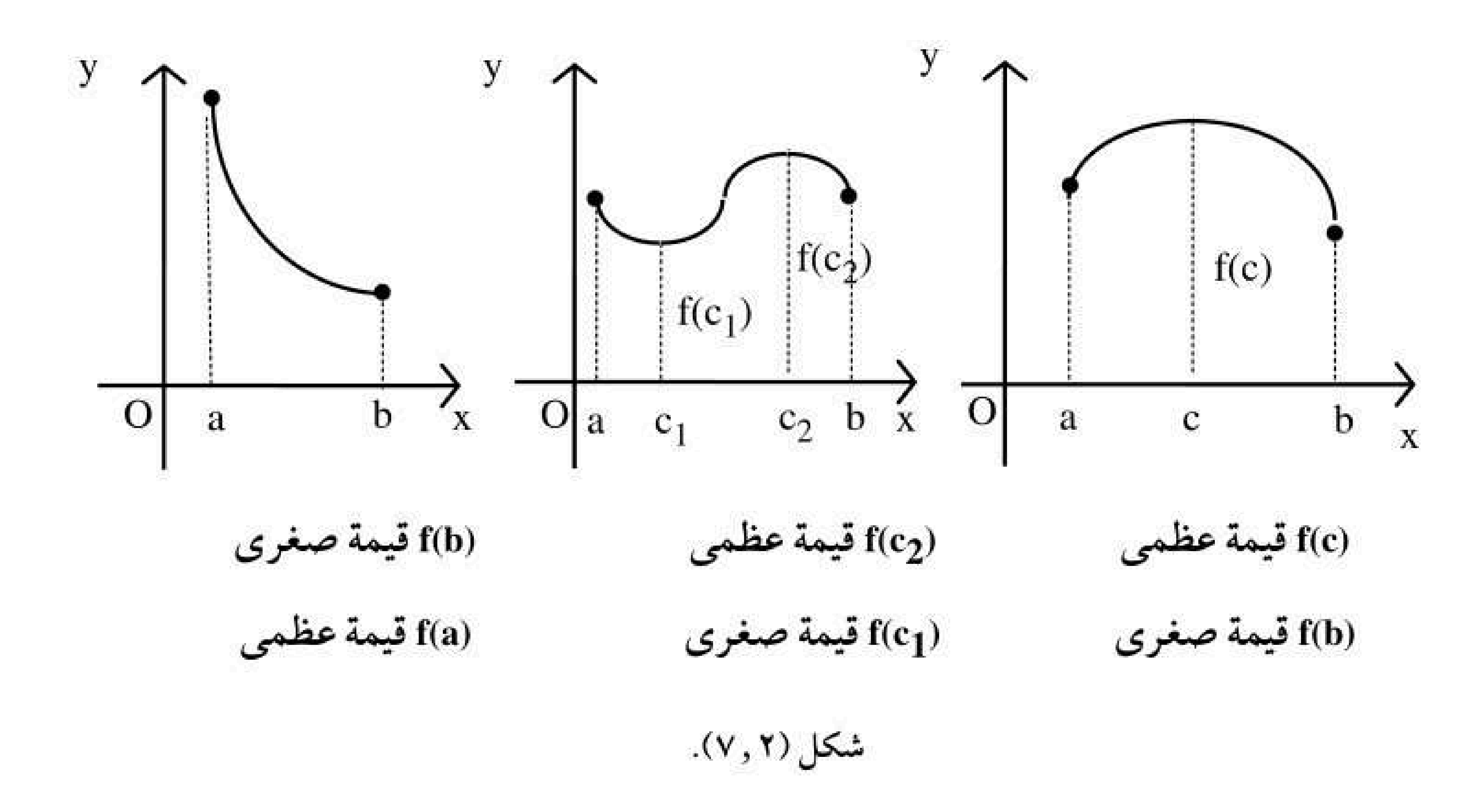
$$f(x) \leq f(c) \text{ لكل } x \in S$$

وقيمة صغرى (Minimum Value) (مطلقة)، إذا كان:

f(c) أصغر قيمة للدالة على مجالها أي أن:

$$f(x) \geq f(c) \text{ لكل } x \in S$$

مثل هذه القيم تُسمى بالقيم القصوى للدالة على مجالها.



شكل (٢, ٧).

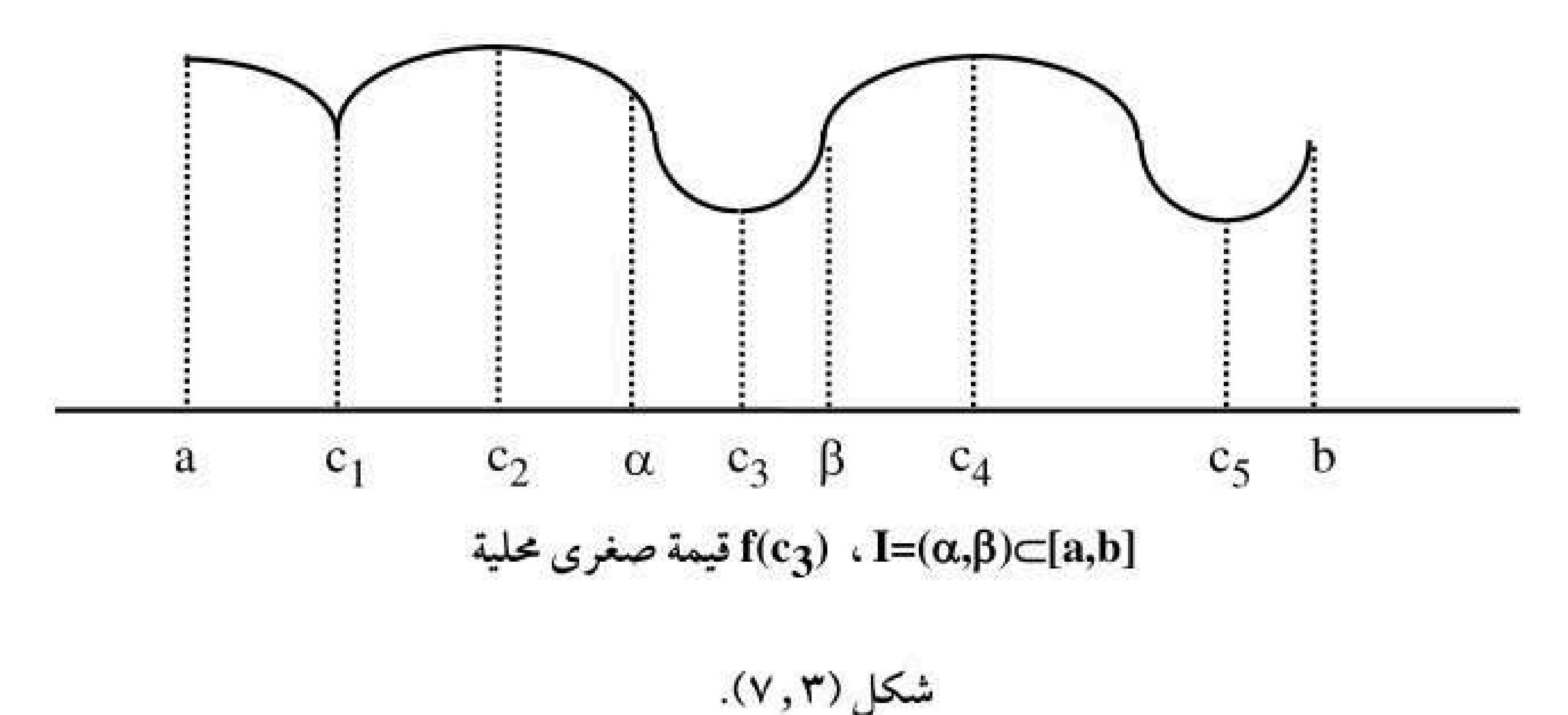
تعــريــف (٣, ٧)

١) نقول إن للدالة f قيمة عظمى محلية f(c) عند نقطة c من مجالها S، إذا وجدت فترة مفتوحة $I \subset S$ تنتمي إليها النقطة c ($c \in I$) ، بحيث يكون:

$$f(x) \leq f(c) \text{ لكل } x \in I$$

٢) نقول إن للدالة f قيمة صغرى محلية f(c) عند نقطة c من مجالها S، إذا وجدت فترة مفتوحة $I \subset S$ تنتمي إليها النقطة c ($c \in I$) ، بحيث يكون:

$$f(x) \geq f(c) \text{ لكل } x \in I$$



$f(c_3)$ قيمة صغرى محلية ، $I=(\alpha,\beta)\subset[a,b]$

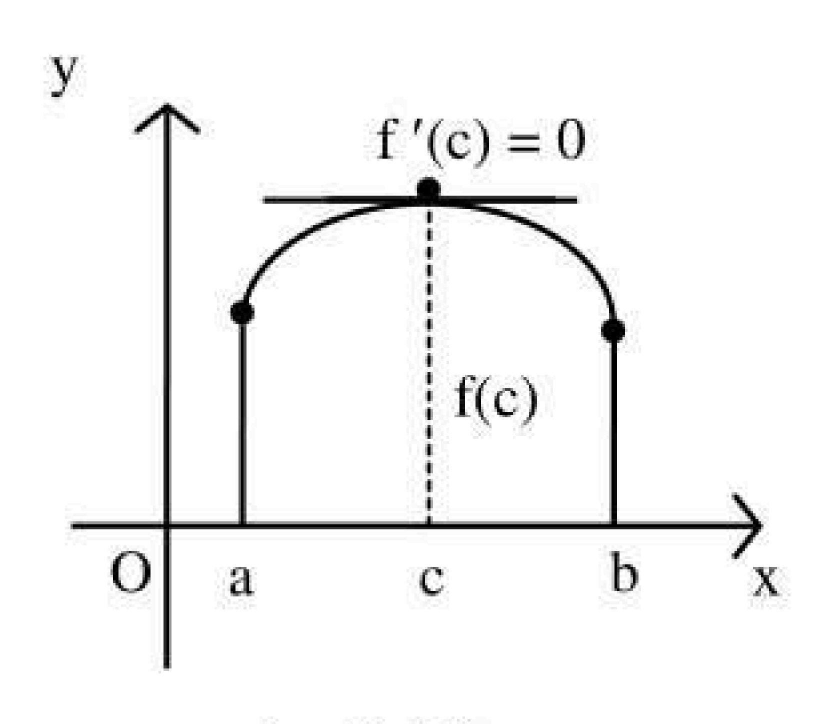
شكل (٣ , ٧).

$f(c_1)$ ، $f(c_2)$، $f(c_3)$، $f(c_4)$، $f(c_5)$ قيم قصوى محلية على S.

(نسمي القيم العظمى والصغرى المحلية بالقيم القصوى المحلية)

نظـريــة (١ , ٧)

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة (a, b) تنتمي إليها النقطة c، وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند c، فإن: $f'(c) = 0$.

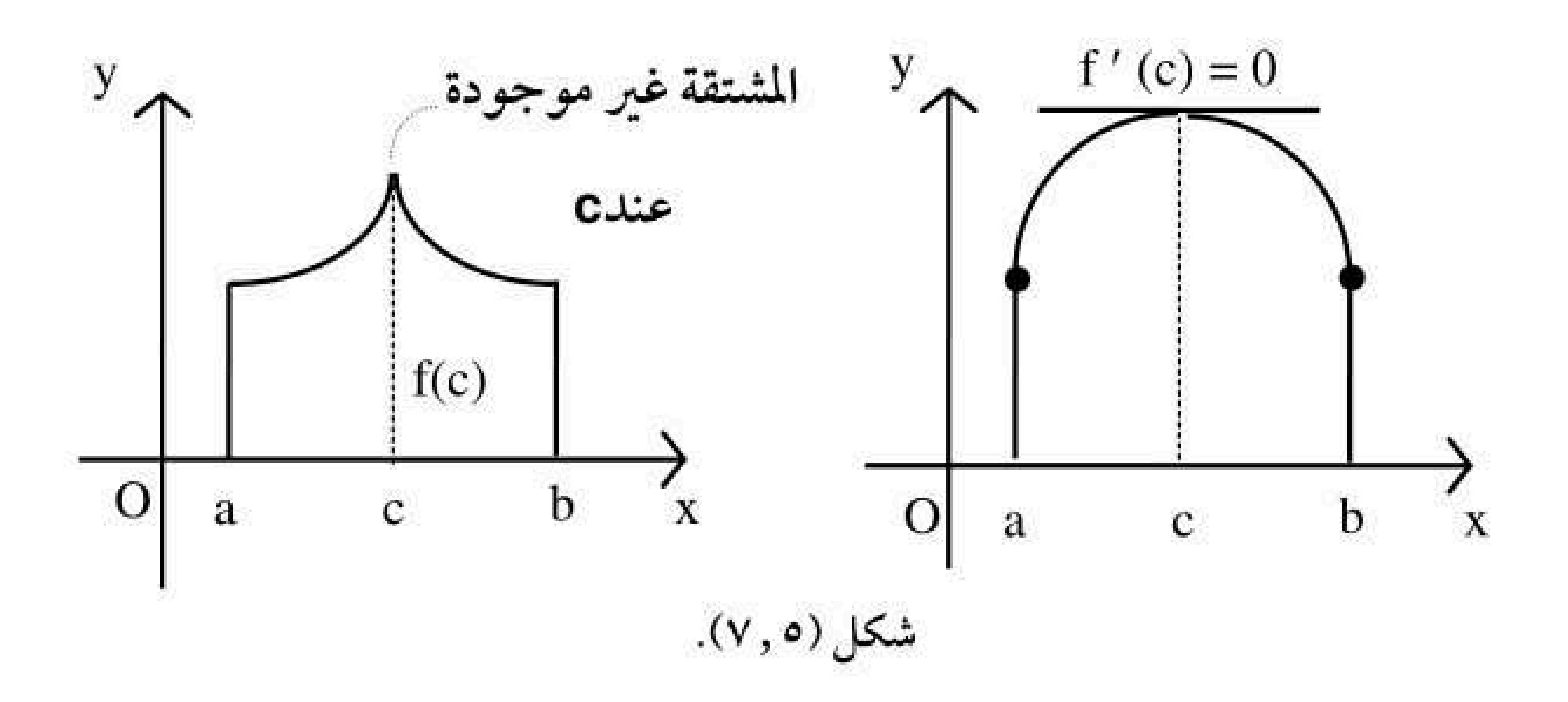


شكل (٤ , ٧).

نظـريــة (٢ , ٧)

إذا كان للدالة f قيمة قصوى محلية عند النقطة c من الفترة (a, b) (المحتواة في مجال الدالة f)، فإن:

$f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.



شكل (٧, ٥).

نتيجـــة (٧, ١)

إذا كانت الدالة f متصلة على فترة مغلقة [a, b] وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند نقطة $c \in (a, b)$، فإن: $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

تعـــريــف (٧, ٤)

نقول إن العدد c من مجال الدالة f عدد حرج لهذه الدالة، إذا كانت $f'(c) = 0$ أو كانت $f'(c)$ غير موجودة.

(٧, ٢) النظرية الأساسية للاتصال

نظـــريـــة (٧, ٣) (النظرية الأساسية للاتصال)

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة [a, b]: فإن للدالة على هذه الفترة قيمة عظمى (مطلقة) M وقيمة صغرى (مطلقة) m. أي يوجد عددان α, β ينتميان للفترة [a, b] بحيث يكون:

$$m = f(\alpha) \quad , \quad M = f(\beta)$$

لإيجاد m, M:

١) نبحث عن الأعداد الحرجة للدالة f التي تنتمي للفترة [a, b] وقيم الدالة عند هذه الأعداد.

٢) نحسب قيمتي الدالة عند طرفي الفترة: f(a), f(b)

٣) نقارن بين هذه القيم فأكبرها هو M وأصغرها هو m.

مـثـال (١ , ٧)

أوجد القيم القصوى للدوال المعرفة بمعادلاتها التالية على الفترات المرافقة:

١) $f(x) = x^4 - 2x^2$ $\qquad [-1, 2]$

٢) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2x$ $\qquad [0, \pi]$

٣) $f(x) = 3x^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$ $\qquad [0, 1]$

٤) $f(x) = \tan^{-1} x^2$ $\qquad [-1, 1]$

الحـــل

١) (أ) جذور المشتقة:

$$x = 0, x = \pm 1 \Leftarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftarrow f'(x) = 4x^3 - 4x = 0$$

الأعداد الحرجة المنتمية للفترة [-1, 2]	1	0	−1
قيمة الدالة	f(1) = −1	f(0) = 0	f(−1)= −1

(ب)قيمتا الدالة عند طرفي الفترة: f(2) = 8 , f(−1) = −1

(ج)أكبر الأعداد:8 ,0 ,1- هو:8 = M (القيمة العظمى)

أصغر الأعداد:8 ,0 ,1- هو:1- = m (القيمة الصغرى)

٢) (أ)جذور المشتقة:

$x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi \Leftarrow f'(x) = -\sin 2x = 0$ وهي التي تنتمي للفترة

الأعداد الحرجة المنتمية للفترة	π	$\frac{\pi}{2}$	0
قيمة الدالة	$f(\pi) = \frac{3}{2}$	$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$	$f(0) = \frac{3}{2}$

(ب) قيمتا الدالة عند طرفي الفترة: $f(\pi)=\frac{3}{2}$ ، $f(0)=\frac{3}{2}$

(ج) أكبر الأعداد: $\frac{1}{2},\frac{3}{2}$ هو: $M=\frac{3}{2}$

وأصغرها: $m=\frac{1}{2}$

٣) (أ)جذور المشتقة: $f'(x)=x^{-\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}+x^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{1+x}{x^{\frac{2}{3}}}$ هي: x = -1

المشتقة **غير موجودة عندما**: x = 0 (0 ينتمي لمجال الدالة)

العددان الحرجان هما: -1 ,0 والمنتمي للفترة [0, 1] هو الصفر فقط وقيمة الدالة عند الصفر:

$$\boxed{f(0)=0}$$

(ب) قيمتا الدالة عند طرفي الفترة: $\boxed{f(1)=3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}}$ و $\boxed{f(0)=0}$

(ج) أكبر الأعداد هو: $M=\frac{15}{4}$ (القيمة العظمى)

أصغر الأعداد هو: $m=0$ (القيمة الصغرى).

٤)(أ) جذور المشتقة: $x=0 \Leftarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^4}.2x=0$ وهو ينتمي للفترة [-1, 1].

قيمة الدالة عند x = 0 هي $\boxed{f(0)=\tan^{-1}0=0}$

(ب) قيمتا الدالة عند طرفي الفترة: $\boxed{f(1)=\frac{\pi}{4}}$ $\boxed{f(-1)=\frac{\pi}{4}}$

(ج) $M=\frac{\pi}{4}$ و $m=0$

تمـــاريـــن (١ , ٧)

أوجد الأعداد الحرجة للدوال المعرفة كما يلي والواقعة داخل الفترات المرافقة، ثم أوجد القيم العظمى والصغرى (المطلقة) لهذه الدوال على هذه الفترات:

١) $f(x)=x^2-2x$ $[-1, 2]$

٢) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+1$ $[-1, 1]$

٣) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+2$ $[-1, 3]$

٤) $f(x)=x^{\frac{1}{5}}+4$ $[-1, 2]$

٥) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ $[3, 5]$

٦) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+6}$ $[0, 2]$

٧) $f(x)=\sin x+\cos x$ $[-\pi, \pi]$

٨) $f(x)=\sin^3 x$ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

٩) $f(x)=2+x^{\frac{2}{3}}$ $[-1, 1]$

١٠) $f(x)=\cos 2x+2\sin x$ $[0, 2\pi]$

١١) $f(x)=(x-2)\sqrt{4-x^2}$ $[0, 2]$

١٢) $f(x)=\sin x-\cos x$ $[0, 2\pi]$

١٣) $f(x)=x+\sqrt{1-x}$ $[0, 1]$

١٤) $f(x)=5x^{\frac{1}{5}}+\frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}$ $[0, -1]$

١٥) $f(x)=\tan^{-1} x^2$ $[-1, 1]$

١٦) $f(x)=x-\sin x$ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

(٣ , ٧) نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة

(Rolle'sTheoremand The Mean Value Theorem)

نظرية (٤ , ٧) (نظرية رول)

إذا كانت الدالة f:

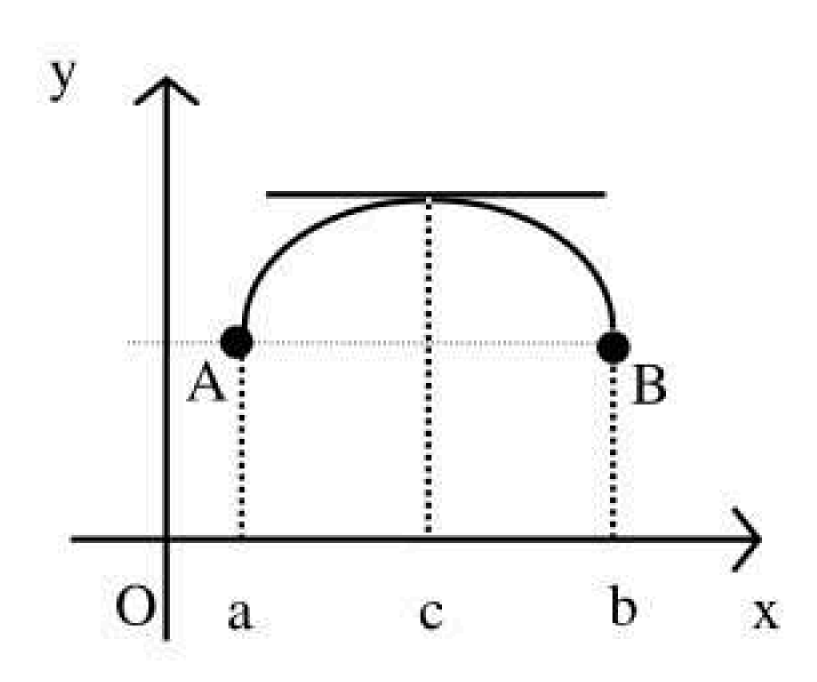
١) متصلة على الفترة المغلقة [a, b]

٢)وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b)

٣)وإذا كان: f(a) = f(b) .

فلابد من وجود نقطة واحدة c على الأقـل: $c \in (a, b)$ بحيث يكون:

$$f'(c)=0$$



المماس عند ((c, f(c)) يوازى محور السينات

شكل (٦ , ٧).

مـثـــال (٢, ٧)

برهن أن الدالتين التاليتين تحققان نظرية رول، ثم أوجد قيم c التي تحقق هذه النظرية.

١) $f(x) = x^3 - x$ $\quad [-1, 1]$

٢) $f(x) = 1 - \cos 3x$ $\quad [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

الحـــل

١) الدالة متصلة على [1 ,1−] لأنها كثيرة الحدود، وهي قابلة للاشتقاق على (1 ,1−) لنفس السبب، وعند طرفي الفترة: f(1) = f(−1) =0. إذن شروط رول محققة. فلابد من وجود نقطة واحدة c على الأقل بحيث يكون:

$$f'(c) = 0$$

وبما أن: $f'(x) = 3x^2 - 1$، فإن: $f'(c) = 0 \Leftarrow$

$3c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ والجذران مقبولان: $\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1,1)$

٢)الدالة f متصلة على $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ لأنها مجموع دوال متصلة، وقابلة للاشتقاق على $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ لأنها مجموع دوال قابلة للاشتقاق، وعند طرفي الفترة: $f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{\pi}{2}) = 1$ فشروط رول محققة. فلابد من وجود عدد واحد c على الأقل ينتمي للفترة $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$، بحيث يكون: $f'(c) = 0$

لكن: $f'(x) = +3\sin 3x$، إذن:

$$f'(c) = 0 \Rightarrow \sin 3c = 0 \Rightarrow 3c = \pi n \Rightarrow$$
$$c = \frac{\pi n}{3}, n \in Z \text{ والمقبول: } c = \frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$$



نظريـــة (٥, ٧) (نظرية القيمة المتوسطة)

إذا كانت الدالة f:

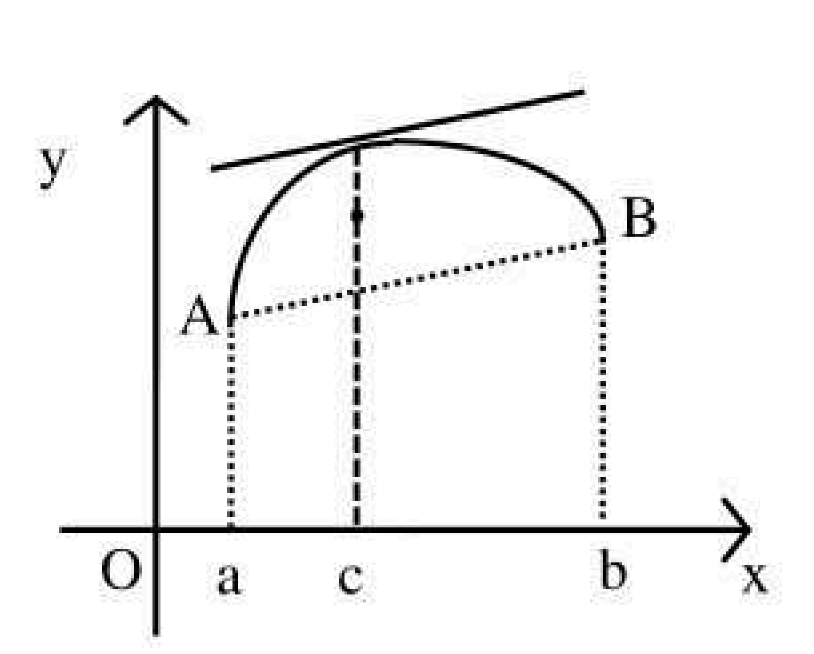
١) متصلة على الفترة المغلقة [a, b]

٢) وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b) .

فلابد من وجود نقطة واحدة c على الأقل:

c ∈ (a, b) بحيث يكون:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



المماس عند ((c , f(c)) يوازي AB

شكل (٧, ٧).

البـــرهـــان

لنشكل الدالة التالية:

$$g(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)]$$

من الملاحظ أن هذه الدالة متصلة على [a, b] لأنها مجموع دوال متصلة. وهي قابلة للاشـــتقاق على (a, b) لأنها مجموع دوال قابلة للاشتقاق، ومشتقتها تساوي:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

فضلا على ذلك فإن: $g(a) = g(b) = 0$

فشروط نظرية رول محققة، إذن لابد من وجود نقطة واحدة c على الأقل بحيث يكون:

$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{حيث } c \in (a, b) \qquad (٧ , ١)$$

من الملاحظ أن المقدار: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ هو ميل الوتر AB، وأن $f'(c)$ هو ميل المماس للمنحني عند النقطة $(c, f(c))$. إذن الصيغة (١ , ٧) تعني تساوي هذين المقدارين.

والتفســـير لذلـــك أن الوتـــر AB يـــوازي المماس للمنحني الذي معادلتـــه $y = f(x)$ عند النقطة $(c, f(c))$.

مــثـــال (٧ , ٣)

بين فيما إذا كانت الدوال المعرفة فيما يلي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترات المرافقة. ثم أوجد قيم c في حال تحققها.

١) $f(x) = |1 - x^2| \qquad [-1, 1]$

٢) $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, x \le 1 \\ \frac{2}{x}, x > 1 \end{cases} \qquad [0, 2]$

الحـــــل

١) من الملاحظ أن: $1 - x^2 \ge 0$ على الفترة $[-1, 1]$

إذن: $|1 - x^2| = 1 - x^2$

وبما أن الدالــة: $f(x)=1-x^2$ متصلة على $[-1,1]$ وقابلة للاشتقاق على $(-1,1)$ لأنها كثـــيرة حدود فإن شـــروط النظريـــة محققـــة. إذن لابـــد من وجود $c \in (-1,1)$ بحيث يكون:

$$\Leftarrow \frac{0-0}{2} = -2c \Leftarrow \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = -2c$$

$c=0 \in (-1,1)$. لاحظ أن شروط رول أيضًا محققة هنا.

٢) من الملاحظ أن الدالة f متصلة عن يمين $x = 1$ لكونها دالة كسرية بسطها الدالة الثابتة ومقامها كثيرة حدود والمقام لا يساوي الصفر.وهي عن يسار $x = 1$ كثيرة حدود. إذن هي متصلة على $[0,2]-\{1\}$. ولنفس السبب قابلة للاشتقاق على $(0,2)-\{1\}$. لندرس اتصال الدالة وقابليتها للاشتقاق عند $x = 1$:

(أ) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x} = 2$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (3-x^2) = 2$$

$$f(1)=2$$

إذن الدالة متصلة عند $x = 1$

(ب) قابلية الاشتقاق: $f'(x) = \begin{cases} -2x, x<1 \\ -\frac{2}{x^2}, x>1 \end{cases}$

وبما أن: $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{-2}{x^2} = -2$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -2x = -2$$

فإن الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = 1$.

فالدالة محققة لشرطي نظرية القيمة المتوسطة.

إيجـــاد قيم c: $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(c)$

أو:

$$f'(c) = -1 \Leftarrow \frac{\frac{2}{2}-3}{2-0} = f'(c)$$

(٢, ٧)

إذا أخذنا الدالة f (من أجل $x < 1$)، وبالاستفادة من (٢ , ٧)، نجد: $f'(c) = -2c$

بالتالي: $-2c=-1 \Leftarrow c=\frac{1}{2}$، لاحظ أن: $\frac{1}{2} \in (0,2)$

إذا أخذنا الدالة f (من أجل $x > 1$)، وبالاستفادة من (٢ , ٧)، نجد: $f'(c) = \frac{-2}{c^2}$

بالتالي: $\frac{-2}{c^2} = -1 \Leftarrow c = \pm\sqrt{2}$ والمقبول هو $c = \sqrt{2} \in (0,2)$

نظريــة (٦.٧)

١) إذا كانت: $f'(x) = 0$ لكل x ينتمي للفترة (a,b)، فإن:

$f(x) = c$ على هذه الفترة.

٢) إذا كانت: $f'(x) = g'(x)$ لكل x ينتمي للفترة (a,b)، فإن:

$f(x) = g(x) + c$ (c مقدار ثابت)

البرهـــان

١) حسب نظرية القيمة المتوسطة وبفرض أن x_1 , x_2 أية نقطتين من هذه الفترة، فإن:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 (c \in (x_1, x_2))$$

(طبقنا النظرية على الفترة $[x_1,x_2]$ والمشتقة تساوي الصفر على هذه الفترة)

إذن: $f(x_2) = f(x_1)$ لكل $x_1, x_2 \in (a,b) \Leftarrow f(x) = c$

٢) لنضع: $h(x) = f(x) - g(x) \Leftarrow h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$

لكل $x \in (a,b)$. إذن حسب (١) فإن: $h(x) = c \Leftarrow f(x) = g(x) + c$

تمـــاريـــن (٢ , ٧)

بيّن أن الدوال التالية المعرفة كما يلي تحقق شروط نظرية رول على الفترات المرافقة، ثم أوجد جميع قيم c المحققة لهذه النظرية:

١) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ $[0,2]$

٢) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ $[0,\sqrt{3}]$

٣) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

٤) $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ $[-1,1]$

٥) $f(x) = \sin 3x$ $[0,\frac{\pi}{3}]$

٦) $f(x)=\sin^3 2x$ $\quad [0,\frac{\pi}{2}]$

٧) $f(x)=x^{\frac{8}{5}}$ $\quad [-1,1]$

بيِّن أن الدوال التالية المعرفة كما يلي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترات المبينة، ثم أوجد جميع قيم c المحققة للنظرية:

٨) $f(x)=x^3-2x^2+1$ $\quad [0,1]$

٩) $f(x)=|x-1|$ $\quad [2,4]$

١٠) $f(x)=\frac{x}{x+1}$ $\quad [1,2]$

١١) $f(x)=1+x^{\frac{4}{3}}$ $\quad [-1,1]$

١٢) $f(x)=\sin 2x$ $\quad [0,\frac{\pi}{4}]$

حدد فيما يلي فيما إذا كانت الدوال المعرفة كما يلي تحقق شروط نظرية رول على الفترات المرافقة، ثم أوجد مجموعة قيم c في حال تحققها:

١٣) $f(x)=|1-x^2|$ $\quad [-1,1]$

١٤) $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$ $\quad [-3,3]$

١٥) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ $\quad [-1,1]$

١٦) $f(x)=\frac{1}{1-\cos x}$ $\quad [-\pi,\pi]$

١٧) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ $\quad [\frac{1}{3},3]$

١٨) $f(x)=x^2+\sqrt{1-x^2}$ $\quad [-1,1]$

حدد فيما يلي إذا كانت الدوال المعرفة كما يلي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة، ثم أوجد مجموعة قيم c حال تحققها:

١٩) $f(x)=\frac{1}{x^3-1}$ $\quad [1,4]$

٢٠) $f(x)=|x|^3$ $\quad [-1,3]$

٢١) $f(x)=\begin{cases} x+x^2, & x<0 \\ x, & x\geq 0 \end{cases}$ $\quad [-1,1]$

٢٢) $f(x)=\begin{cases}3-x^2, x\le 1\\ \frac{2}{x}, x>1\end{cases}$ $[-1,2]$

٢٣) أوجد قيمة K التي تجعل الدالة f المعرفة بالمعادلة:

$f(x) = \cos x + K\sin x$

تحقق شروط نظرية رول على الفترة $[0,\frac{\pi}{4}]$

٢٤) أوجد قيمة K التي تجعل الدالة f المعرفة بالمعادلة:

$$f(x)=\begin{cases}K-x^2, x\le 1\\ \frac{2}{x}, x>1\end{cases}$$

تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,2]$.

(٤ , ٧) اختبار المشتقة الأولى

The First Derivative Test

نظريــة (٧ , ٧)

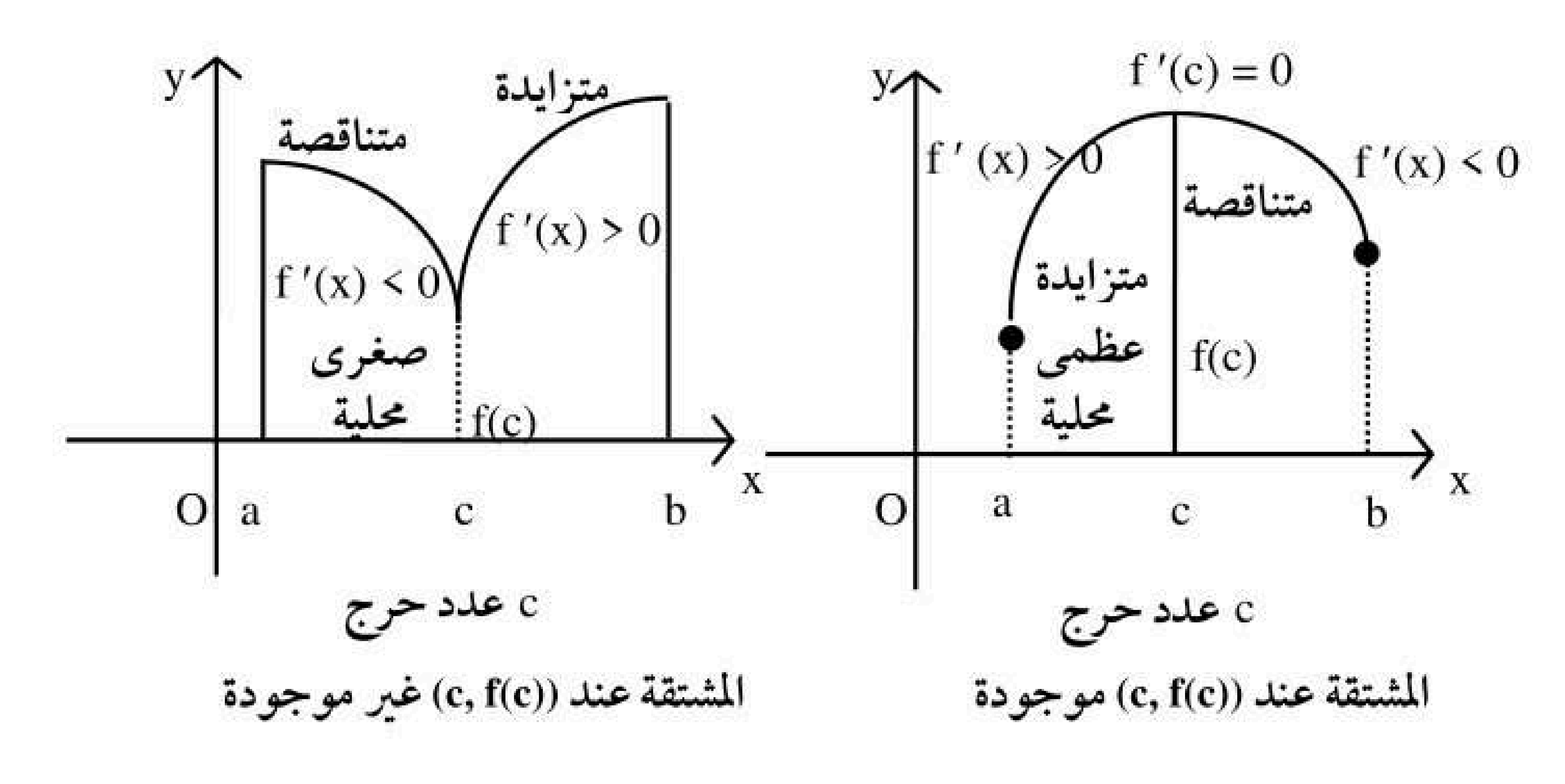
إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b)، فإن الدالة f:

١) تكون متزايدة على $[a,b]$، إذا كانت:

$f'(x) > 0$ لكل $x \in (a,b)$

٢) تكون متناقصة على $[a,b]$، إذا كانت:

$f'(x) < 0$ لكل $x \in (a,b)$



شكل (٨ , ٧).

البرهـــان

نكتفي بالبرهان على الفقرة الأولى، وبالمثل نبرهن الثانية.

نفرض أن x_1, x_2 نقطتان اختياريتان تنتميان للفترة [a, b]، وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[x_1, x_2]$ (مع ملاحظة أن الدالة f تحقق شروط هذه النظرية على هذه الفترة)، نجد:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c), c \in (x_1, x_2)$$

لكنّ: $x_2 > x_1$ و $f'(c) > 0$ ، إذن:

$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ ، هذا يعني أن الدالة f متزايدة على الفترة [a, b].

اختبار المشتقة الأولى

إذا كانت f:

١)متصلة عند عددها الحرج (Critical number) c.

٢)وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b) التي تحوي c (وليست بالضرورة قابلة للاشتقاق عند c)، فإن:

١)f(c) قيمة عظمى محلية للدالة f، إذا غـيرت ′f إشـــارتها حول c من موجب إلى سالب.

إشارة المشتقة ′f

+	c	−
↗		↘

٢)f(c) قيمة صغرى محلية للدالة f، إذا غيرت ′f إشارتها حول c من سالب إلى موجب.

إشارة المشتقة ′f، شكل (٧ , ٨)

−	c	+
↘		↗

٣)f(c) ليست قيمة قصوى محلية إذا لم تغير المشتقة إشارتها حول c سواء كانت المشتقة عند c موجودة أو غير موجودة (Not exist).

مـــثـــال (٤ , ٧)

أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم العظمى والصغرى المحلية للدوال التالية:

١) $f(x) = x^4 - 2x^2$ ٢) $f(x) = 5x^{\frac{1}{5}}$ ٣) $f(x) = x + \sqrt{1-x}$

الحـــل

١) $f'(x)=4x^3-4x=0 \Leftarrow 4x(x^2-1)=0 \Leftarrow x=0, x=\pm1$

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
إشارة المشتقة $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f(x)	∞	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	∞

فترات التزايد: $[-1,0]\cup[1,\infty)$، فترات التناقص: $(-\infty,-1]\cup[0,1]$

القيم العظمى المحلية (Local Maximum Value): f (0) = 0،

القيم الصغرى المحلية (Local Minimum Value): $f(-1)=f(1)=-1$

٢) $f'(x)=x^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$. لا جذور للمشتقة والعدد الحرج الوحيد هو x = 0 (ينتمي لمجال الدالة).

	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$+$	$\infty \Vert \infty$	$+$	
	$-\infty$	↗	0	↗	∞

f (0) ليست قيمة قصوى محلية (Local Extreme). فترة التزايد هي IR.

٣) $f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}$ والمشتقة تساوي الصفر إذا كان:

$$x=\frac{3}{4} \Leftarrow 1-x=\frac{1}{4} \Leftarrow 2\sqrt{1-x}=1$$

وهي غير موجودة إذا كان x = 1

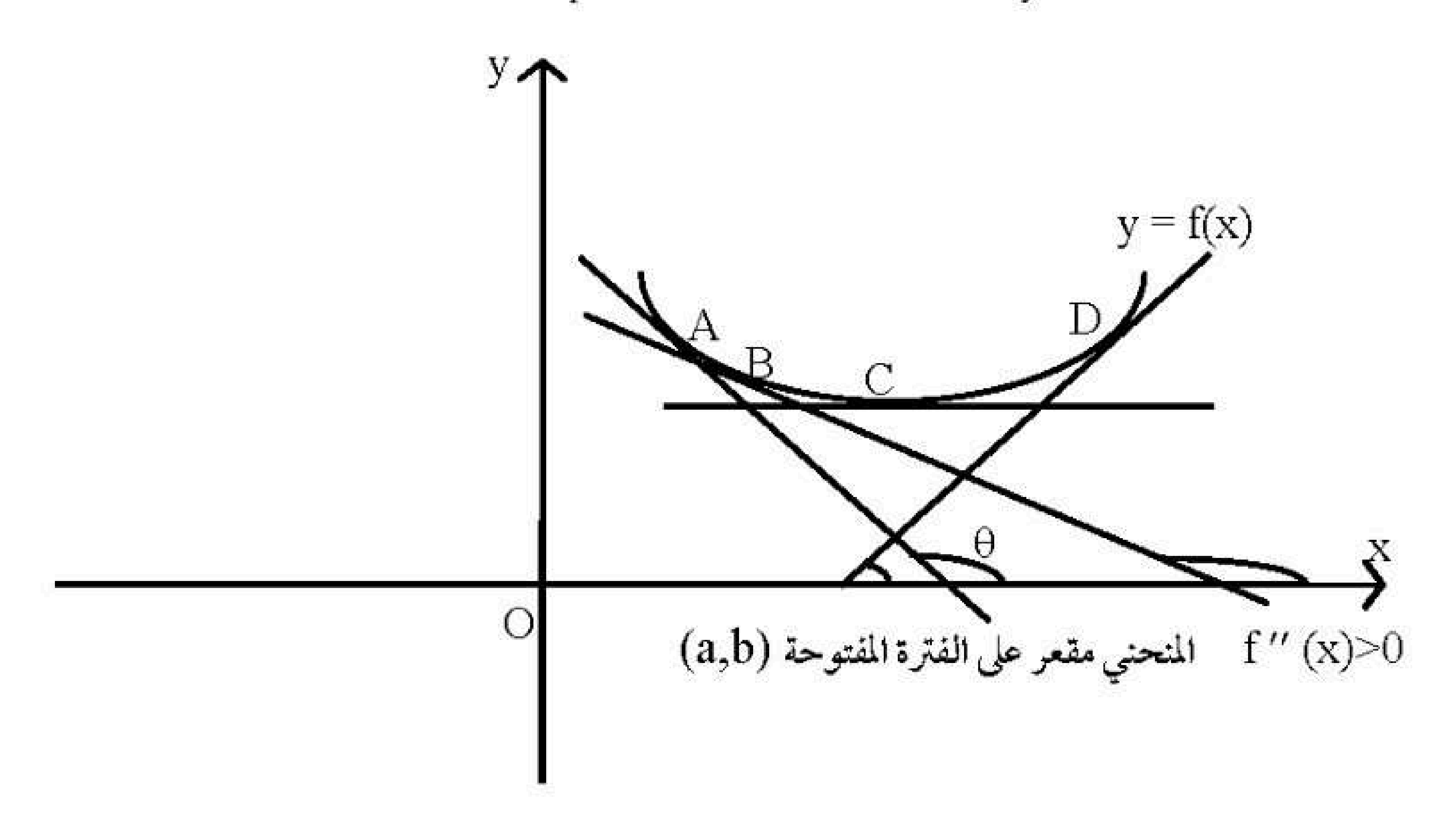
x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		1
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	$-\infty \Vert$
	$-\infty$	↗	$\frac{5}{4}$	↘	1

لاحظ أن: $\lim\limits_{x\to1^-} f'(x)=-\infty$ وأن مجال الدالة هو $(-\infty,1]$.

في حين أن مجال f' هو $(-\infty,1)$ وأن بيان المنحني مماس للمستقيم x = 1 عند النقطة (1 , 1). لاحظ أن: $f(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}$ قيمة عظمى محلية وأن فترة التزايد هي $(-\infty,\frac{3}{4}]$ والتناقص هي $[\frac{3}{4},1]$.

(٧, ٥) التقعر والتحدب

The upward and downward Concavity



شكل (٧, ١٠).

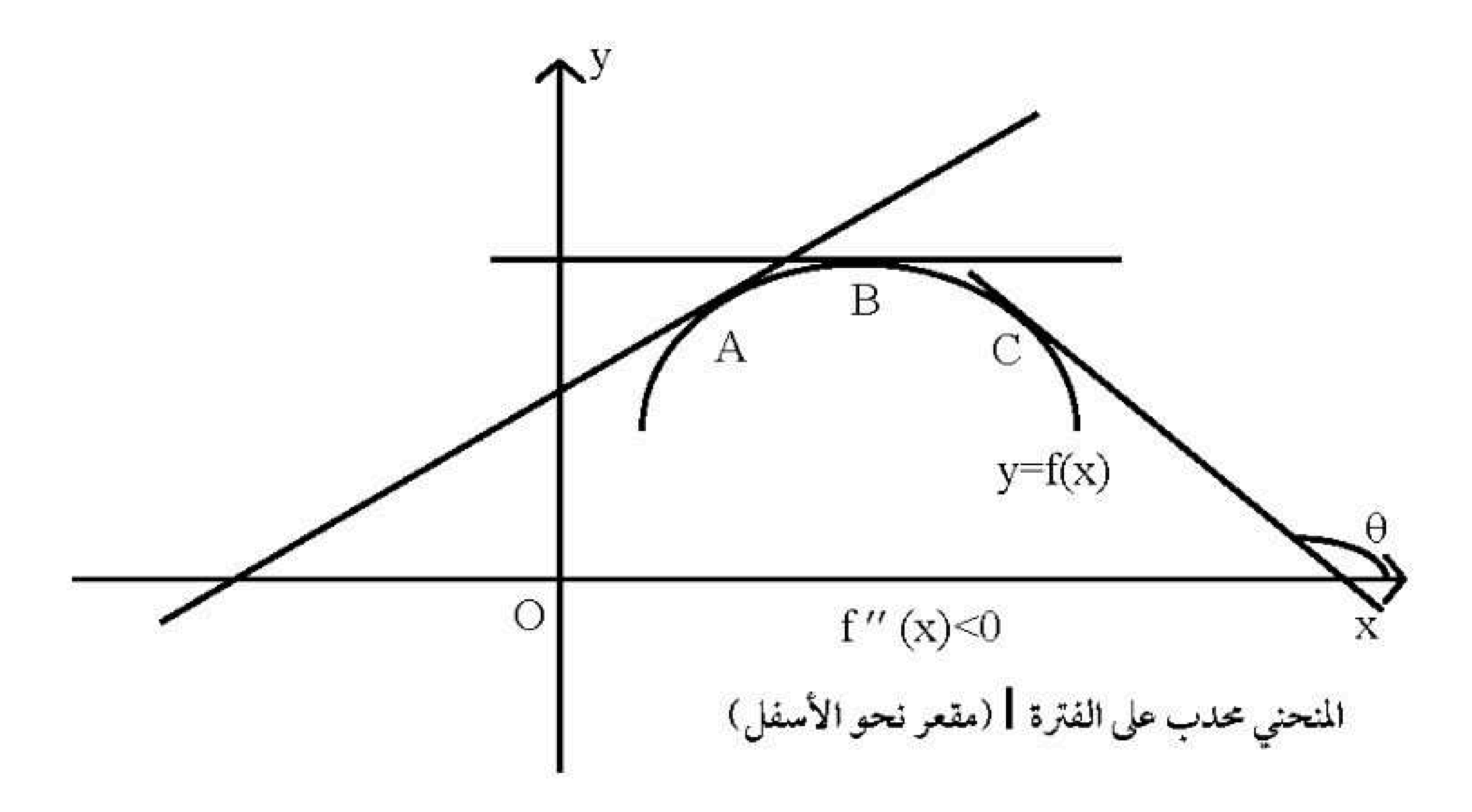
تأمـل بيـان المنحـني الذي معادلتـه: y = f(x) والمعـرف على الفترة المفتوحة I = (a,b) والمحقـق للشـرط: $f''(x) > 0$ على هـذه الفـترة. تجـد أن المشتقة الأولى f' والمحققة للمساواة:

$$m = f'(x) = \tan\theta$$

هي دالة متصلة تزداد تدريجيًا بقيمها عندما تزداد x. لاحظ أن الزاوية θ عند A زاوية منفرجة وعند C تساوي الصفر (المماس يوازي المحور x) وعند D زاوية حادة.

لاحظ أن المنحني يقع فوق أي مماس له عند أية نقطة منه. نقول عن هذا المنحني إنه منحن مقعر على الفترة I شكل (٧, ١٠).

بالمثل المنحني الذي معادلته y = f(x) والمعرف على الفترة I والمحقق للشرط $f''(x) < 0$ على هذه الفترة هو منحن محدب (مقعـر نحو الأسفل) شكل (٧, ١١).



شكل (٧,١١).

تعـــريـــف (٧,٥)

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة I = (a,b). نقول إن بيان المنحني الذي معادلته y = f(x):

١) مقعر على الفترة I، إذا كانت f' متزايدة على I

٢) محدب على هذه الفترة، إذا كانت f' متناقصة على I

اختبار التقعر

إذا كانت المشتقة الثانية f'' موجودة على الفترة (a,b)، فإن بيان f هو:

١) مقعر على هذه الفترة، إذا كانت $f''(x) > 0$ على (a,b).

٢) محدب على هذه الفترة، إذا كانت $f''(x) < 0$ على (a,b).

مـــثـــال (٧,٥)

أوجد فترات التزايد والتناقص - التقعر والتحدب - القيم القصوى المحلية، في الحالتين التاليتين:

١) $f(x) = x^3 - 3x$ ٢) $f(x) = \sin 2x$ على الفترة $[0, \pi]$

الحـــــل

١) (أ) $f'(x) = 3x^2 - 3$ وجذرا المشتقة هما $x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		∞
إشارة المشتقة $f'(x)$		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	∞

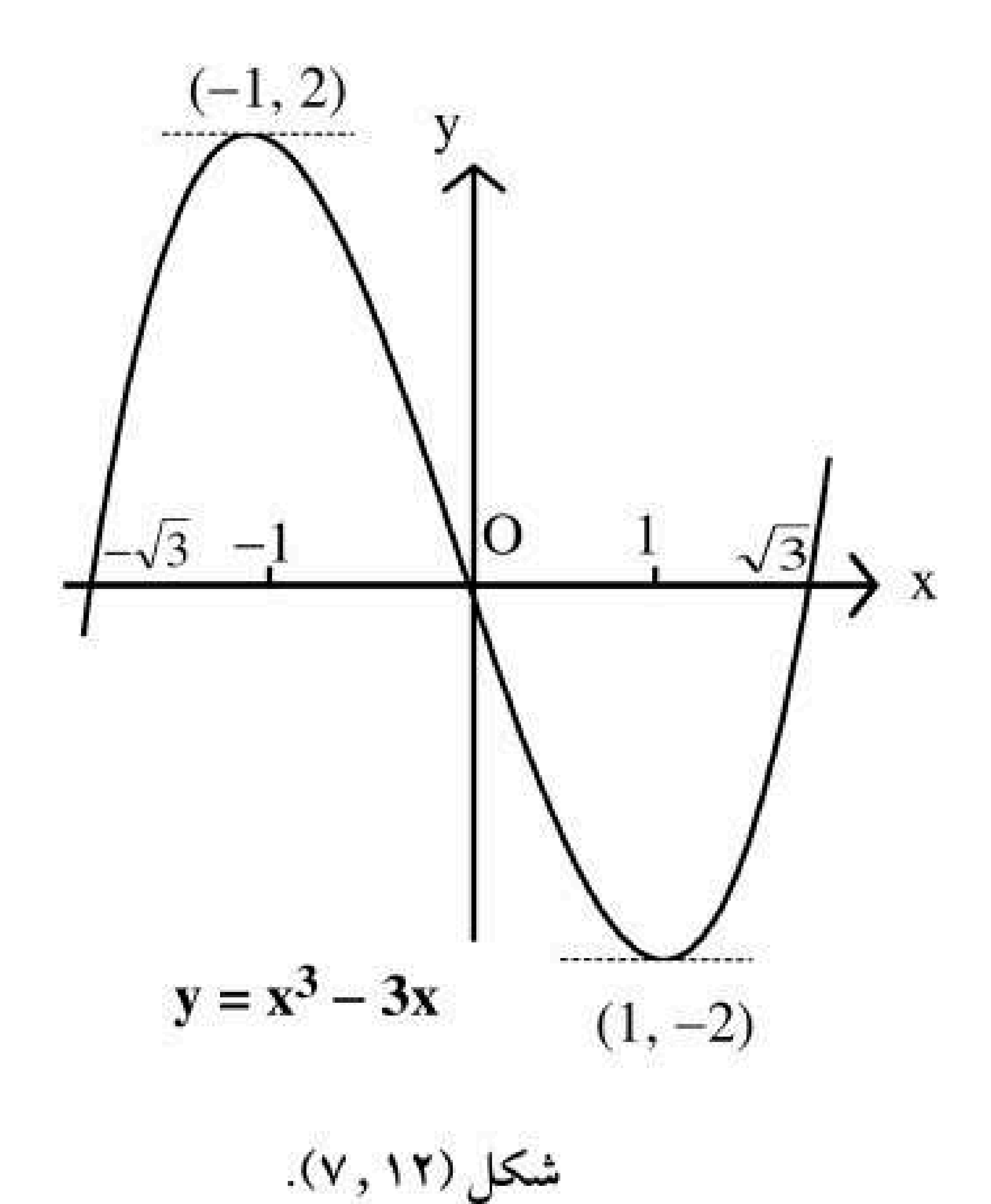
فترات التزايــد: $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$ ، فترات التناقص $[-1,1]$ ، $f(-1)=2$ قيمة عظمى محلية $f(1) = -2$ قيمة صغرى محلية.

(ب) $f''(x) = 6x$ ، جذر المشتقة هو: $x = 0$

إشارة المشتقة $f''(x)$	$-\infty$	−	0	+	∞
		⌒	f(0)=0	⌣	

فترات التقعر: $(0, \infty)$ وفترات التحدب: $(-\infty, 0)$

لاحظ أن: f دالة فردية وأن بيان المنحني متناظر بالنسبة لنقطة الأصل. من جهة أخرى فإن نقاط التقاطع مع المحاور الإحداثية هي: $(0,0), (\pm\sqrt{3}, 0)$ (شكل (١٢, ٧)).



شكل (١٢, ٧).

٢) (أ) $f'(x) = 2\cos 2x$ وجذور المشتقة على الفترة $(0,\pi)$ هي:

$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ ، } x = \frac{\pi}{4}$$

إشارة المشتقة الأولى:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f(x)	0	↗	1	↘	−1	↗	0

فترات التزايد: $[0,\frac{\pi}{4}[$ و $]\frac{3\pi}{4},\pi]$، فترات التناقص $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$، $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ قيمة عظمى محلية، $f(\frac{3\pi}{4}) = -1$ قيمة صغرى محلية.

(ب) $f''(x) = -4\sin 2x$ وجذور المشتقة الثانية على الفترة $[0,\pi]$ هي:

$$x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$$

0	−	$\frac{\pi}{2}$	+	π
f(0) = 0	⌒	$f(\frac{\pi}{2}) = 0$	⌣	f(π)=0

فترات التقعر: $(\frac{\pi}{2},\pi)$ ، فترات التحدب: $(0,\frac{\pi}{2})$

نقاط التقاطع هي: $(0,0),(\frac{\pi}{2},0),(\pi,0)$

تعــريــف (٦ , ٧)

إذا حققت الدالة f الشرطين التاليين:

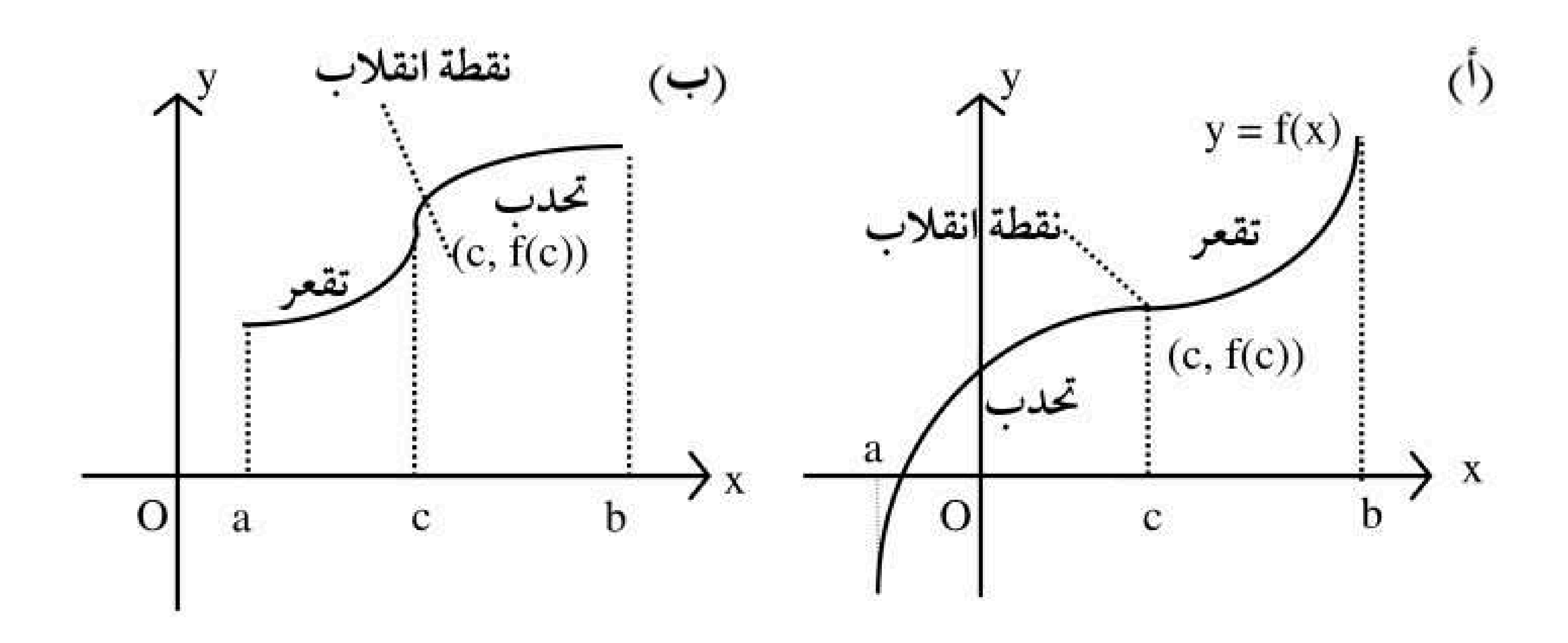
١) f متصلة عند c

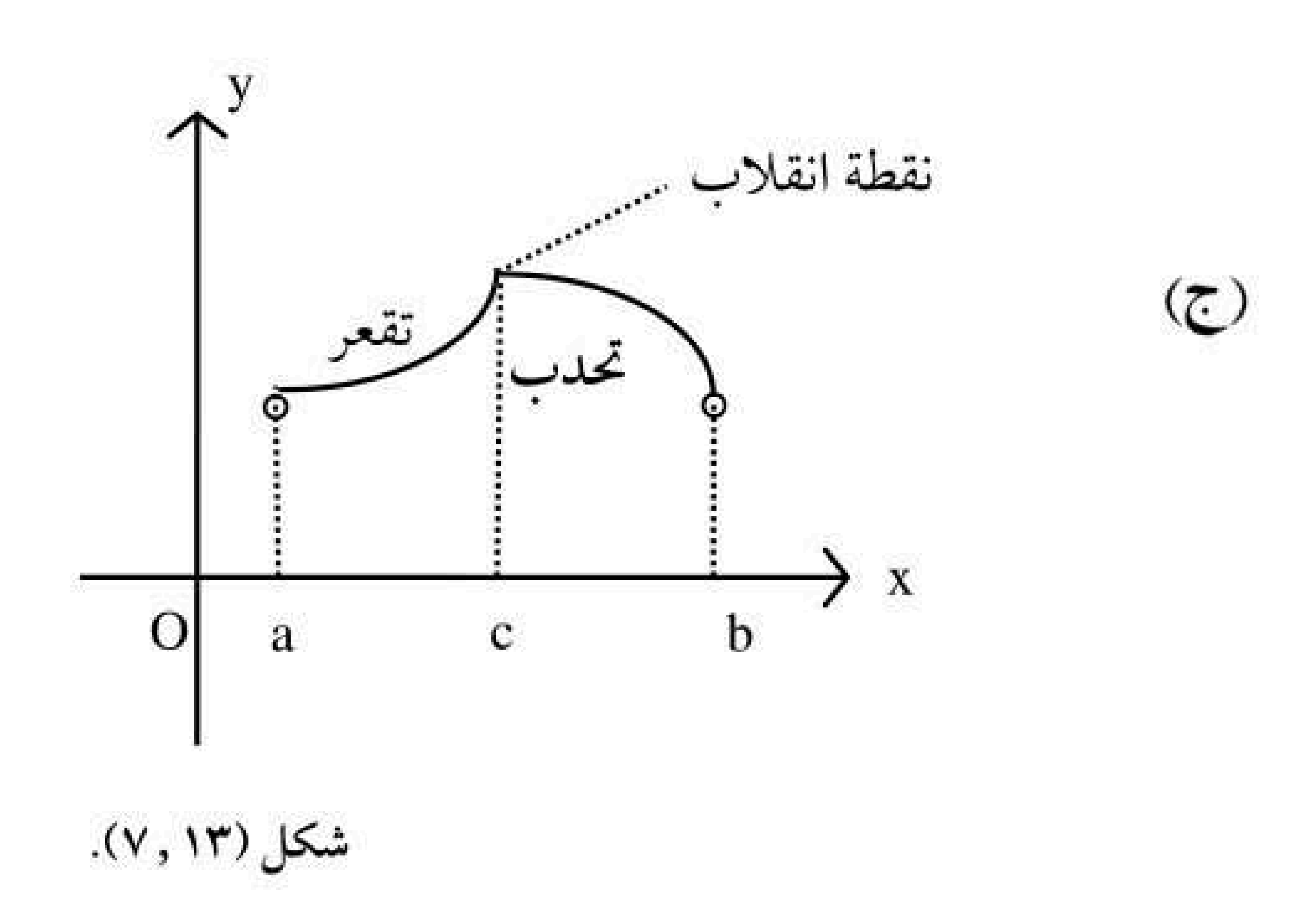
٢) وإذا قسمت c الفترة المفتوحة (a,b) بحيث يكون بيان f:

مقعرًا على الفترة (a,c) ومحدبًا على الفترة (c,b) أو بالعكس:

فإننا نسمي النقطة (c, f(c)) من بيان f بنقطة انقلاب

(Inflection Point) (نقطة انعطاف) شكل (١٣ , ٧).





شكل (١٣ , ٧).

مــثــال (٦ , ٧)

أوجد نقط الانقلاب للمنحنيات المعرفة كالآتي:

١) $f(x) = 2x^4 - 12x^2 + 10$ ٢) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - 4x$

الحـــل

١) $f'(x) = 8x^3 - 24x \Leftarrow f''(x) = 24x^2 - 24$ ، جذرا المشتقة الثانية $x = \pm 1$

إشارة المشتقة الثانية:

$-\infty$	+	-1	$-$	1	+	∞
	∪	0	∩	0	∪	

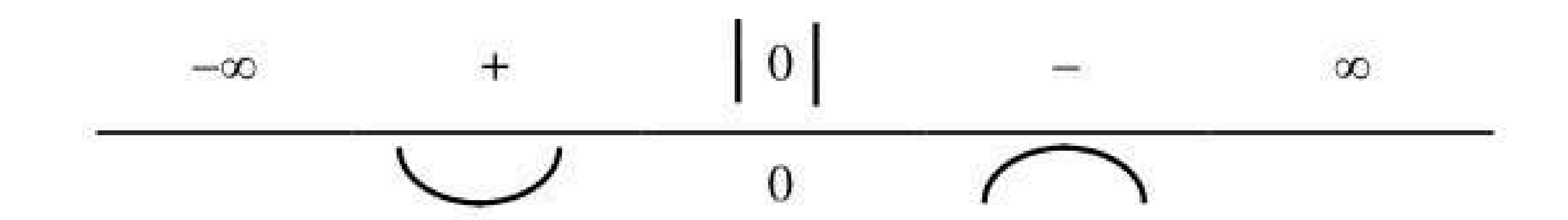
نقطتا الانقـــلاب هما: $(\pm 1,0)$ (المشتقة الثانية موجودة وتساوي الصفر).

لاحظ أن إشارة المشتقة تتغير حول كل من نقطتي الانقلاب.

٢) $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-4 \Rightarrow f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow f''(x)=-\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

لا جذور للمشتقة الثانية، لكنها غير موجودة عند $x = 0$ (لاحظ أن الدالة معرفة عند $x = 0$).

إشارة المشتقة الثانية:



فالنقطة $(0,0)$ نقطة انقلاب (المشتقة الثانية غير موجودة).

اختبار المشتقة الثانية (The Second derivative test):

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على فترة مفتوحة تحوي c وكان $f'(c)=0$ ، فإن للدالة f:

١) قيمة عظمى محلية f(c) ، إذا كان: $f''(c)<0$

٢) قيمة صغرى محلية f(c) ، إذا كان: $f''(c)>0$

مـــثـــال (٧,٧)

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدوال التالية:

١) $f(x)=x^2-2x$ ٢) $f(x)=2x^3-3x^2+1$

الحـــــل

١) $f'(x)=2x-2$ والمشتقة تساوي الصفر عند $x = 1$.

لكن: $f''(x) = 2$. بما أن: $f''(x) = 2 > 0$ فإن: $f(1) = -1$ قيمة صغرى محلية للدالة.

٢) $f'(x) = 6x^2 - 6x$ وجذرا المشتقة هما x = 0، x = 1

لكن: $f''(x) = 12x - 6$. بما أن:

(أ) $f''(0) = -6 < 0$ ، فإن: f(0) = 1 قيمة عظمى محلية للدالة.

(ب) $f''(1) = 6 > 0$ ، فإن: f(1) = 0 قيمة عظمى محلية للدالة.

تمـــاريـــن (٣, ٧)

أوجد فترات التزايد والتناقص، القيم القصوى المحلية، فترات التقعر والتحدب، نقط الانقلاب للدوال المعرفة كما يلي:

١) $f(x) = x^2 - 3x$ ٢) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

٣) $f(x) = x^4 - 2x^2$ ٤) $f(x) = \sin 2x + 1$

٥) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ٦) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x}$

٧) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ ٨) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

٩) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ١٠) $f(x) = 5x^{\frac{1}{5}}$

١١) $f(x) = \sin x - \cos x$ على الفترة $[0, 2\pi]$

١٢) $f(x) = \tan^{-1} x$ ١٣) $f(x) = x^{\frac{1}{7}}(x + 8)$

١٤) $f(x) = \sin^2 x$ على الفترة $(-\pi, \pi)$

١٥) $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$ ١٦) $f(x) = x\sqrt[3]{x + 1}$

١٧) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ ١٨) $f(x) = x^2\sqrt{4x - x^2}$

١٩) حدد باستخدام اختبار المشتقة الثانية القيم القصوى المحلية على الفترات المرافقة:

(أ) $f(x) = \cos 2x + \sin 2x$ $[0, \pi]$

(ب) $f(x) = 2x - \sin 2x$ $[0, 2\pi]$

(ج) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ $[-\pi, \pi]$

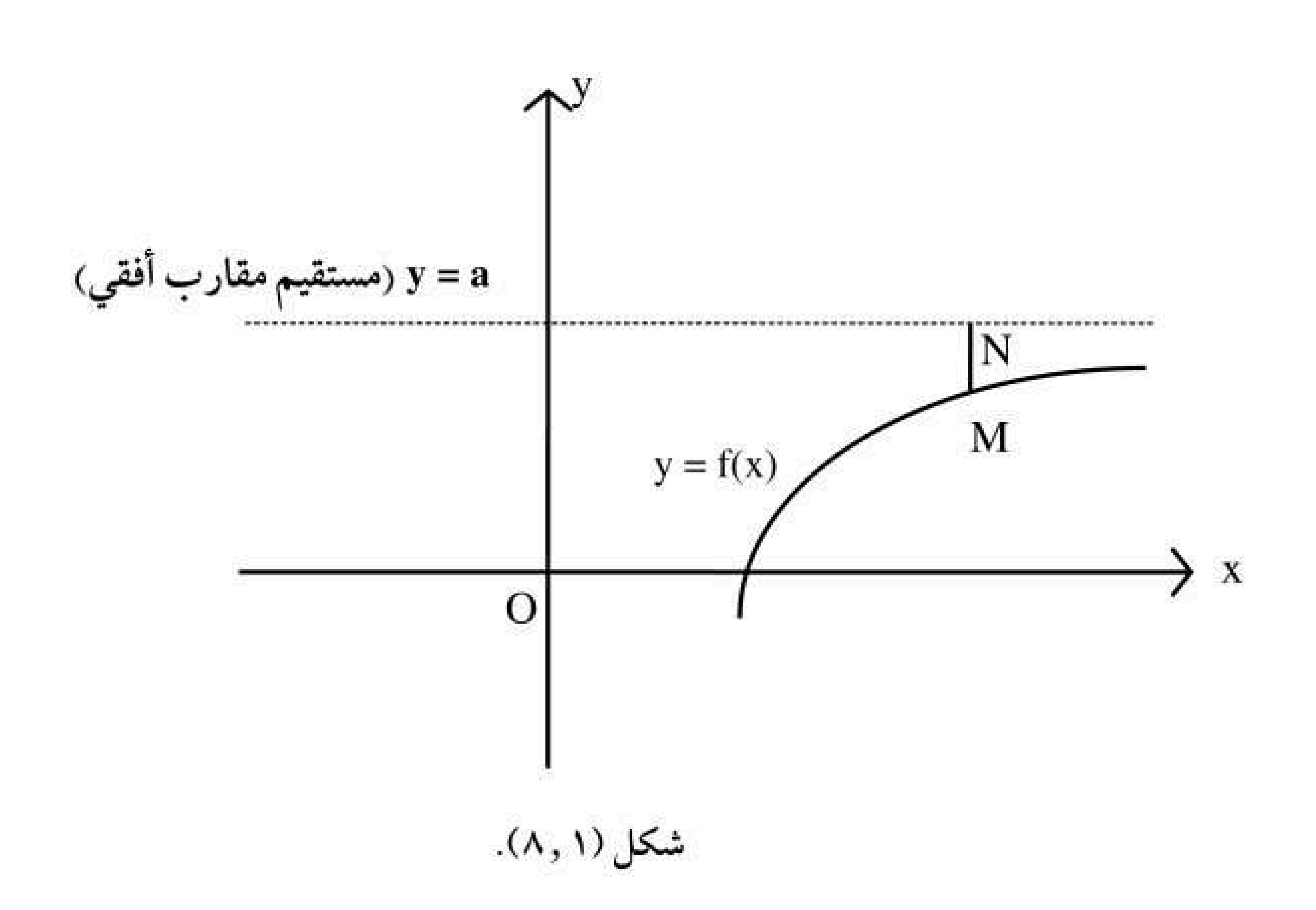
(د) $f(x) = \sec 2x$ $(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4})$

(هـ) $f(x) = 2\tan x - \tan^2 x$ $[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}]$

الفصل الثامن

رسم المنحنيات
THE GRAPH OF THE CURVES

(١ ,٨) المستقيمات المقاربة الأفقية والعمودية
The Horizontal and Vertical Asymptotes lines



شكل (١ ,٨).

تأمل في بعد النقطة M (من المنحني الذي معادلته: $y = f(x)$ عن المستقيم:
$y = a$، تجد أنه يصغر تدريجيًّا كلما زادت قيمة المتغير x وينتهي نحو الصفر عندما $x\to\infty$.

أي أن:

$$\lim_{x\to\infty}|MN|\to 0 \qquad (٨,١)$$

لكنَّ: $|MN| = a - f(x)$

إذن العلاقة (١ ,٨) تكافئ الشرط:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

تعــريــف (١ ,٨)
نقول إن المنحني الذي معادلته: $y = f(x)$، يقبل المستقيم: $y = a$ مقاربًا له، إذا كانت:
$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ (أو $x \to -\infty$)

مــثــال (١ ,٨)

أوجد المستقيمات المقاربة الأفقية للمنحنيات المعرفة كما يلي:

١) $y = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$ ٢) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

٣) $y = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$ ٤) $y = \dfrac{2x^2-1}{4x^2-3}$

الحــــل

١) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{(x-2)(x-3)} = 0$ (نفس النتيجة عندما $x \to -\infty$)

إذن: $y = 0$ مستقيم مقارب أفقي.

٢)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x^2})}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = 1$$

($|x| = x$ إذا كانت x كبيرة جدًّا وموجبة (Positive)).

إذن: $y = 1$ مستقيم مقارب أفقي.

بنفس الطريقة، نجد: $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} = -1$ (هنا $|x| = -x$)

إذن: $y = -1$ مستقيم مقارب أفقي أيضًا.

٣)
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}$$

من الملاحظ أن: $-1 \le \sin x \le 1$

ومنه:
$$-\frac{1}{x^2+1} \le \frac{\sin x}{x^2+1} \le \frac{1}{x^2+1}$$

لكن:
$$\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

فحسب نظرية السندويتش (الشطيرة):
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} = 0$$

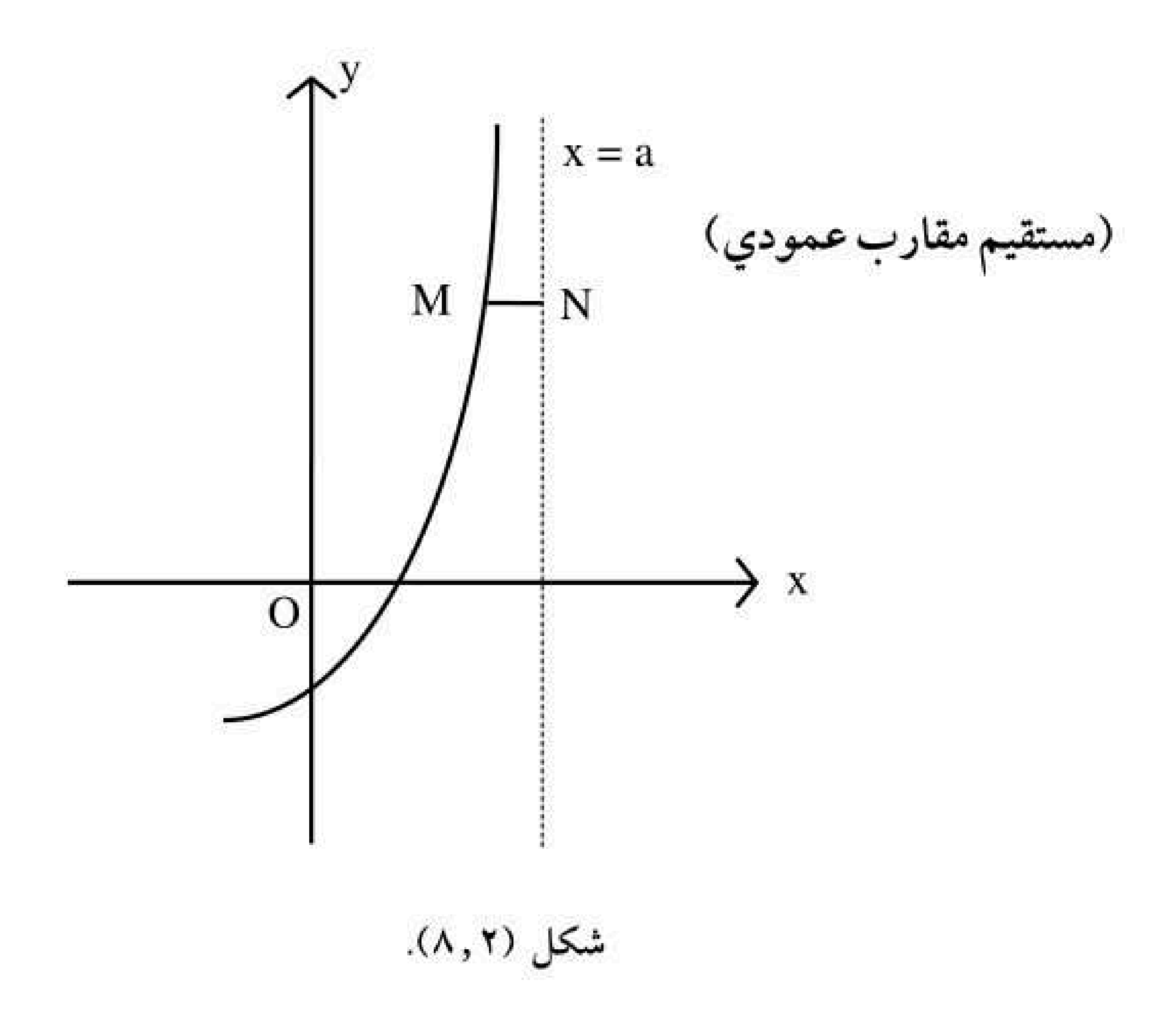
إذن: $y = 0$ مستقيم مقارب.

٤)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{4x^2-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2-\frac{1}{x^2})}{x^2(4-\frac{3}{x^2})}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}}{4-\frac{3}{x^2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

إذن: $y = \frac{1}{2}$ مستقيم مقارب أفقي.

تعـــريـــف (٢, ٨)

نقول إن المنحني الذي معادلته: $y = f(x)$ يقبل المستقيم $x = a$ مقاربًا له، إذا كانت:
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \ (\text{أو } -\infty)$$
(من الممكن $x \to a^+$ أو $x \to a^-$)



شكل (٢,٨).

مـثـال (٢,٨)

أوجد المستقيمات المقاربة العمودية (الرأسية) المعرفة فيما يلي:

١) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ ٢) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$

٣) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ ٤) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

الحـــل

١) $$f(x)=\frac{1}{(x-2)(x+2)}$$

بما أن $x \to 2^+ \Rightarrow f(x)\to\infty$: (من الممكن أن نأخذ الحالة $x \longrightarrow 2^-$)

وأن: $x \to -2^- \Rightarrow f(x)\to\infty$ (من الممكن أن نأخذ الحالة $x \longrightarrow -2^+$)

إذن: $x = 2$، $x = -2$ مستقيمان مقاربان عموديان.

٢) من الملاحظ أن: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

إذن: $x = 0$ (ليس مستقيمًا مقاربًا).

في حين أن المستقيمات: $x = \pi n, n \in Z^*$ هي مستقيمات مقاربة رأسية. فمثلاً: $x = \pi$ مستقيم مقارب رأسي لأن:

$$\lim_{x \to \pi^+} \frac{x}{\sin x} = -\infty$$

(المقام ينتهي نحو الصفر بقيم سالبة)

٣) من الملاحظ أنه لا يوجد للدالة: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ مستقيمات مقاربة رأسية فالمقام لا يساوي الصفر دومًا: $x^2 + 1 \geq 1$

٤) مجال الدالة: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ هو الفترة: $(-2,2)$
من الملاحظ أن:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \infty$$

وأن: $\lim_{x \to -2^+} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty$

إذن: $x = 2$، $x = -2$ مستقيمان مقاربان رأسيان.

(٨,٢) رســم المنحنيــات

سنهتم فيما يلي برسم بعض المنحنيات ككثيرات الحدود وبعض الدوال المثلثية والجبرية مستعينين بالمعلومات التي نعلمها عن خواص الدوال متبعين لرسم هذه المنحنيات الخطوات التالية:

١) إنشاء جدول يوضح مجال الدالة ومشتقتها، ندرس من خلاله إشارة المشتقة الأولى، ونستنبط منه فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية.

٢) إنشاء جدول آخر يحدد إشارة المشتقة الثانية، نستنتج منه فترات التقعر والتحدب ونقط الانقلاب.

٣) دراسة التناظرات الممكنة للمنحني.

٤) إيجاد نقط التقاطع مع مجموعة المحاور الإحداثية.

٥) إيجاد المستقيمات المقاربة للمنحني إن وجدت.

(أ)رسم الدوال من الشكل: $y = f(x)$ حيث $f(x)$ كثيرة حدود.

مـــثـــال (٨,٣)

ارسم المنحني الذي معادلته: $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$

الحـــل

١)المشتقة الأولى: $f'(x)=2x-3$

جذور المشتقة: $x=\frac{3}{2} \Leftarrow 2x-3=0$

إشارة المشتقة:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f(x)	∞	↘	$f(\frac{3}{2})=-\frac{1}{4}$	↗	∞

$f(\frac{3}{2})=-\frac{1}{4}$ قيمة صغرى محلية للدالة.

٢)المشتقة الثانية: $f''(x)=2>0$ فالمنحني مقعر نحو الأعلى.

٣)نقاط التقاطع:

مع المحور x:

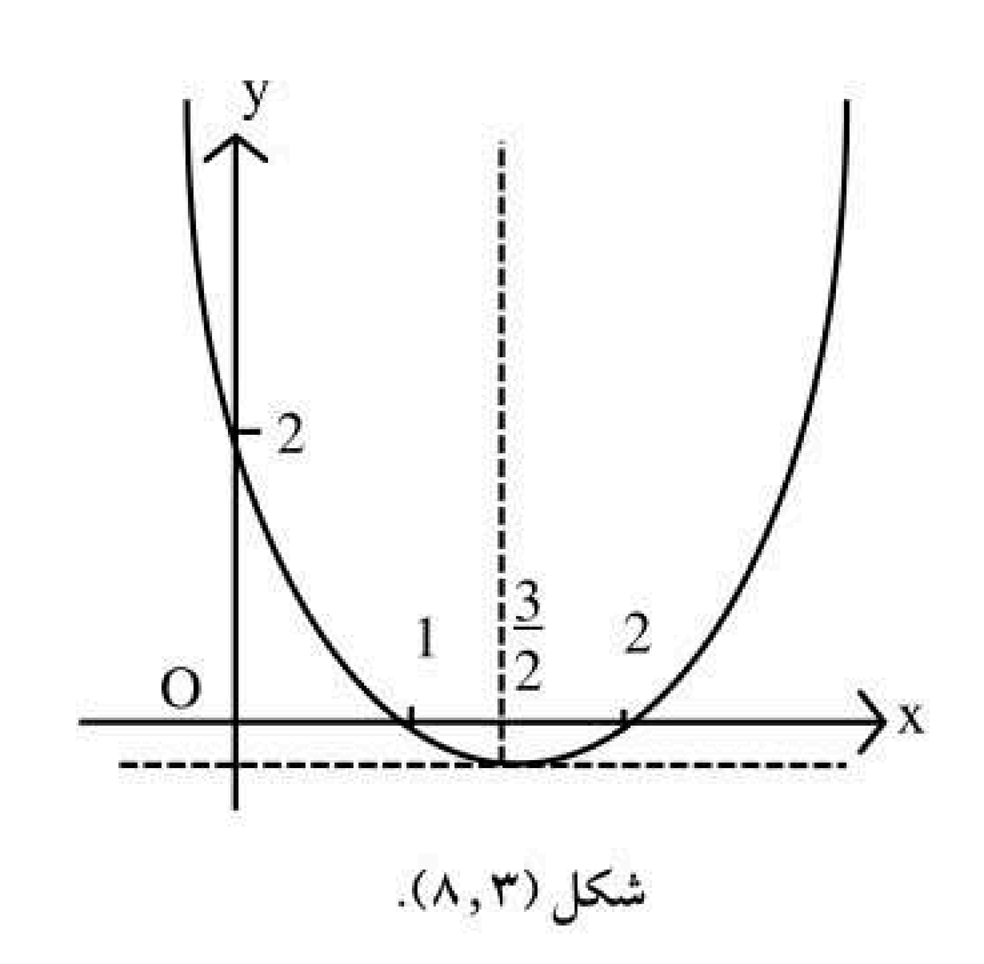
$(x-1)(x-2)=0 \Leftarrow y=0$

$x=2$ أو $x=1 \Leftarrow$

مع المحور y:

$y=2 \Leftarrow x=0$

هذا المنحني قطع مكافئ رأسه: $(\frac{3}{2},-\frac{1}{4})$.



شكل (٨,٣).

مـثـال (٨,٤)

ارسم المنحني المعرف بالمعادلة: $y=f(x)=2x^3-9x^2+12x$

مبينًا فترات تزايده. تناقصه. تقعره. تحدبه. قيمه القصوى المحلية. نقط انقلابه.

الحـــل

١) المشتقة الأولى: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

جذور المشتقة الأولى:

$$6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow 6(x-1)(x-2) = 0$$

فالجذران هما: $x = 2$، $x = 1$

إشارة المشتقة الأولى:

(المجـــــال)	x	$-\infty$		1		2		∞
(إشارة المشتقة الأولى)	$f'(x)$		+	0	−	0	+	
(سلوك الدالة من تزايد وتناقص)	$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	4	↗	∞

أنشأنا هنا جدولاً حيث وضعنا في السطر الأول مجال الدالة مبينًا عليه جذور المشتقة الأولى أما في السطر الثاني فقد درسنا إشارة المشتقة، وفي السطر الأخير بينا أوضاع الدالة من تزايد وتناقص وأظهرنا القيم العظمى والصغرى المحلية.

٢) المشتقة الثانية: $f''(x) = 12x - 18$

جذور المشتقة الثانية: $12x - 18 = 0 \Leftarrow x = \frac{3}{2}$

إشارة المشتقة الثانية:

إشارة المشتقة الثانية	$-\infty$	−	$\frac{3}{2}$	+	∞
سلوك الدالة من تقعر وتحدب		⌒	$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{2}$	◡	

من الجدول الأول، نجد:

فترات التزايد: $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

فترات التناقص: $[1, 2]$

$f(1) = 5$ قيمة عظمى محلية، $f(2) = 4$ قيمة صغرى محلية.

من الجدول الثاني، نجد:

فترات التقعر: $(\frac{3}{2}, \infty)$ ، فترات التحدب: $(-\infty, \frac{3}{2})$

نقطة الانقلاب: $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$

٣) نقاط التقاطع مع المحورين الإحداثيين:

١)مع المحور x: $y = 0 \Leftarrow x(2x^2 - 9x + 12) = 0 \Leftarrow$

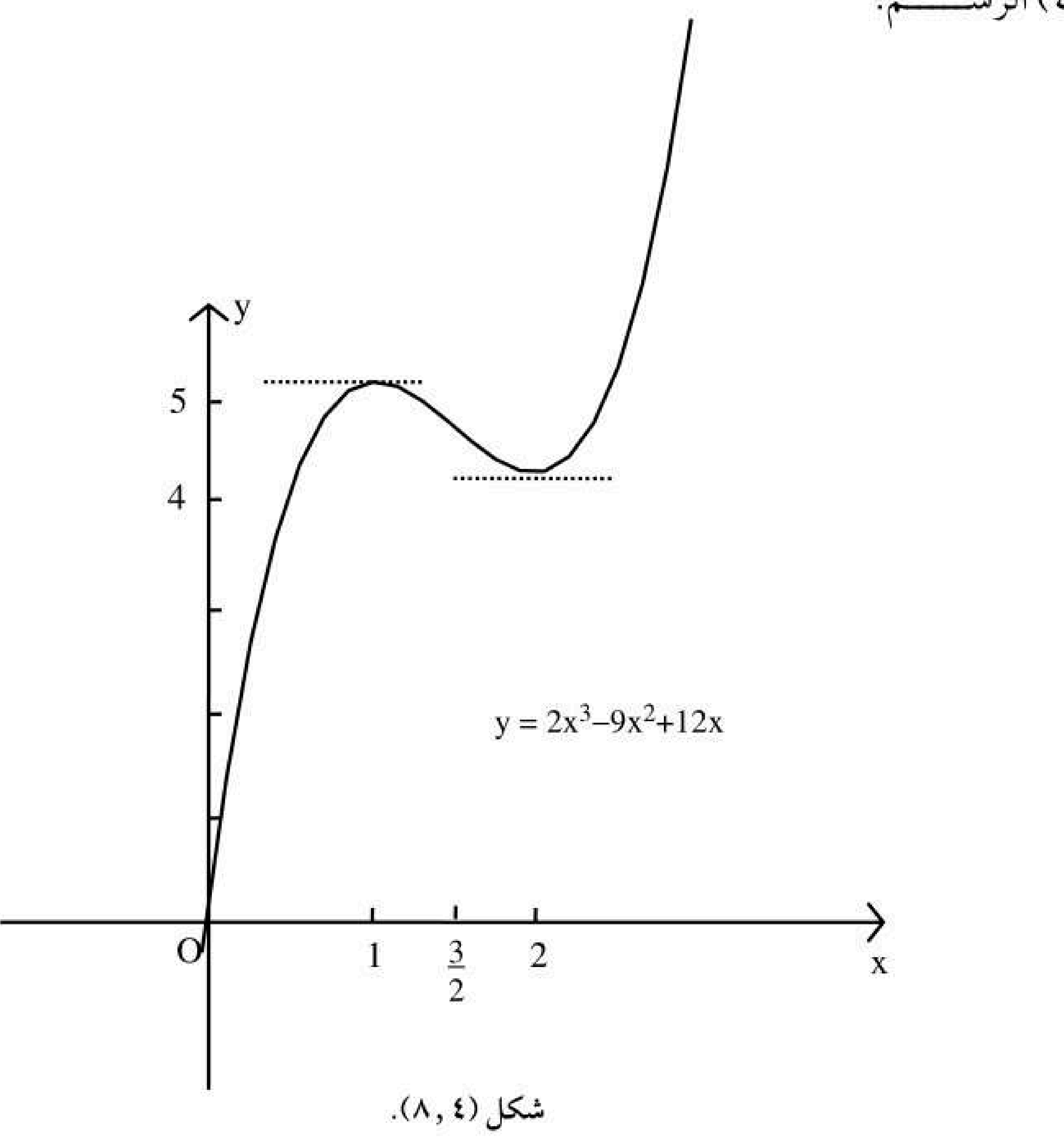
$x = 0$ أو $2x^2 - 9x + 12 = 0$ والمميز هنا يساوي -15 =m=81−96

فلا جـــذور للمعادلـــة. إذن نقطة التقاطع الوحيدة مع المحور x هي: $(0, 0)$

٢)مع المحور y: $x = 0 \Leftarrow y = 0$ وهي نفسها النقطة السابقة.



٤) الرســـــم:



شكل (٤ ,٨).

مـــثـــال (٨,٥)

ارسم المنحني الذي معادلته: $y = 2x^3 + 3x^2 + 6x$

الحـــــل

١) المشتقة الأولى: $f'(x) = 6x^2 + 6x + 6$

جذورها: $x^2 + x + 1 = 0 \Leftarrow 6x^2 + 6x + 6 = 0$

والمميز يساوي: $m = 1 - 4 = -3$ ولا جذور للمعادلة والمشتقة موجبة دومًا.

إشارة المشتقة الأولى:

x	$-\infty$		∞
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	∞

فالمنحني متزايد دومًا على IR، ولا يوجد له قيم قصوى محلية.

٢)المشتقة الثانية: $f''(x) = 12x + 6$

جذر المشتقة: $x = -\frac{1}{2}$

إشارة المشتقة الثانية:

إشارة المشتقة الثانية	$-\infty$	$-$	$-\frac{1}{2}$	$+$	∞
سلوك الدالة من تقعر وتحدب		⌒	$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{2}$	◡	

فالمنحني مقعر على الفترة $(-\frac{1}{2}, \infty)$ ومحدب على الفترة $(-\infty, -\frac{1}{2})$ وله نقطة انقلاب وهي: $(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$.

٣) نقاط التقاطع مع المحورين الإحداثيين:

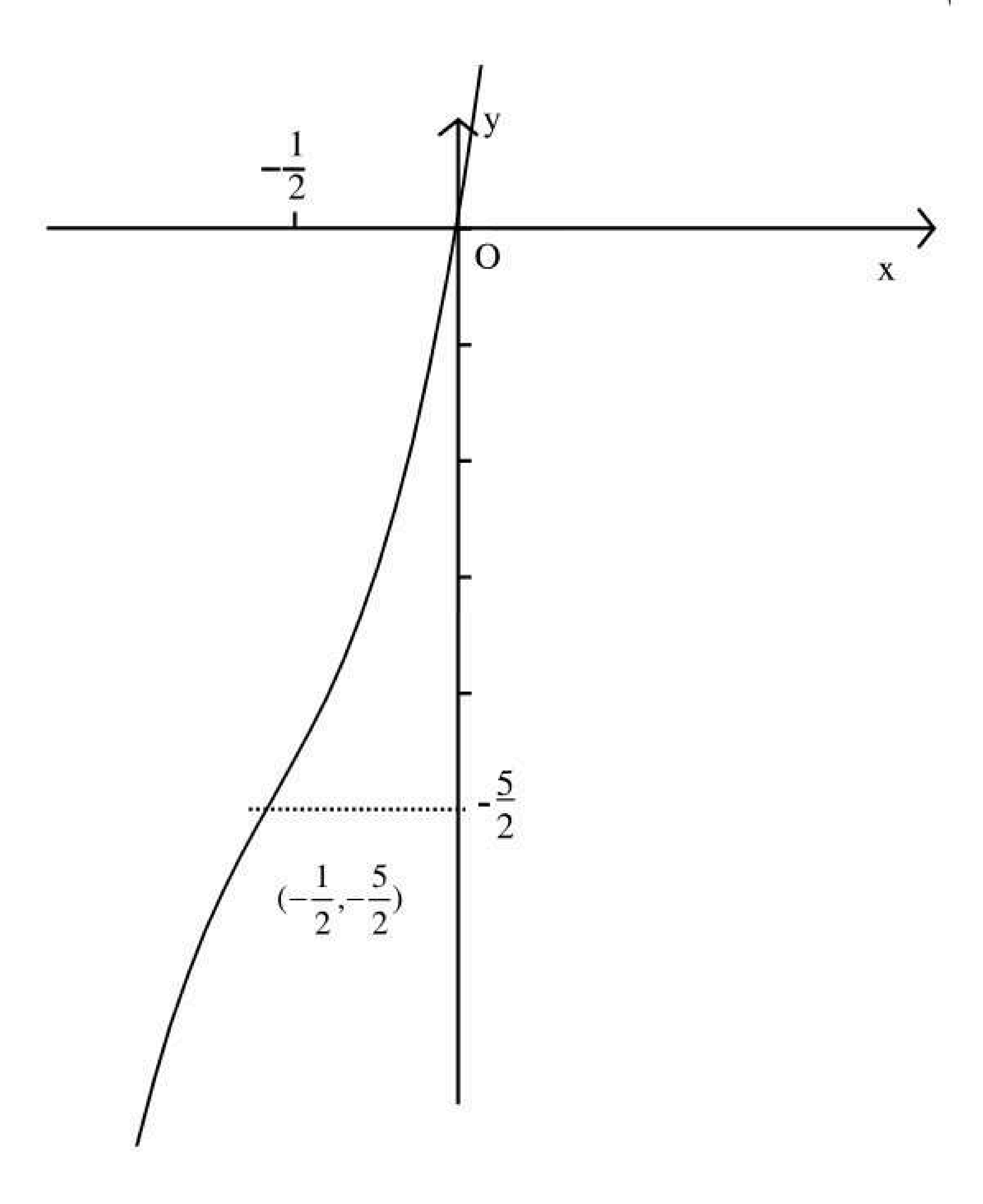
مع المحور x: $y = 0 \Leftarrow x(2x^2 + 3x + 6) = 0 \Leftarrow$

$x = 0$ أو $2x^2 + 3x + 6 = 0$ والمميز هنا يساوي: $m=9-48=-39$

ولا جذور للمعادلة. فنقطة التقاطع مع المحور x هي: $(0, 0)$

والنقطة نفسها نقطة التقاطع مع المحور y.

٤) الرســـــم:



شكل (٥, ٨).

ملحـوظـة (١ , ٨)

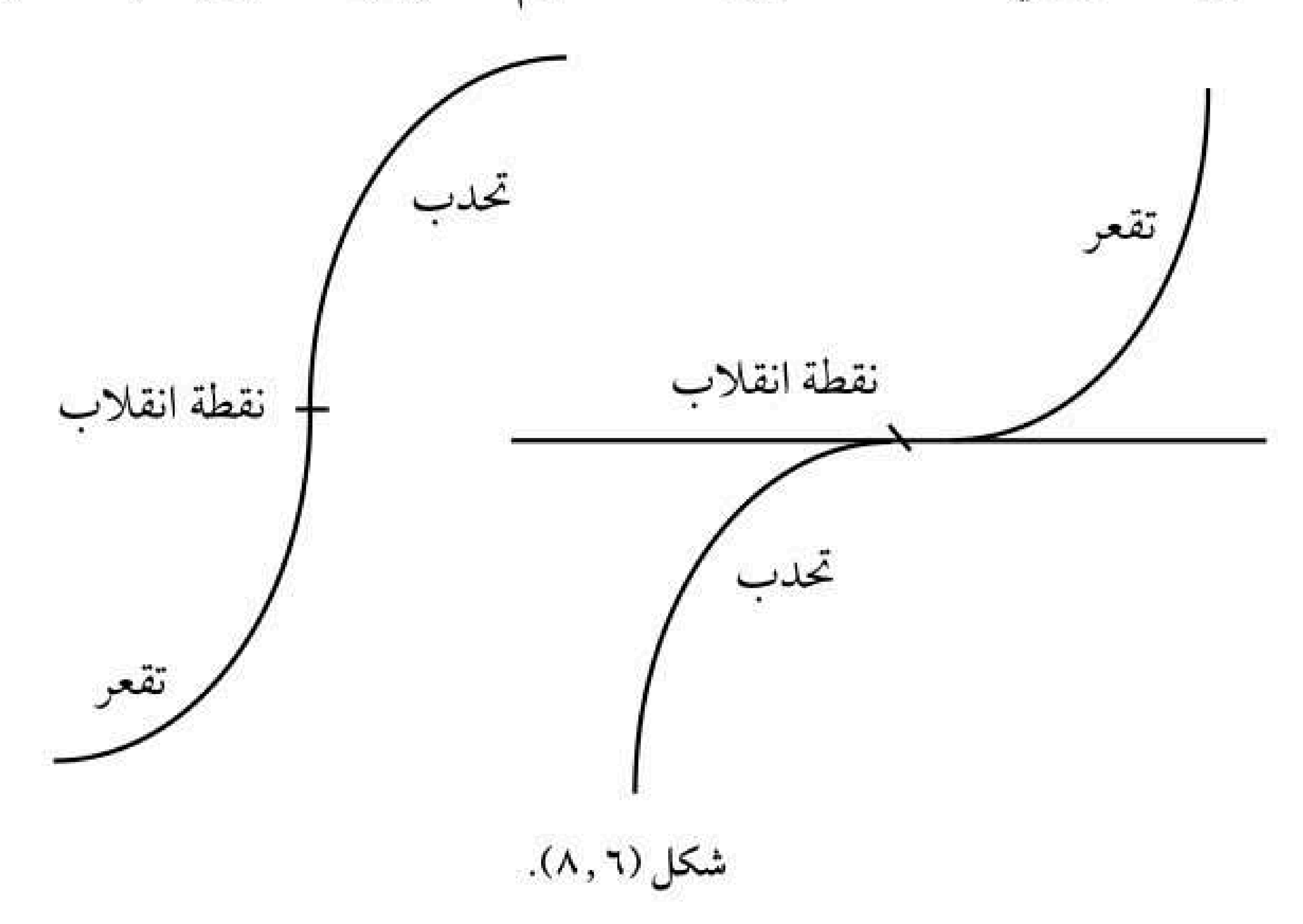
للمنحني من الدرجة الثالثة والذي معادلته:

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

(أ)أحد الشكلين التاليين وذلك إذا كان مميز المعادلة:

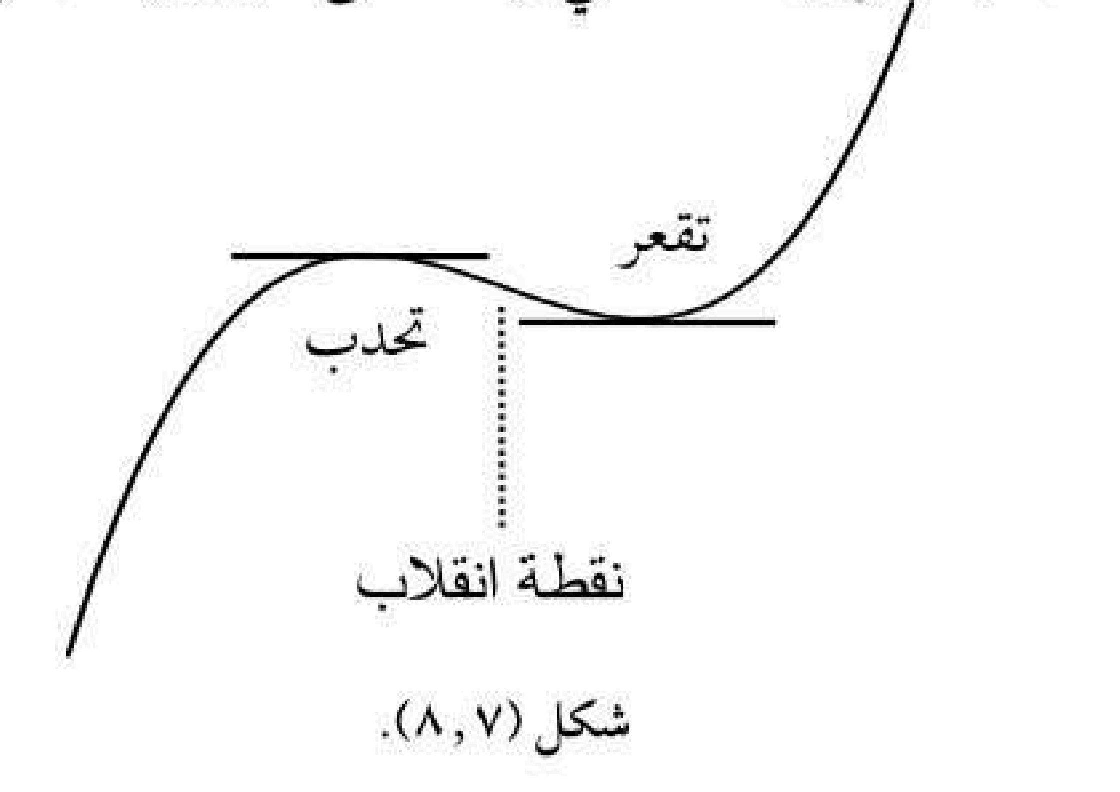
$$3ax^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \qquad (٨ , ١)$$

سالبًا أو مساويًا للصفر وفي هذه الحالة **لا يوجد للدالة قيم عظمى ولا صغرى محلية**، شكل (٦ , ٨).



شكل (٦ , ٨).

ب) إذا كان مميز المعادلة (١ , ٨) موجبًا، **فللمنحني قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية**. شكل (٧ , ٨).

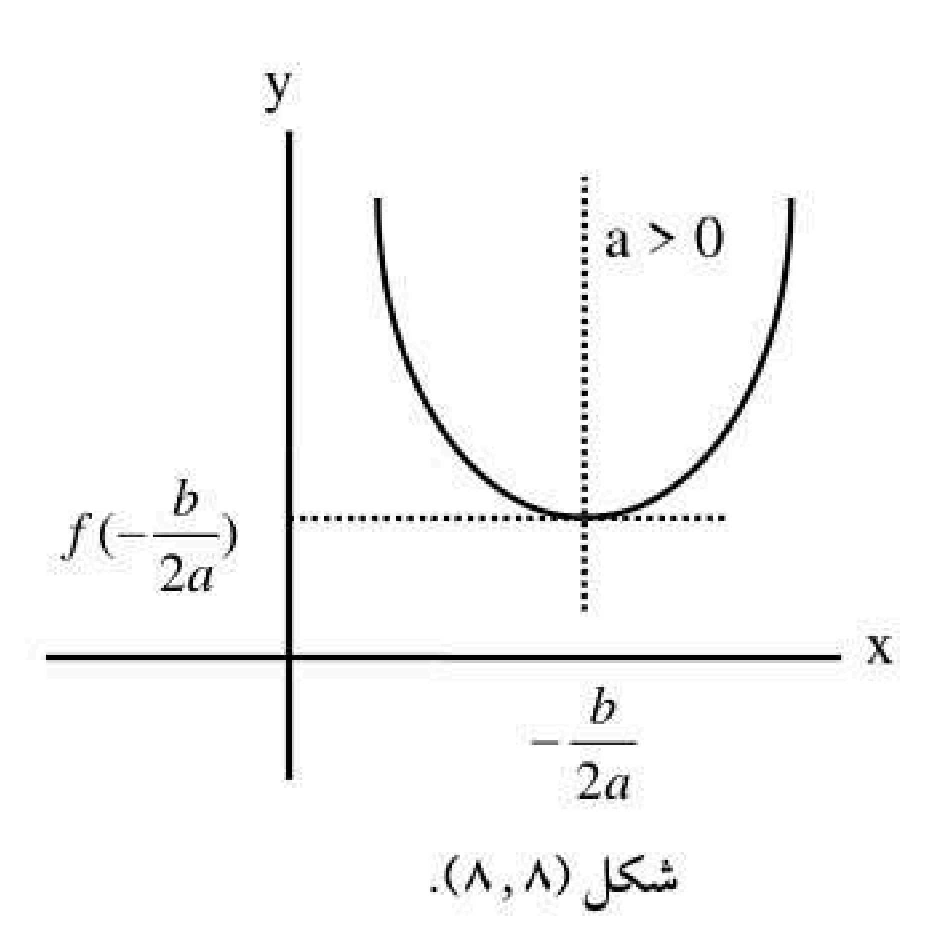


شكل (٧ , ٨).

وفي كلتا الحالتين **نقطة الانقلاب للمنحني هي نقطة تناظر له.**

ملحوظة (٨,٢)

المنحني من الدرجة الثانية والذي معادلته: $y = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$ هـو قطع مكافئ رأسه $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ حيث $f(-\frac{b}{2a})$ هي القيمة القصوى للدالة f. فتحته نحو الأعلى إذا كان a > 0، نحو الأسفـل إذا كـان a < 0. لاحـظ أن: $x = -\frac{b}{2a}$ هي نقطة انعدام مشتقته الأولى. لاحظ أيضا أن: $f''(x) = 2a$ وهي موجبة إذا كان a > 0، وسالبة إذا كان a < 0.



شكل (٨,٨).

مـثـال (٨,٦)

ارسم المنحني: $y = x^4 - 4x + 1$

الحـل

١) المشتقة الأولى: $f'(x) = 4x^3 - 4$

جذور المشتقة: $4x^3 - 4 = 0 \Leftarrow x^3 = 1 \Leftarrow x = 1$

إشارة المشتقة:

	x	$-\infty$		1		∞
(إشارة المشتقة)	f ′(x)		–	0	+	
		∞	↘	-2	↗	∞

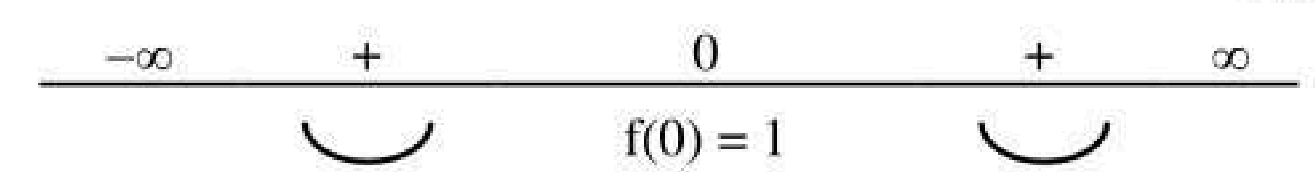
فترة التزايد: $[1, \infty)$، فترة التناقص: $(-\infty, 1]$

$f(1) = -2$ قيمة صغرى محلية للدالة.

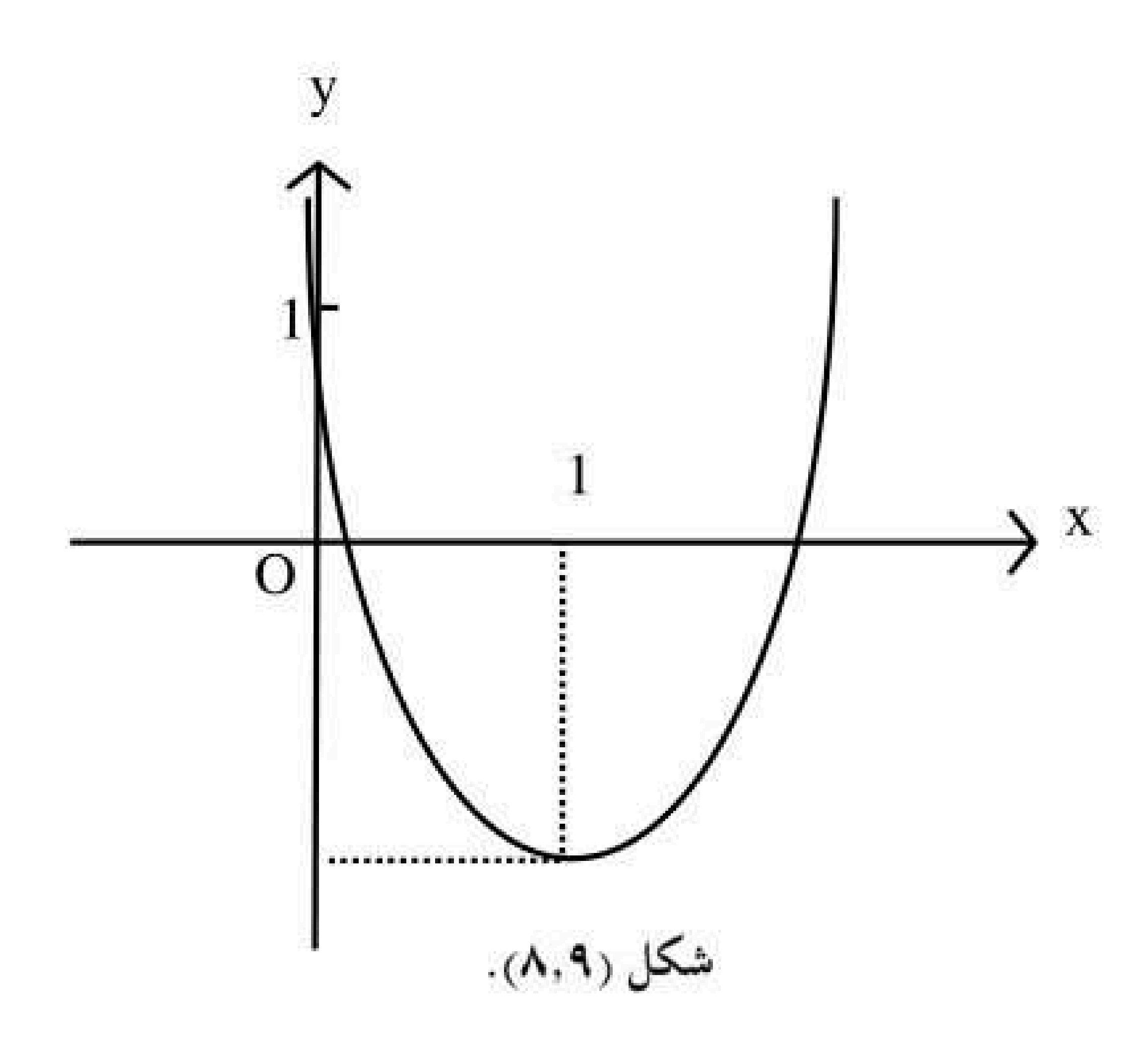
٢) المشتقة الثانية: $f''(x) = 12x^2$

جذر المشتقة: $x = 0$

إشارة المشتقة الثانية:



فترات التقعر: IR . لاحظ أن المنحنى عند النقطة الموافقة $x = 1$ يقع فوق المماس:



شكل (٨،٩).

مـــثـــال (٨،٧)

ارسم المنحني: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

الحـــــل

١) المشتقة الأولى: $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$= 4x(x^2 - 4)$

جذور المشتقة: $x = 0, x = \pm 2$

إشارة المشتقة الأولى:

x	$-\infty$		-2		0		2		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f(x)	∞	↘	0	↗	16	↘	0	↗	∞

٢)المشتقة الثانية: $f''(x) = 12x^2 - 16$

الجذران: $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

إشارة المشتقة الثانية:

$-\infty$	$+$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$+$	∞
	◡	$\frac{64}{9}$	◠	$\frac{64}{9}$	◡	

٣) نقاط التقاطع:

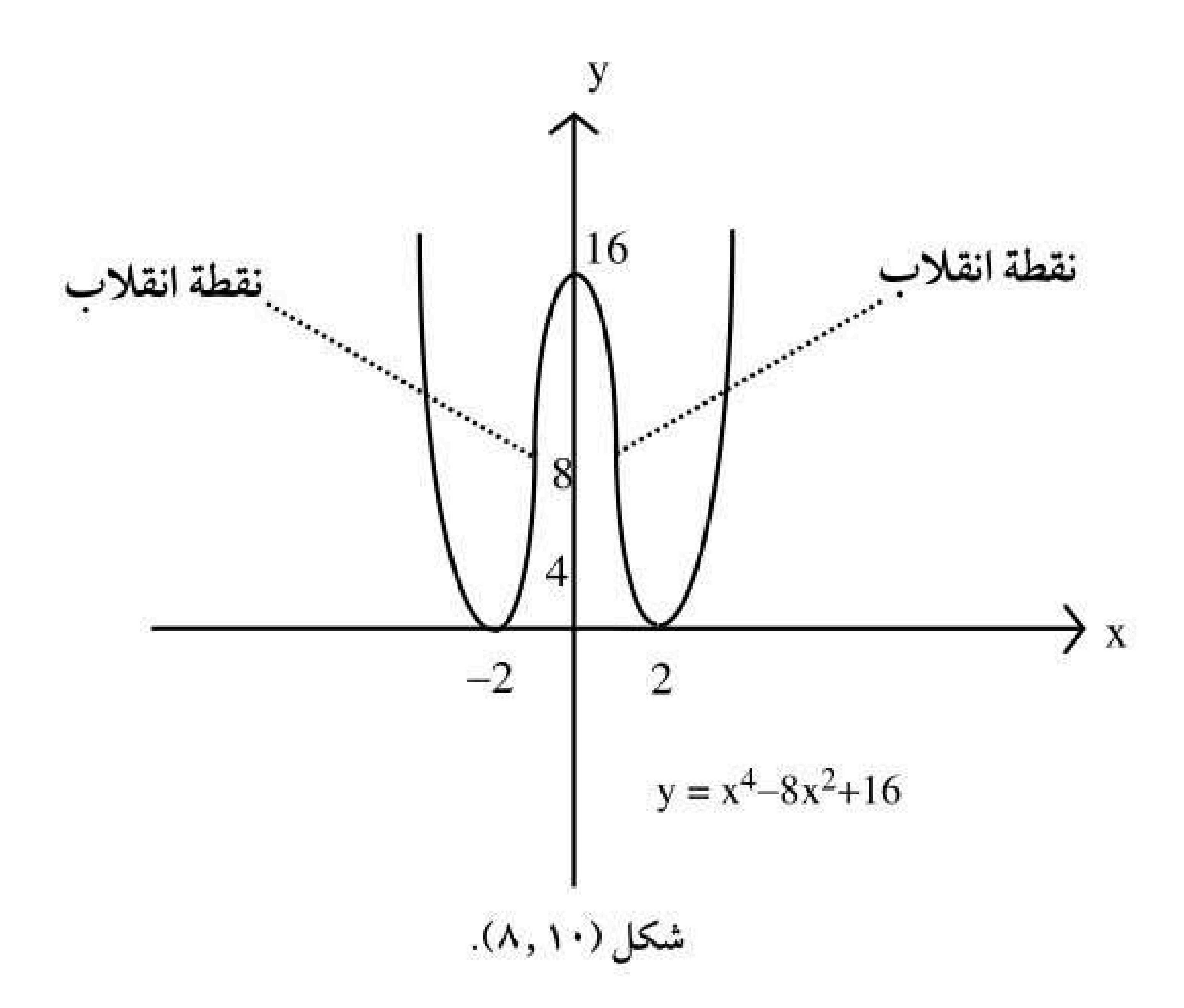
(أ) $y = 0 \Leftarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \Leftarrow (x^2 - 4)^2 = 0 \Leftarrow$

$x = \pm 2$. إذن نقطتا التقاطع: $(\pm 2,0)$

(ب) $x = 0 \Leftarrow y = 16$. إذن نقطة التقاطع مع المحور y = 0 هي:
.(0, 16)

لاحظ أن f دالة زوجية فالمنحني متناظر بالنسبة للمحور y.

٤)الرســــــــم:



شكل (٨,١٠).

مـــثـــال (٨,٨)

ارسم المنحني: $f(x) = x^4 - 2x^3$

الحـــــل

١)المشتقة الأولى: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

جذور المشتقة: $4x^3 - 6x^2 = 0 \Leftarrow 2x^2(2x-3) = 0 \Leftarrow$

$x = 0$ أو $x = \frac{3}{2}$

إشارة المشتقة الأولى:

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		∞
f '(x)		−	0	−	0	+	
f (x)	∞	↘	0	↘	$-\frac{27}{16}$	↗	∞

٢)المشتقة الثانية: $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$

الجذران هما: $x = 1$ ، $x = 0$

إشارة المشتقة الثانية:

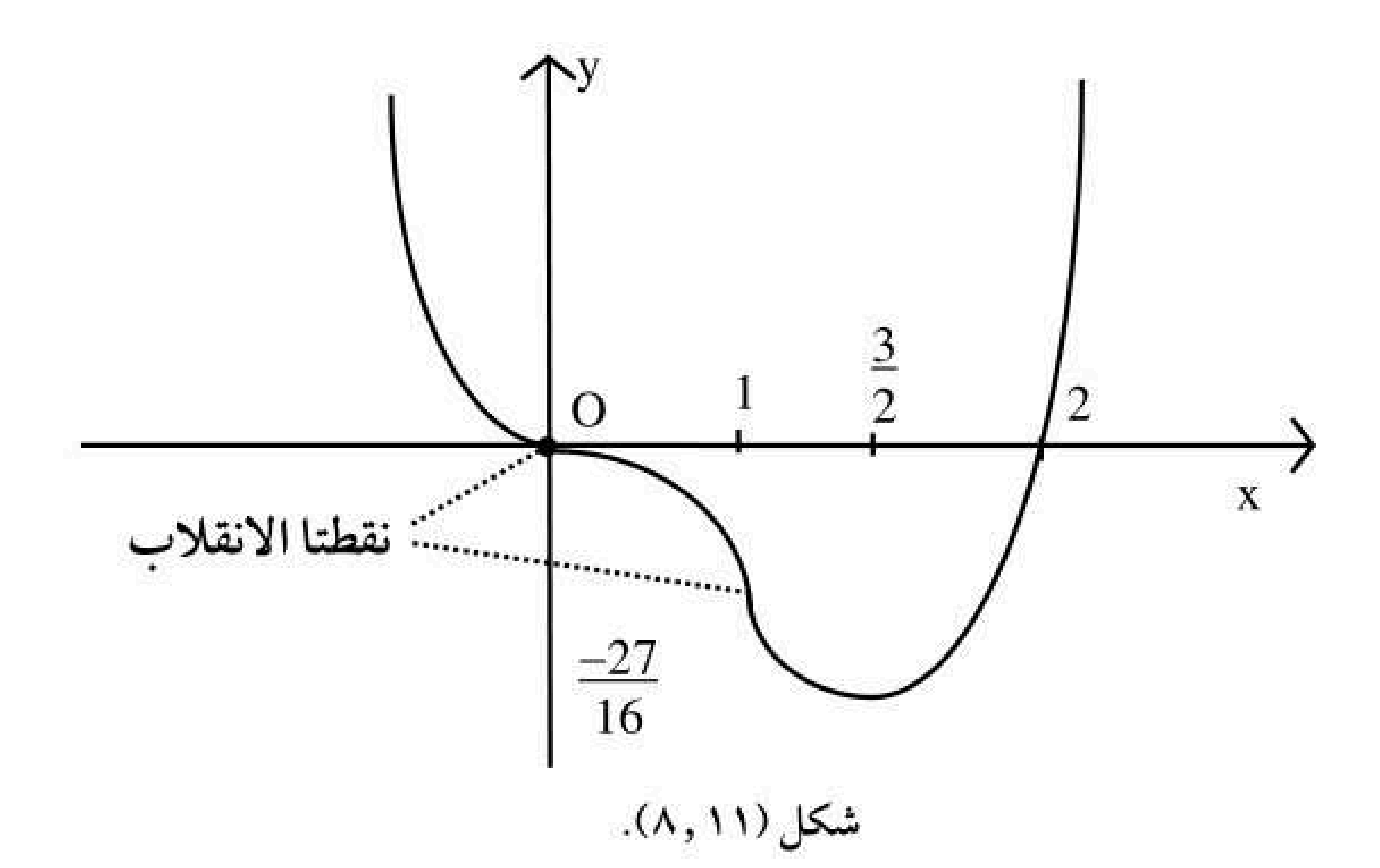
	$-\infty$	+	0	−	1	+	∞
إشارة المشتقة		∪	0	∩	−1	∪	

٣) نقاط التقاطع:

مع المحور x: $y = 0 \Rightarrow x^3(x-2) = 0 \Rightarrow$ 0 = x أو 2 = x. فنقطتا التقاطع هما: (0,0) ، (2,0).

مع المحور y:(0,0) هي نقطة التقاطع الوحيدة.

٤)الرسم:



شكل (١١ ,٨).

(ب) رسم الدوال الكسرية (البسط والمقام كثيرة الحدود)

مـــثـــال (٨،٩)

ارسم المنحني الذي معادلته:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$$

الحـــــل

١) المستقيمات المقاربة:

$x\to 1^{+} \Rightarrow f(x)\to\infty$. إذن: x = 1 مستقيم مقارب رأسي.

$x\to\pm\infty \Rightarrow f(x)\to 2$. إذن: y = 2 مستقيم مقارب أفقي.

٢)المشتقة الأولى:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)-(2x-1)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{-1}{(x-1)^2}=-(x-1)^{-2}$$

إشارة المشتقة الأولى:

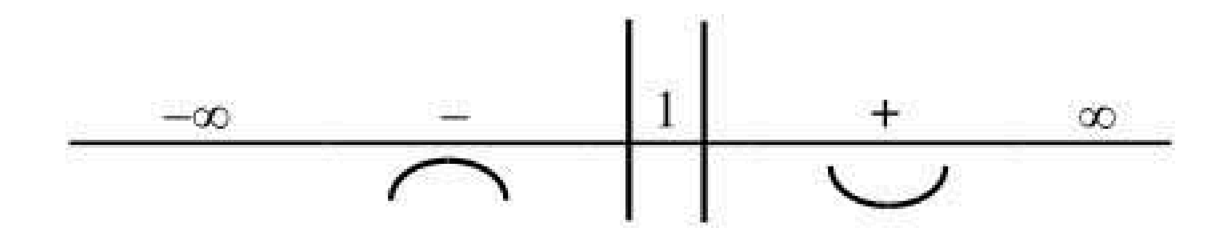
x	$-\infty$			1			∞
f ′(x)		−				−	
f(x)	2	↘	$-\infty$		∞	↘	2

فالدالة متناقصة على المجموعة IR-{1}، وليس للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية.

٣)المشتقة الثانية:

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

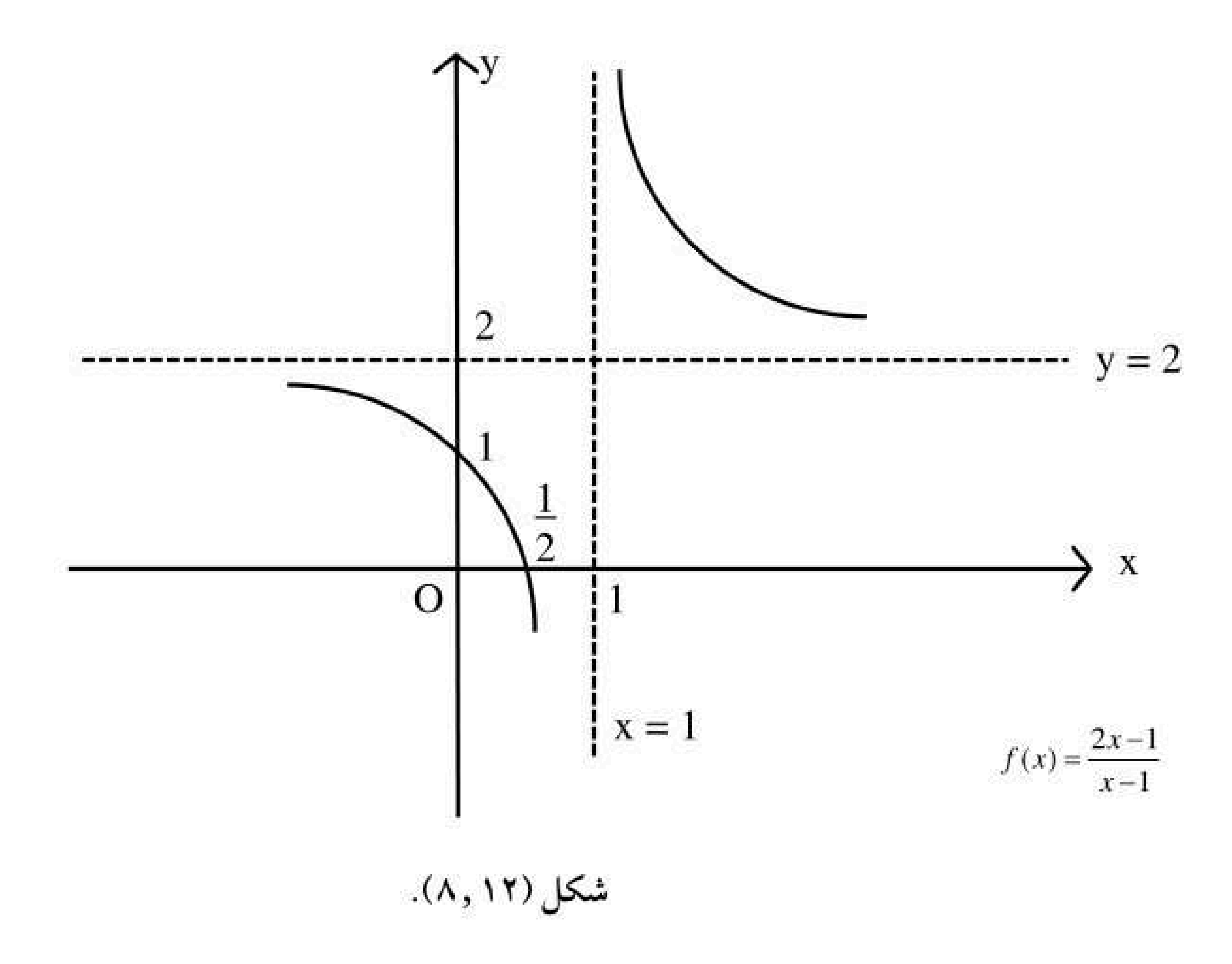
إشارة المشتقة الثانية:



لا يوجد نقط انقلاب للمنحني (الدالة غير معرفة عند x = 1).

٤) نقاط التقاطع مع المحورين: $(\frac{1}{2},0)$، $(0,1)$

٥) الرســـــم:



شكل (٨,١٢).

ملحوظـــة (٨,٣)

من الممكن البرهان على أن أي منحن من الشكل:

$$(ad - bc \neq 0) \quad c \neq 0, f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

هو قطع زائد نقطة تناظره هي نقطة تقاطع مستقيميه المقاربين.

مــثــال (٨,١٠)

ارسم المنحني التالي:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

الحـــــل

١) المستقيمات المقاربة: $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to 0$

فللمنحني مستقيم مقارب وحيد هو: $y = 0$

٣) المشتقة الأولى: $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$

جذرا المشتقة: $x = \pm 1$

إشارة المشتقة الأولى:

x	$-\infty$		-1		1		∞
f '(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	
f(x)	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

إذن: $f(-1) = -\frac{1}{2}$ قيمة صغرى محلية، $f(1) = \frac{1}{2}$ قيمة عظمى محلية.

٣)المشتقة الثانية: $f''(x) = \dfrac{-2x(1 + x^2)^2 - (1 - x^2)[2(1 + x^2)(2x)]}{(1 + x^2)^4}$

بالقسمة للبسط والمقام على $1 + x^2$، نجد:

$$f''(x) = \frac{-2x[(1 + x^2) + 2(1 - x^2)]}{(1 + x^2)^3} = \frac{-2x(3 - x^2)}{(1 + x^2)^3}$$

جذور المشتقة: $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$

إشارة المشتقة الثانية:

$-\infty$	$-$	$-\sqrt{3}$	$+$	0	$-$	$\sqrt{3}$	$+$	∞
	⌒	$\frac{-\sqrt{3}}{4}$	⌣	0	⌒	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	⌣	

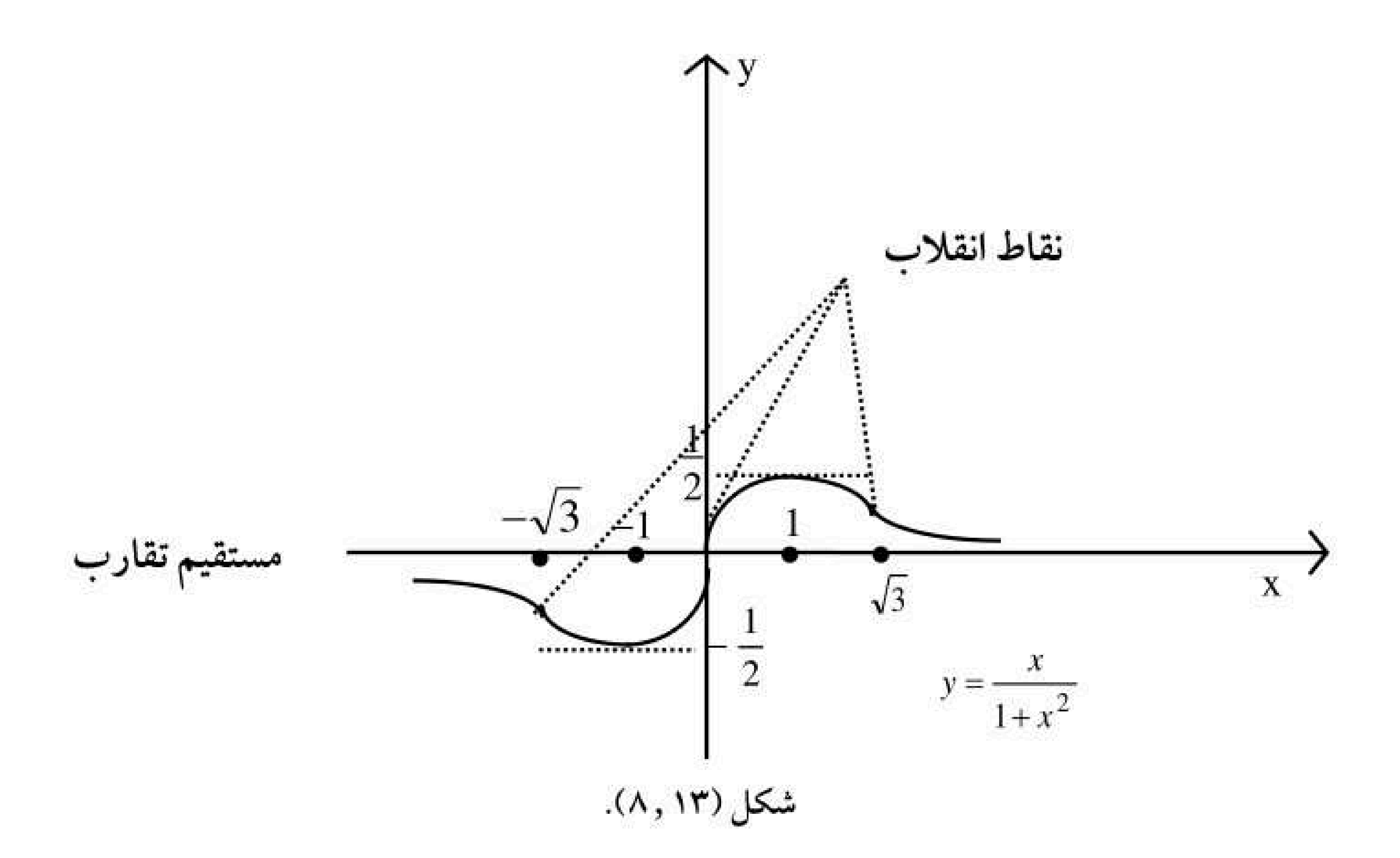
للمنحني ثلاث نقط انقلاب، هي:

$$(0,0),(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}),(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4})$$

٤) الدالة f دالة فردية فالمنحني متناظر بالنسبة لنقطة الأصل.

٥) التقاطع مع المحاور الإحداثية: للمنحني نقطة تقاطع وحيدة مع مجموعة المحـــــاور الإحداثية وهي النقطة (0,0).

٦)الرســــم:



شكل (١٣, ٨).

مــثـــال (١١, ٨)

ارسم المنحني الذي معادلته:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

الحـــــل

١) المستقيمات المقاربة:

$x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to 1$ ، إذن $y = 1$ مستقيم مقارب.

$x \to 1^{+} \Rightarrow f(x) \to \infty$ ، إذن $x = 1$ مستقيم مقارب.

$x \to -1^{+} \Rightarrow f(x) \to -\infty$ ، إذن $x = -1$ مستقيم مقارب.

٢) المشتقة:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

جذور المشتقة: $x = 0$

إشارة المشتقة الأولى:

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	
f(x)	1	↗ ∞	‖	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$	‖	∞ ↘	1

$f(0) = -1$ قيمة عظمى محلية للدالة.

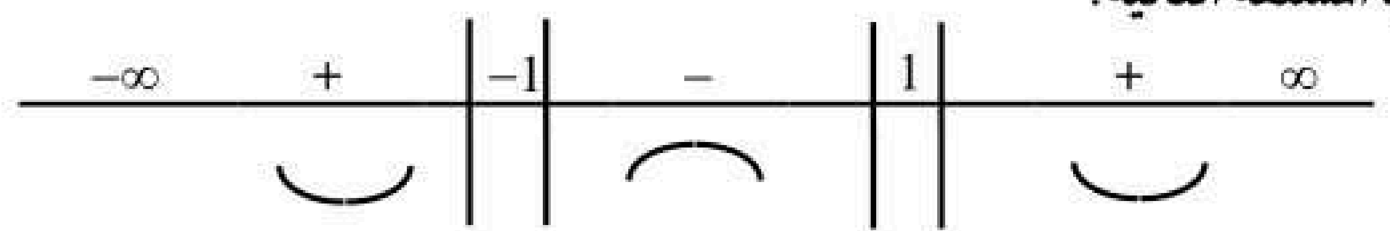
٣) المشتقة الثانية:

$$f''(x) = -4\frac{(x^2-1)^2 - x[2(x^2-1)(2x)]}{(x^2-1)^4}$$

بتقسيم البسط والمقام على $x^2 - 1$ ، نجد:

$$f''(x) = -4\frac{x^2-1-4x^2}{(x^2-1)^3} = 4\frac{(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

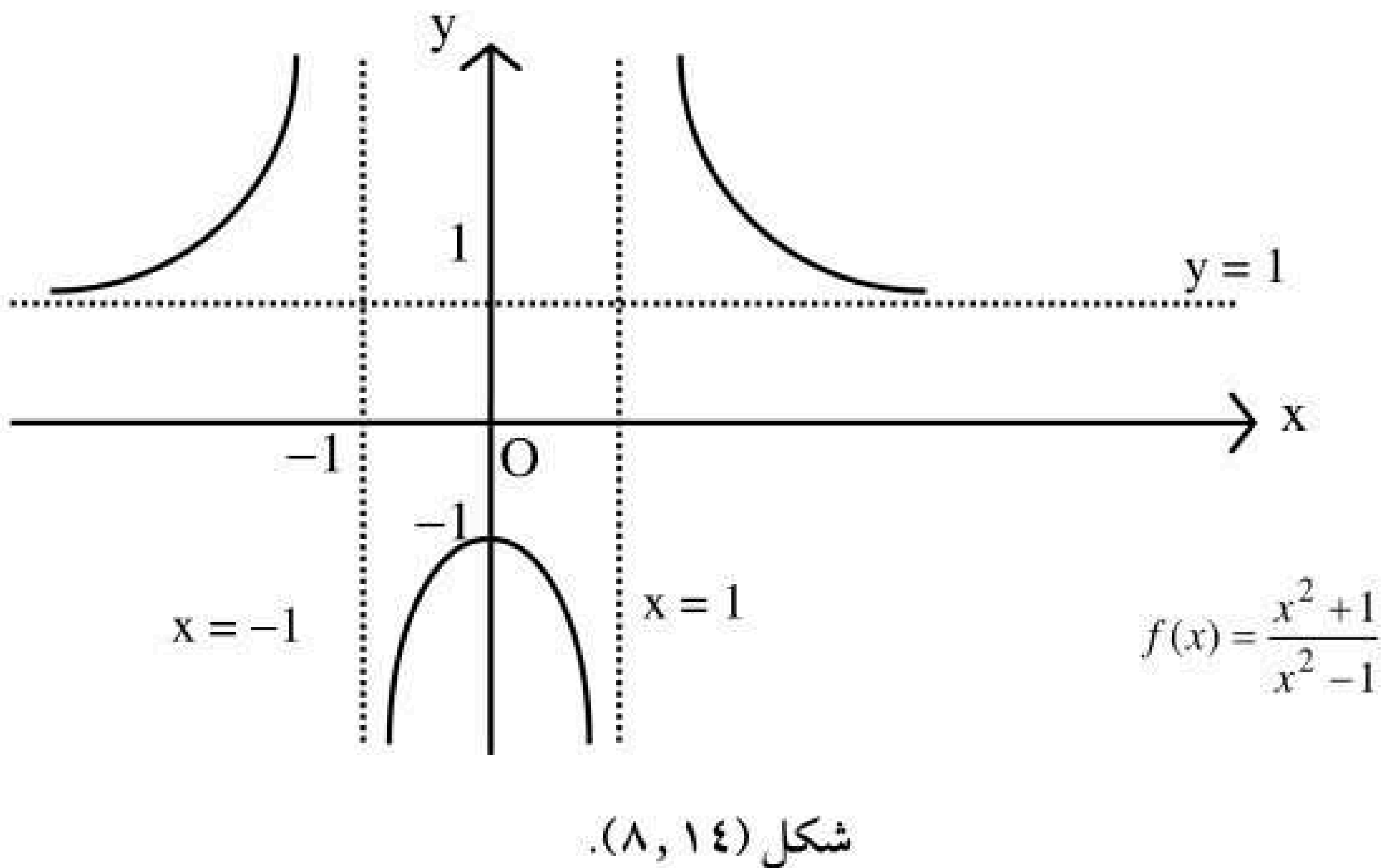
إشارة المشتقة الثانية:



لا يوجد نقاط انقلاب للمنحني

٤) المنحني متناظر بالنسبة للمحور y.

٥)الرســـــم:



شكل (٨,١٤).

(ج) رسم الدوال الجبرية

مـــثـــال (٨,١٢)

ارسم المنحني الذي معادلته:

$$y=f(x)=x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}(x+4)$$

الحـــــل

١) المشتقة الأولى:
$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}})$$
$$=\frac{4}{3}(x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}})=\frac{4(x+1)}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

الأعداد الحرجة: $x=-1\Leftarrow f'(x)=0$

والمشتقة غير موجودة عند x = 0 (الدالة معرفة عند x = 0)

فالعددان الحرجان هما: 0, − 1

إشارة المشتقة الأولى:

x	−∞		−1			0			∞
f ′(x)		−	0	+	+∞	‖	+∞	+	
f(x)	∞	↘	−3	↗		0		↗	∞

إذن: $f(-1) = -3$ قيمة صغرى محلية للدالة.

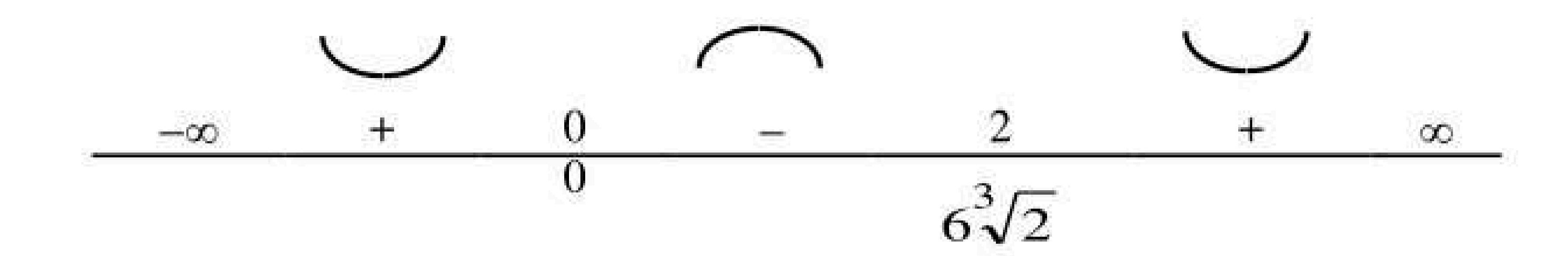
٢) المشتقة الثانية:

$$f''(x) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}\right)$$
$$= \frac{4}{9}\left(x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{5}{3}}\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{x^{\frac{5}{3}}}\right)$$
$$= \frac{4}{9}\frac{(x-2)}{x^{\frac{5}{3}}}$$

جذر المشتقة: $x = 2$

والمشتقة الثانية غير موجودة عند $x = 0$ ($x = 0$ من مجال الدالة).

إشارة المشتقة الثانية:



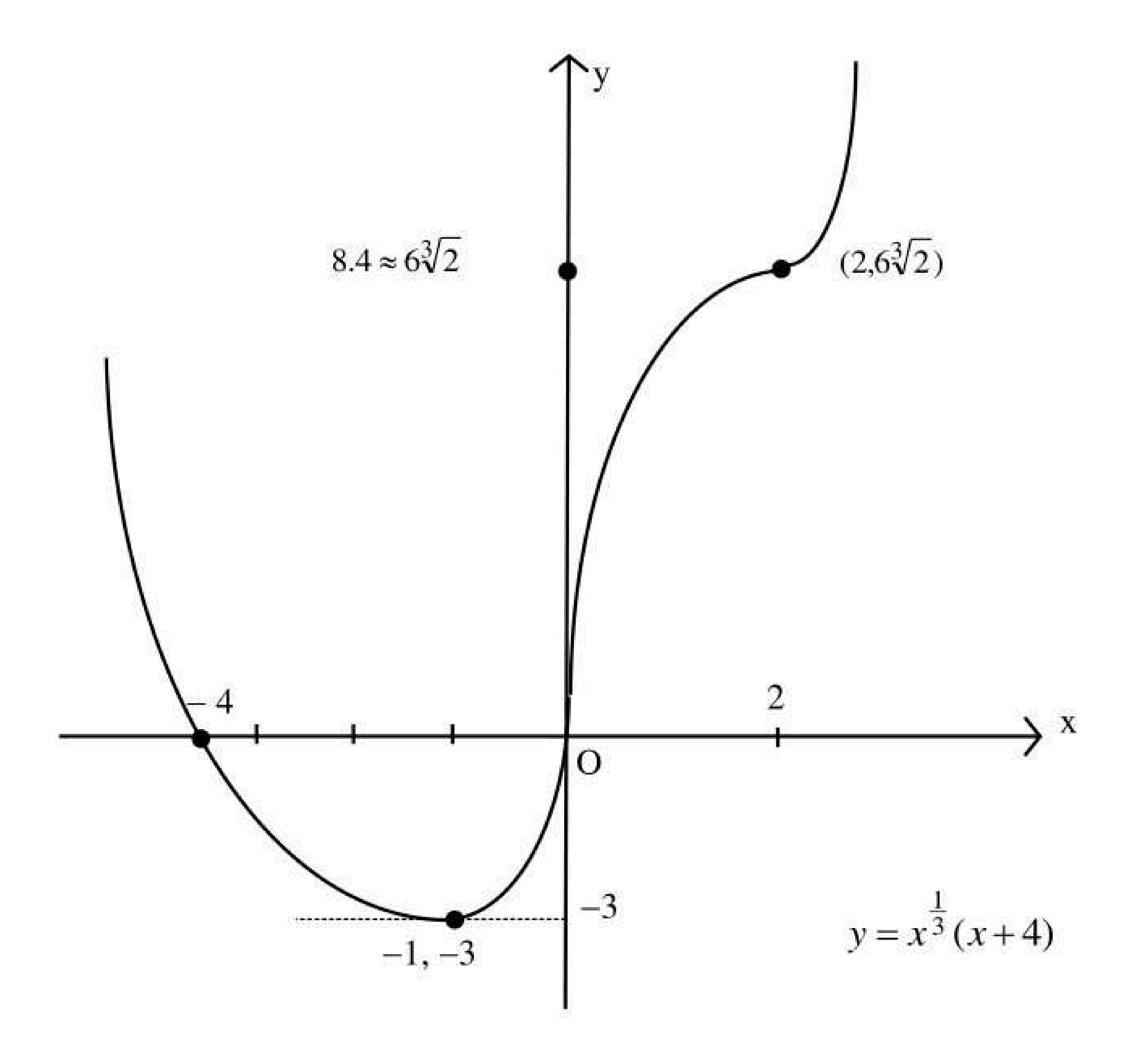
نقطتا الانقلاب: $(0,0)$, $(2,6\sqrt[3]{2})$

٣) نقاط التقاطع:

$$\left.\begin{array}{r} x = -4 ، x = 0 \Leftarrow y = 0 \\ y = 0 \Leftarrow x = 0 \end{array}\right\}$$

إذن، نقاط التقاطع: $(-4,0)$, $(0,0)$

٤) الرســــــم:



شكل (٨,١٥).

مــثــال (٨,١٣)

ارسم المنحني: $f(x) = x^{\frac{4}{5}}$

الحــــل

١) المشتقة الأولى: $f'(x) = \frac{4}{5} x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

العدد الحرج الوحيد x = 0 (لاحظ أن x = 0 نقطة من مجال الدالة).

إشارة المشتقة الأولى:

x	$-\infty$		$-\infty$ || $+\infty$ 0		∞
$f'(x)$		$-$	$-\infty$ || $+\infty$	$+$	
f(x)	∞	↘	0	↗	∞

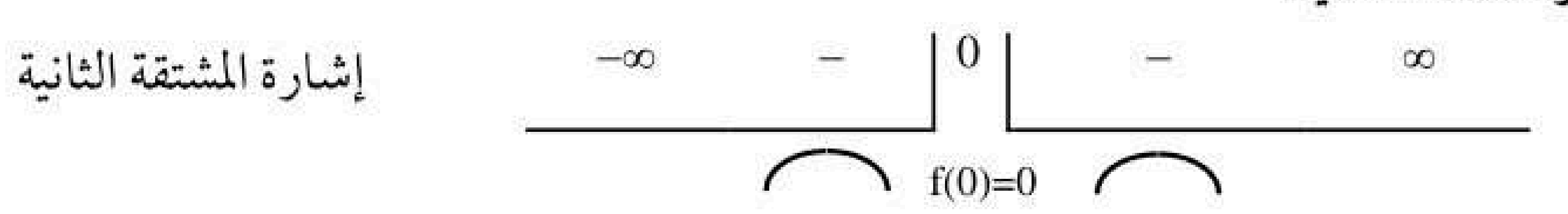
لاحظ أن: $f(0) = 0$ قيمة صغرى محلية للدالة.

٢)المشتقة الثانية:

$$f''(x) = \frac{-4}{25}x^{-\frac{6}{5}}$$
$$= \frac{-4}{25}\frac{1}{\sqrt[5]{x^6}}$$

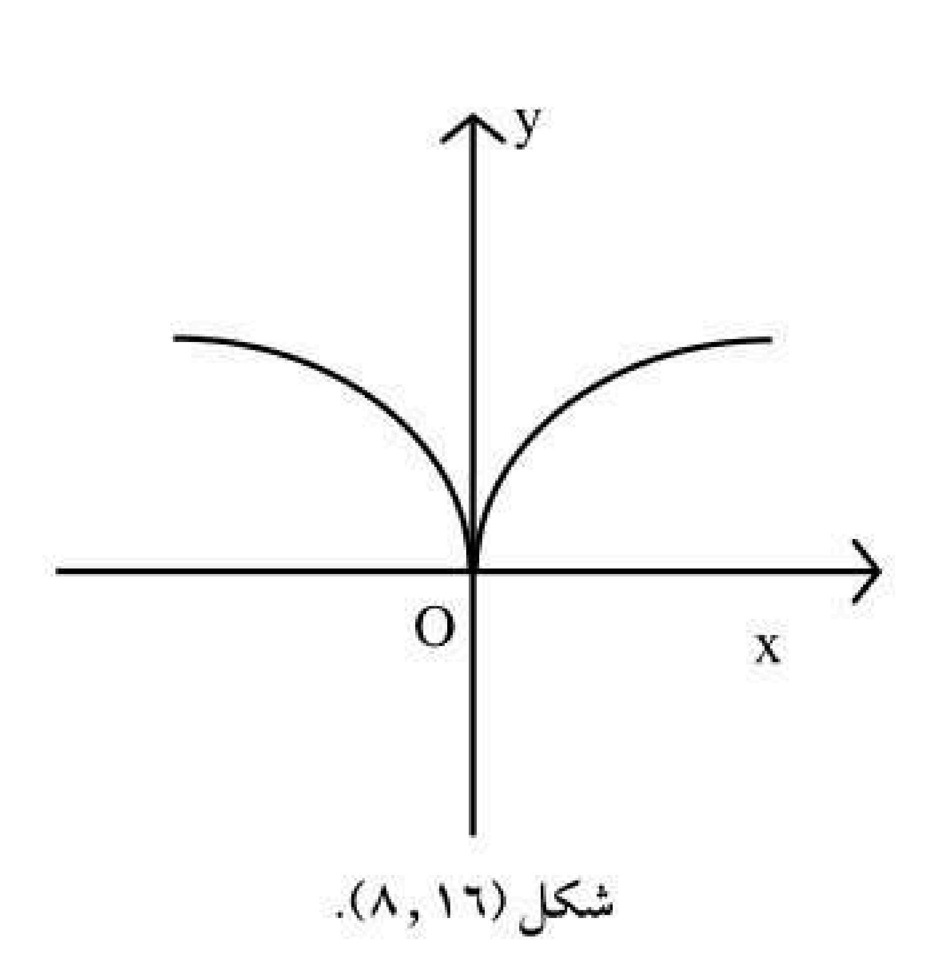
إشارة المشتقة الثانية:

إشارة المشتقة الثانية



٣) الرســـــم:

لاحظ أن المنحني متناظر بالنسبة للمحور y وأن (0,0) هي نقطة التقاطع الوحيدة مع محوري الإحداثيات.



شكل (١٦ ,٨).

نسمي النقطة 0 نقطة بروز للمنحني لأن:

$\lim_{x\to 0^{+}} f'(x) = \infty, \lim_{x\to 0^{-}} f'(x) = -\infty$ (يصح أن تكون النهاية عن يسار ∞+ وعن يمين ∞−)

والمنحني يمس محور الصادات عند 0 عن يمين ويسار.

(د) رســـم الدوال المثلثية

مــثــال (٨,١٤)

ارسم المنحني الذي معادلته:

$$y = f(x) = \tan 2x$$

الحـــل

١) من الملاحظ أن الدالة f دالة دورية ودورها $\frac{\pi}{2}$ ، لأن:

$$f(x+\frac{\pi}{2}) = \tan 2(x+\frac{\pi}{2}) = \tan(2x+\pi) = \tan 2x$$
$$= f(x)$$

يكفي رسمها على الفترة $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ وبتكرار هذا الجزء يمنة ويسرة نحصل على المنحني بأكمله.
المنحني متناظر بالنسبة لنقطة الأصل لأن دالة الظل دالة فردية.

٢)من الملاحظ أن:

$x \to \frac{\pi^{-}}{4} \Rightarrow f(x) \to \infty$ ، إذن: $x = \frac{\pi}{4}$ مستقيم مقارب.

وأن: $x \to -\frac{\pi^{+}}{4} \Rightarrow f(x) \to -\infty$ ، إذن: $x = -\frac{\pi}{4}$ مستقيم مقارب.

٣)المشتقة تساوي: $f'(x) = 2\sec^2 2x$

إشارة المشتقة:

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		+	
f(x)	$-\infty$	↗	∞

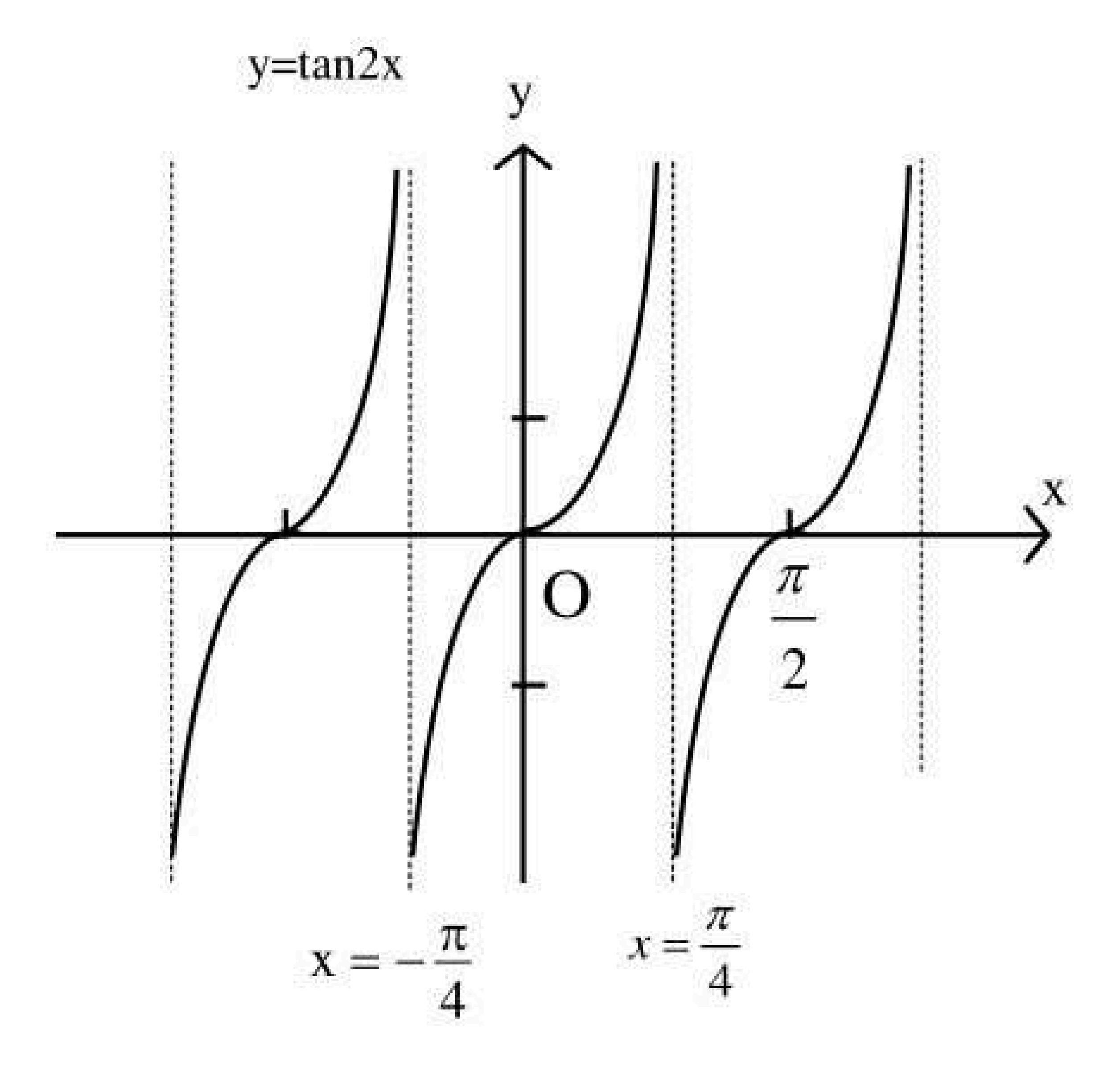
٤) المشتقة الثانية: $f''(x) = 8\sec^2 2x \tan 2x$

إشارة $f''(x)$	$-\frac{\pi}{4}$	$-$	0	$+$	$\frac{\pi}{4}$
		⌒	f(0)=0	◡	

لاحظ أن (0,0) هي نقطة انقلاب للمنحني.

٥) نلاحظ أيضاً أن (0,0) هي نقطة التقاطع الوحيدة مع محوري الإحداثيات.

٦) الرســــــم:



شكل (٨,١٧).

تمـــاريـــن (١ , ٨)

أوجد المستقيمات المقاربة الأفقية والعمودية فيما يلي:

١) $y=\dfrac{1}{x-1}$

٢) $y=\dfrac{2x-3}{x-4}$

٣) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$

٤) $y=\dfrac{x}{(x-1)(x^4+1)}$

٥) $y=\dfrac{x^3}{x(x-1)(x^2+5)}$

٦) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

٧) $y=\dfrac{1}{(x^2-4)(x^2-9)}$

٨) $y=\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$

٩) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

١٠) $y=\dfrac{x\sin x}{x^2+2x}$

١١) $y=\tan^{-1}x$

١٢) $y=\dfrac{x^2}{x^3-x}$

١٣) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-1}}$

١٤) $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x+2}}$

١٥) $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

١٦) $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

١٧) $y=\dfrac{x}{x^2+4}$

١٨) $y=\dfrac{x}{x^2-9}$

١٩) $y=\sec x$

٢٠) $y=\csc x$

٢١) $y=\cot^{-1}x$

٢٢) $y=\sec^{-1}x$

٢٣) $y=\csc^{-1}x$

٢٤) $y=\dfrac{\tan^{-1}x}{x}$

٢٥) $y=\tan x$

٢٦) $y=\cot x$

ارسم المنحنيات المعرفة في التمارين (٢٧) وحتى (٣٨) مبينًا فترات التزايد والتناقص، القيم القصوى المحلية، فترات التقعر والتحدب، نقط الانقلاب، التناظرات الممكنة، المستقيمات المقاربة، نقاط التقاطع إن أمكن:

٢٧) $f(x)=x^2-2x+1$ ٢٨) $f(x)=(x-2)(x-4)$

٢٩) $f(x)=x^3+1$ ٣٠) $f(x)=2x^3-6x+1$

٣١) $f(x)=x^2(x+1)$ ٣٢) $f(x)=(x-1)^3$

٣٣) $f(x)=x^4+4$ ٣٤) $f(x)=x^4-4x$

٣٥) $f(x)=x^4-2x^2$ ٣٦) $f(x)=3x^4-4x^3$

٣٧) $f(x)=\left|x^2-2x\right|$ ٣٨) $f(x)=x^5-5x$

٣٩) ارسم المنحنيات المعرفة في التمارين: ٢، ٩، ١٢، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣، ٢٥، ٢٦.

ارسم المنحنيات المعرفة بالمعادلات الآتية:

٤٠) $f(x)=\sin 3x$ ٤١) $f(x)=\cos 4x$

٤٢) $f(x)=\tan^{-1} 2x$ ٤٣) $f(x)=\tan 4x$

ارسم المنحنيات المعرفة بالمعادلات الآتية:

٤٤) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}+3$ ٤٥) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$

٤٦) $f(x)=5x^{\frac{1}{5}}+\frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}$ ٤٧) $f(x)=8x^{\frac{1}{7}}+x^{\frac{8}{7}}$

٤٨) $f(x)=\left|x^2-5x+6\right|$ ٤٩) $f(x)=\left|\sin x\right|$

الفصل التاسع

التطبيقات
APPLICATIONS

(٩,١) معدلات التغير
The rates of change

لتكن f دالة معرفة على الفترة المفتوحة: I = (a,b) بالمعادلة:

$$y = f(x)$$

نعرف متوسط التغير للدالة (The average rate of change)بين الموضع الابتدائي A(x, f(x)) والموضع B(x + h, f(x + h)) بالشكل:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (x, x+h \in I)$$

إذا كانت نهاية الكسر السابقة موجودة عندما $h \to 0$ فإننا نسمي هذه النهاية بمعدل التغير للدالة عند x.

مثال (٩,١)

تتحرك نقطة وفقا للمعادلة الزمنية:

$$S = 16\,t^2 \qquad \text{(الزمن مقدر بالثانية والمسافة بالقدم)} \qquad (٩,١)$$

(حيث t يمثل الزمن والمتغير S يمثل المسافة المقطوعة ابتداء من بدء الحركة وخلال زمن قدره t).

أوجد متوسط التغير لهذه الدالة بين الموضعين الموافقين $t_1 = 1, t_2 = 4$. ثم أوجد معدل التغير في اللحظة t = 3 مقدرًا بالقدم لكل ثانية (ft/sec).

الحــــل

متوسط التغير يساوي:

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{16(4)^2-16}{3}=\frac{15(16)}{3}=80ft/\sec$$

(نســــمي متوسط التغير هنا بالسرعة المتوسطة). معدل التغير في اللحظة $t = 3$ (السرعة عند $t = 3$)، هو:

$$.\ S'(3)=32t\Big|_{t=3}=96ft/\sec$$

ملحــوظــة (٩,١)

تمثل المعادلة: $S=\frac{1}{2}gt^2$ (g تسارع الجاذبية الأرضية).

المعادلة الزمنية لحركة جسم يسقط سقوطًا حرًّا وبدون سرعة بِدء ابتداء من نقطة معينة وتمثل S المسافة المقطوعة ابتداء من بدء الحركة. لو عوضنا عن g بما يساويها لحصلنا على المعادلة (٩,١).

مــثــال (٩,٢)

بدأ المطر ينهمر على بحيرة سد، فلاحظ الفني أن الماء يرتفع في بحيرة السد بانتظام وبمعدل تغير قدره 0.01 سم/ ثا (سرعة ارتفاع الماء). إذا كان ارتفاع الماء لحظة هطول المطر 2 متر والارتفــاع المسمــوح أن يبلغه الماء هو 11 مترا، وإذا فرضنا أن المطر استمر في النزول خمس ساعات وبنفـــس المعدل، فهل يدق الفــــني جرس الإنذار منذرًا بالخطر؟

الحــــل

بما أن معدل ارتفاع الماء معدل منتظم، فإن الزمن اللازم لارتفاع الماء تسعة أمتار فوق معدله يساوي:

$$\text{الزمــــن}=\frac{\text{المسافـــة}}{\text{السرعـــة}}=\frac{900}{0.01}=90000\ \text{ثانية}$$

أو: $\frac{90000}{3600}=\frac{900}{36}=\frac{100}{4}=25$ ساعة

إذن لن يحتاج الفني لدق جرس الإنذار.

مــثــال (٣, ٩)

سلم طوله 10 أمتار ينزلق طرفه على أرض أفقية بمعدل تغير قدره 1 سم/ ثا. فما معدل انزلاق طرفه الآخر على الحائط العمودي في اللحظة التي يبعد بها هذا الطرف عن الأرض مسافة قدرها 6 أمتار.

الحــــل

نفرض أن:

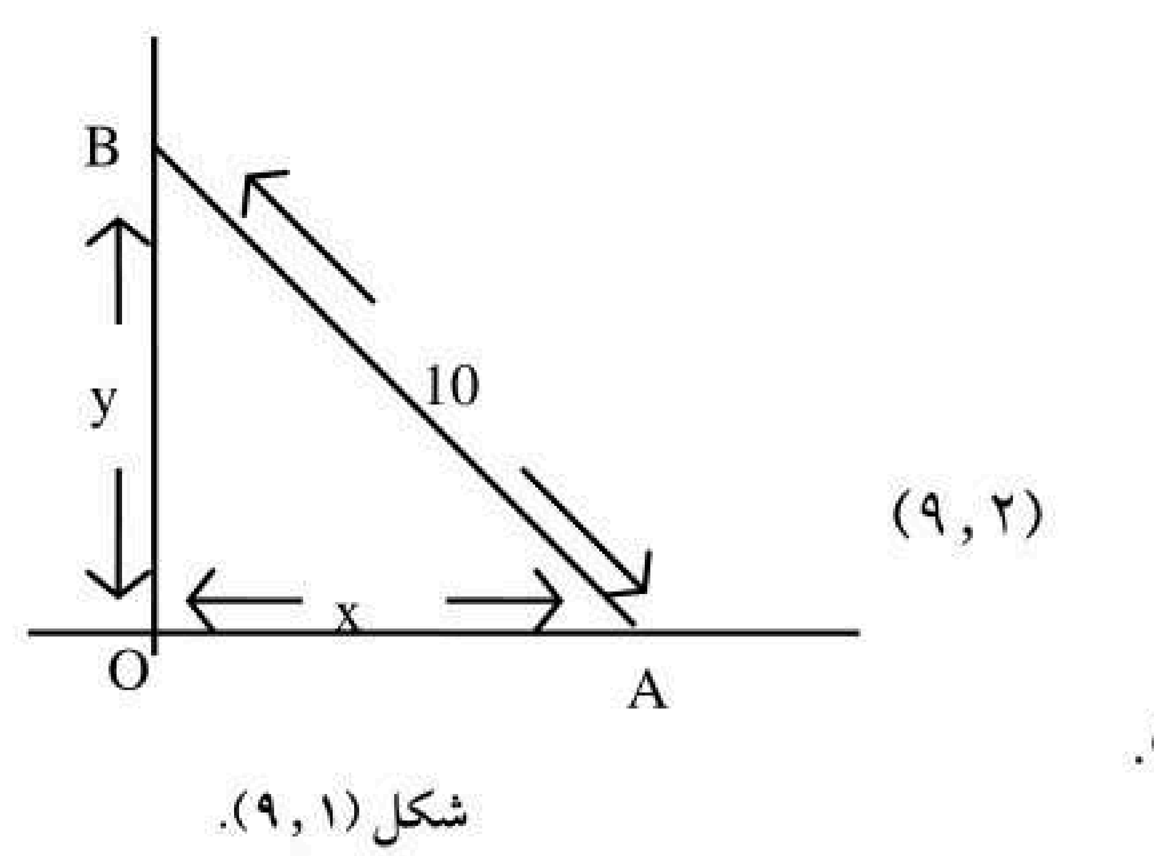
$|OB| = y$ ، $|OA| = x$

حسب نظرية فيثاغورث:

$$x^2 + y^2 = 100 \qquad (٩, ٢)$$

نعلم أن معدل انزلاق A هو:

$\frac{dx}{dt} = 0.01$ (متر لكل ثانية، m/s).



شكل (١ ,٩).

لحساب $\frac{dy}{dt}$ معدل انزلاق B في اللحظة التي يكــون فيها y = 6، نشتق طــرفي المعادلة (٢ , ٩) بالنسبة للزمن t، فنجد:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \qquad (٩, ٣)$$

وعندما y = 6، فإن x = 8 وذلك استنادا للعلاقة (٢ , ٩). بالتعويض في المعادلة (٣ , ٩)، نجد: $2(8)(0.01) + 2(6)\frac{dy}{dt} = 0 \Leftarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{0.04}{3} m/\sec$.

مــثــال (٤ , ٩)

تذوب كرة ثلجية محافظة على شكلها. فإذا كان معدل تناقص طول نصف قطرها يساوي $\frac{1}{9} cm/s$ ، فما معدل تناقص حجمها في اللحظة التي يكون طول نصف قطرها يساوي 3cm. ما هو معدل تناقص مساحتها السطحية عند ذلك؟

الحـــل

$= V = \frac{4}{3}\pi r^3$ حجم الكرة (The volume of sphere)

(r طول نصف القطر)، إذن:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi(3)^2(\frac{1}{9}) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi cm^3 / \sec$$

مساحة الكرة(The Area of sphere): $S = 4\pi r^2$ ، ومنه:

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt} = 8\pi(3)\frac{1}{9} = \frac{8}{3}\pi\, cm^2 / \sec$$

مــثــال (٩,٥)

انطلقت سيارة من النقطة A شرقا بمعدل تغير قدره 60 كم/ سا، وانطلقت شمالاً من نفس النقطة وبنفس الوقت سيارة أخرى بمعدل تغير قدره 80 كم/ سا. فما معدل التباعد بينهما بعد ساعة واحدة من نقطة انطلاقهما؟

الحـــل

بفرض أن موقع السيارة الأولى عند اللحظة t يقع على بعد x من نقطة البدء A. وأن موقع السيارة الثانية يقع على بعد y من النقطة A، وبفرض أن: $z = |CB|$، فإن:

$$z^2 = x^2 + y^2 \qquad (٩,٤)$$

لنشتق الطرفين بالنسبة للزمن فنجد:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \qquad (٩,٥)$$

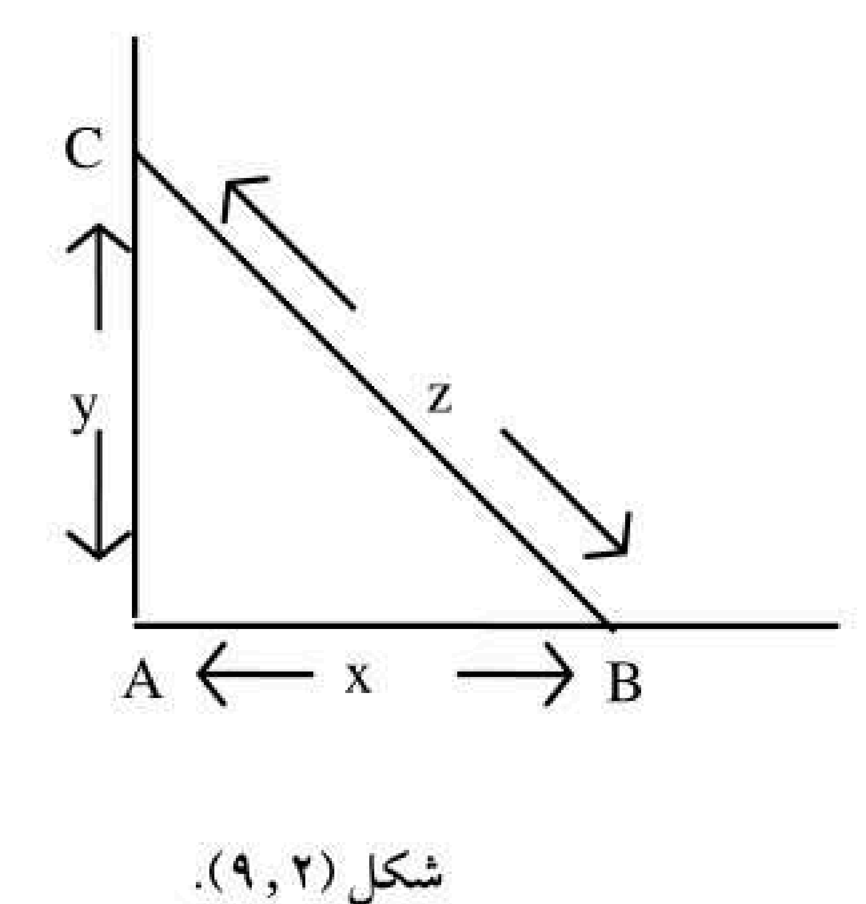
بعد ساعــة من نقطــة انطلاقهما، فإن:

y = 80 ،x = 60

ومن العلاقـــة (٩,٤)، نجد أن:

z=100. وبما أن $\frac{dx}{dt} = 60$ ، $\frac{dy}{dt} = 80$.

وبالتعويض في العلاقة (٩,٥)، نجد:



شكل (٩,٢).

$$\frac{dz}{dt} = \frac{60(60) + 80(80)}{100} = 100$$

فمعدل التباعد يساوي 100 كم/ سا.

مـــثـــال (٩,٦)

فرق الجهد في دارة كهربية يساوي 100 فولت. إذا رمزنا لشدة التيار الكهربائي بالرمز I مقدرة بالأمبير وللمقاومة بالرمز R مقدرة بالأوم، فأوجد معدل تغير شدة التيار بالنسبـــة للمقاومة بوجه عام ثم أوجد هذا المعدل إذا كان: R=15.

الحـــــل

العلاقة بين فرق الجهد وشدة التيار والمقاومة هي:

$$I = \frac{100}{R}$$

إذن معدل تغير I بالنسبة للمقاومة R هو: $\frac{dI}{dR} = -\frac{100}{R^2}$ ، وعندما R = 15،

فإن: $\frac{dI}{dR} = -\frac{100}{225} = -\frac{4}{9}$

إذن: عندما R = 15، فإن شدة التيار تتناقص بمعدل تغير قدره $\frac{4}{9}$ أمبير لكل أوم.

مـــثـــال (٩,٧)

يُصب سائل (liquid)في مخروط دوراني (circular cone)طول نصف قطر قاعدته يساوي 8cm وارتفاعه12 cm(altitude). إذا كان:

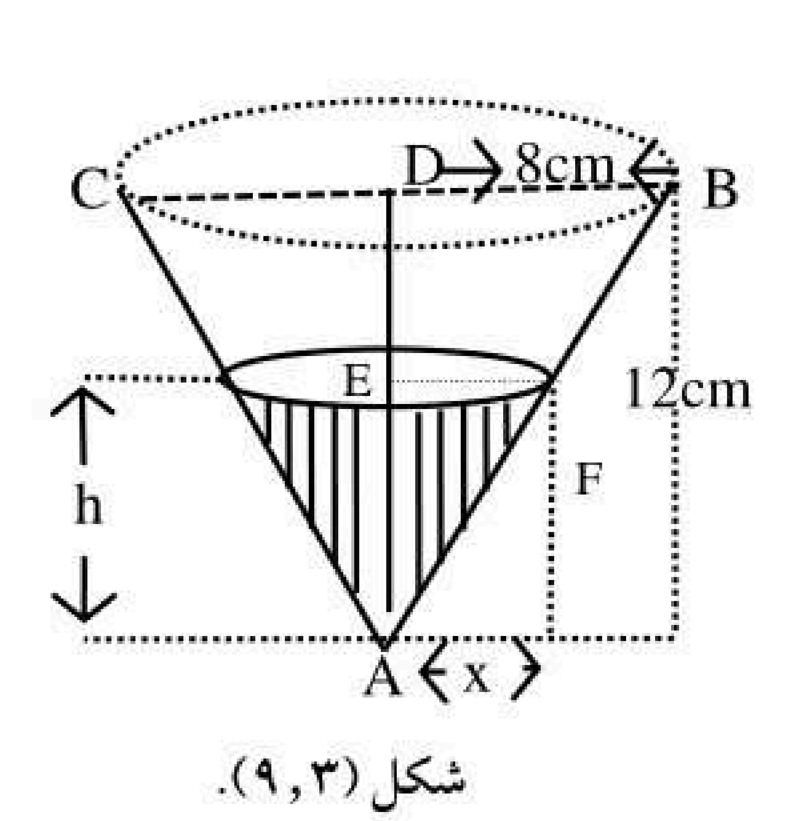
معدل تغير حجم السائل المنسكب يساوي $\frac{4\pi}{9} cm^3/s$ ، فأوجد معدل ارتفاع السائل في المخروط في اللحظة التي يكون فيها ارتفاع السائل يساوي 5cm.

الحـــــل

نفـــرض أن طــــول نصف قطر مخروط السائــــل يســــاوي x وأن ارتفاعه يساوي h، عندئذ فإن حجم مخروط السائل يساوي:

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 h \qquad (٩,٦)$$

من تشابه المثلثين AEF، ADB، نجد:



شكل (٩,٣).

$$\frac{\text{ارتفاع مخروط السائل}}{\text{ارتفاع المخروط}} = \frac{h}{12} = \frac{x}{8} = \frac{\text{طول نصف قطر مخروط السائل}}{\text{طول نصف قطر المخروط}}$$

ومنه: $x = \frac{2}{3}h$. بالتعويض في العلاقة (٩,٦)، نجد:

$$V = \frac{1}{3}\pi(\frac{4}{9}h^2).h = \frac{4}{27}\pi h^3$$

لنشتق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن t، فنجد:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

لكن: h = 5، $\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{9}$. بالتعويض في المساواة السابقة، نجد:

$$\frac{4\pi}{9} = \frac{4\pi}{9}(25)\frac{dh}{dt} \Leftarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{25}$$

إذن: معدل تغير ارتفاع السائل هو: 0.04 cm/sec.

مـثـال (٩,٨)

صفيحة معدنية مستطيلة الشكل تتمدد تحت تأثير الحرارة محافظة على شكلها. إذا كان معدل تغير طولها يساوي 0.01سم/ ثا، ومعدل تغير عرضها يساوي 0.02سم/ ثا. فما معدل تغير مساحتها في اللحظة التي يكون طولها يساوي 40 سم وعرضها يساوي 30سم.

الحـــل

مساحة الصفيحة: $s = xy$ (٩,٧)

حيث x, y بعدا الصفيحة (x طولها، y عرضها).

من (٩,٧) وبالاشتقاق بالنسبة للزمن، نجد:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}y + x\frac{dy}{dt} \quad (٩,٨)$$

لكنّ: $\frac{dx}{dt} = 0.01$ ، $\frac{dy}{dt} = 0.02$ ، x = 40 ، y = 30

بالتعويض في (٩,٨)، نجد: $\frac{ds}{dt} = 0.01(30) + 40(0.02)$

إذن: $\frac{ds}{dt} = 0.30 + 0.80 = 1.1 cm^2/\sec$

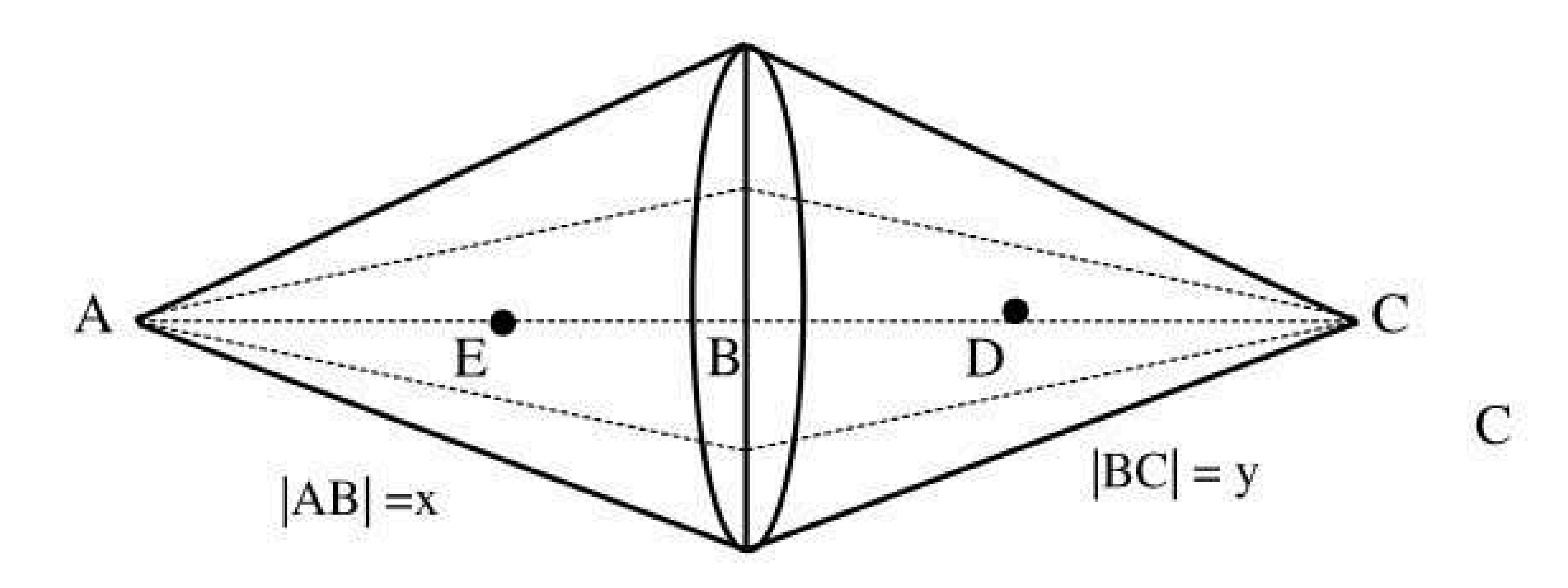
مــثــال (٩,٩)

نقطة مضيئة A تقع أمام عدسة محدبة (convex lens)وتبعد عنها بقدر xسم، فإذا كانت C صورة A تبعد عن العدسة yسم وكانت النقطة وصورتها تقعان على المحور الأساسي للعدسة كما هو موضح في الشكل:

١) اكتب العلاقة بين x ، y ونصف قطر العدسة.

٢) أوجد معدل تغير y بالنسبة للمتغير x

٣) إذا كان: x = 20 ، r = 4 ، فأوجد هذا المعدل.



|EB| = |BD|=r نصف قطر العدسة

شكل (٩,٤).

١) العلاقة بين x , y , r

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \qquad (٩,٩)$$

٢) لنشتق الطرفين بالنسبة للمتغير x، فنجد:

$$0=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

ومنه:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{x^2} \qquad (٩,١٠)$$

٣) بما أن: x = 20 ، r = 4 ، فإن:

$\frac{1}{y}=\frac{1}{4}-\frac{1}{20}=\frac{5-1}{20}=\frac{4}{20}\Rightarrow y=5$ (استنادا للعلاقة (٩,٩)).

بالتعويض في المعادلة (٩, ١٠)، نجد:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(5)^2}{(4\times5)^2} = -\frac{1}{16}$$

إذن y يتناقص بمعدل تغير قدره $\frac{1}{16}cm$ لكل تزايد قدره 1cm للمتغير x.

مــثــال (٩, ١٠)

نقطة تتحرك على محيط الدائرة (circle) :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3 \qquad (٩, ١١)$$

أوجد العلاقة بين $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ (مركبتي متجه سرعة النقطة ((x, y)) أثناء تحركها على محيط الدائرة، إذا كان:

$\frac{dx}{dt} = 2cm / sec$ عند النقطة (1- ,0)، فأوجد $\frac{dy}{dt}$

الحــــل

لنشتق طرفي المعادلة (٩, ١١) بالنسبة للزمن:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - 2\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} = 0$$

ومنه:

$$\frac{dx}{dt}(x-1) = \frac{dy}{dt}(1-y) \qquad (٩, ١٢)$$

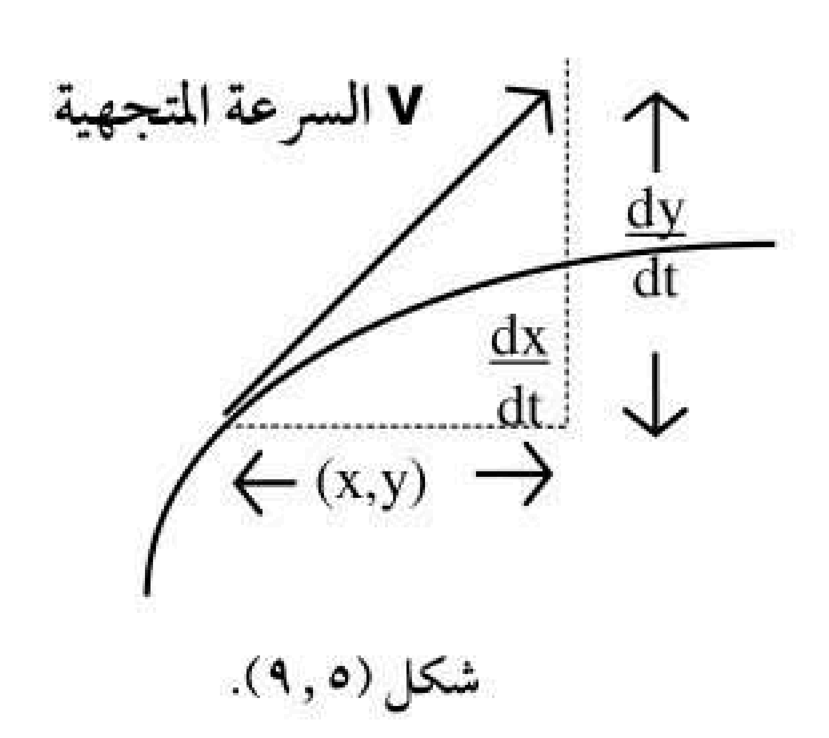
بالتعويض في المساواة (٩, ١٢)، نجد:

$$2(0-1) = \frac{dy}{dt}(1+1)$$

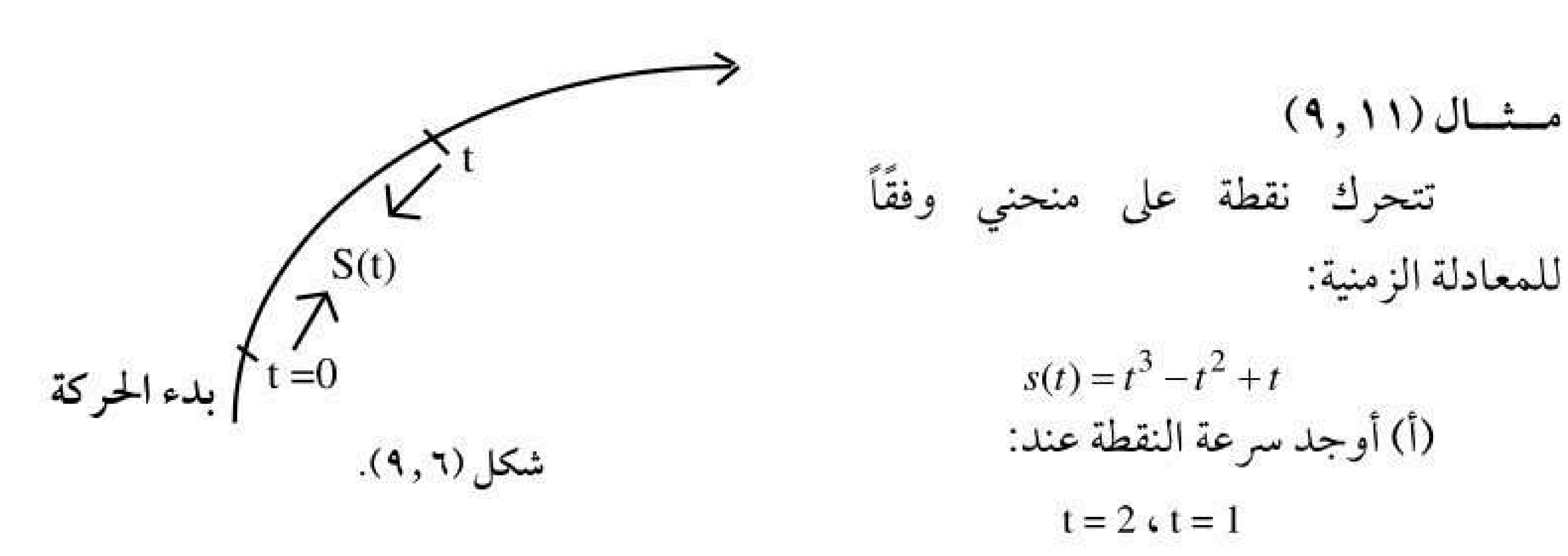
ومنه: $\frac{dy}{dt} = -1cm/\sec$ وهي مركبة متجه السرعة باتجاه المحور y عند النقطة (0,-1).

لو أردنا إيجاد **قيمة متجه السرعة** (السرعة العددية) عند هذه النقطة لوجدنا:

$$|v| = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}cm/\sec$$ (السرعة العددية)



شكل (٥ , ٩).



شكل (٦ , ٩).

مــثــال (١١ , ٩)

تتحرك نقطة على منحني وفقًا للمعادلة الزمنية:

$$s(t) = t^3 - t^2 + t$$

(أ) أوجد سرعة النقطة عند:

$t = 2$ ، $t = 1$

(ب) التسارع (acceleration) (العجلة) في اللحظة $t = 0$ والمسافة المقطوعة عند ذلك مقدرة بالسنتيمتر لكل ثانية.

الحـــــل

(أ)السرعة (معدل التغير):

(١)عند $t = 1$: $\frac{ds}{dt}(1) = 3t^2 - 2t + 1 \Big|_{t=1}$

$= 3 - 2 + 1 = 2cm/s$

(٢)عند $t = 2$: $\frac{ds}{dt}(2) = 3(2)^2 - 4 + 1 = 9cm/s$

(ب)التسارع (معدل التغير للسرعة)

عند $t = 0$: $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 2 \Big|_{t=0} = -2$

تتناقــــص السرعة بمعـــــــدل تغير قدره $2cm/\sec^2$ (2 سم في الثانية لكل ثانيـــة (2 سم/ ث٢)). المسافة المقطوعة عند ذلك هي: s(0)=0 أي أن المتحرك عند نقطة البدء.

مــثــال (٩,١٢)

تقذف قذيفة (projectile) رأسيا إلى أعلى بسرعة بدء قدرها 160 ft/sec وتتحرك تحت تأثير الجاذبية الأرضية فقط. نعلم أن معادلة قذيفة تخضع لنفس الشروط هي من الشكل:

$$s(t) = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، v_0 سرعة البدء، s(t) المسافة المقطوعة عند الزمن t. معادلة القذيفة هنا هي من الشكل:

$$s(t) = 160\,t - 16t^2$$

أوجد:

١)أعلى موضع(the maximum altitude) يبلغه الجسم والتسارع عند ذلك.

٢)متى تعود النقطة إلى موضعها الأصلي ؟وما سرعتها العددية عند ذلك ؟(السرعة العددية $v = |\frac{ds}{dt}|$).

A
s(t)
t = 0

شكل (٩,٧).

الحـــــل

١)تبلغ القذيفة أعلى موضع لها عندما $\frac{ds}{dt} = 0 \Leftarrow$

$$t = \frac{160}{32} = 5 \Leftarrow \frac{ds}{dt} = 160 - 32t = 0$$

أي بعد 5 ثوان. التسارع عند ذلك يساوي: $\frac{d^2s}{dt^2} = -32$ وهذا مقدار ثابت دومًا ويساوي بقيمته المطلقة تسارع الجاذبية الأرضية. نسمي مثل هذه الحركة **بالحركة المتغيرة بانتظام** (التسارع مقدار ثابت). أما المسافة فتساوي:

$$s(5) = 160(5) - 16(5)^2 = 800 - 400 = 400 \text{ ft}$$

٢) تعود النقطة إلى موضعها الأصلي عندما:

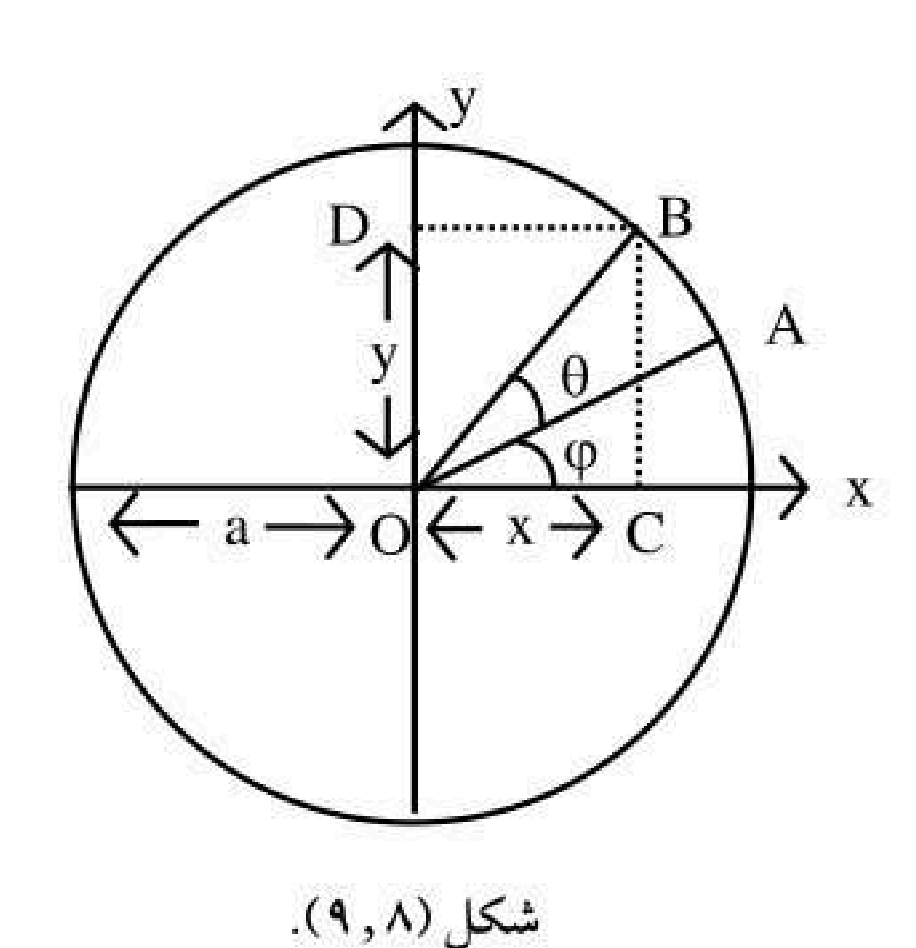
$$s(t) = 160t - 16\,t^{2} = 0 \Rightarrow$$
$$t\,(160 - 16\,t) = 0$$

هناك احتمالان: إما t = 0 وهذا زمن بدء الحركة أو $t = \frac{160}{16} = 10\sec$ وهذا زمن عودة النقطة إلى موضعها الأصلي. من الملاحظ أن زمن صعود القذيفة يساوي 5 ثوان، وزمن الهبوط هو أيضا 5 ثوان.

سرعتها عند عودتها: $\frac{ds}{dt}(10) = 160 - 32(10) = -160 ft/\sec$ ، أما السرعة العددية فهي: $|\frac{ds}{dt}(10)| = 160 ft/\sec$.

الحركة التوافقية والدائرية المنتظمة

تتحـــرك نقطة B على دائرة طول نصف قطرها a وتقطع أقواسًا أطوالها متساويـــة خلال أزمنة متساويـــة (حركة دائرية منتظمة). فإذا كانت السرعة الزاوية تساوي ω (مقدار ثابت)، فإن الزاوية المقطوعة ابتداء من بدء الحركة A تساوي:



شكل (٩,٨).

$$\theta = \omega t \quad (\omega > 0) \quad (\theta \text{ زاوية } OB \text{ مع } \overrightarrow{OA})$$

فإذا كان $\overrightarrow{OA}$ يصنع زاوية ثابتة قدرها φ مع المحور $\overrightarrow{x}$، فإن إحداثيي النقطة المتحركة B هما على الترتيب:

$$x = a\cos(\theta + \varphi) = a\cos(\omega t + \varphi) \quad (٩,١٣)$$

$$y = a\sin(\theta + \varphi) = a\sin(\omega t + \varphi) \quad (٩,١٤)$$

تتحرك النقطة C مسقط B على المحور x وفقًا للمعادلة (٩,١٣). نسمي هذه الحركة المعرفة بهذه المعادلة **بالحركة التوافقية البسيطة.**

كما تتحرك النقطة D مسقط B على المحور y وفقا للمعادلة (٩,١٤). نسمي هذه الحركة

والمعرفـــة وفقًا لهذه المعادلة **بالحركة التوافقية البســـيطة** أيضًا. **فالحركـــة التوافقيـــة البسيطة** (simple harmonic motion) **هي حركة نقطـة على مستقيم وفـقًا للمعادلة (٩,١٣) أو المعادلة (٩,١٤).**

أما حركة النقطة B على الدائرة وفـقًا للمعادلتين (٩,١٣)، (٩,١٤) معًا فتسمى بالحركة الدائرية المنتظمة.

مــثــال (٩,١٣)

تتحرك نقطة B على مستقيم وفقًا للمعادلة التالية:

$$x = a\cos(\omega t + \varphi) = 3\cos(\frac{\pi}{3}t)$$

أوجد سعة الحركة a، الســرعة الزاوية ω ، دور الحركة $\frac{2\pi}{\omega}$ ، تردد الحركـة $\frac{\omega}{2\pi}$ ، الســرعة والتسارع في اللحظة t مقدرًا بالسنتيمتر لكل ثانية. العلاقة بين التسارع والمسافة المقطوعة. ثـم أعـط وصفًا مختصرًا لهذه الحركة.

الحـــل

سعـــة الحركـــة: 3 سم (أبعــد مسافـــة تبلغها النقطة بعيـــدة عن موضع توازنها 0)

السرعة الزاوية: $\frac{\pi}{3}$ ، دور الحركة $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6\sec$ ، تردد الحركة: $\frac{1}{6}$ دورة.

C ——— O ← x → B ——— A (OA = 3)

$$\begin{cases} t = 3 \\ v = 0 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ |v| = \pi \end{cases} \leftarrow \begin{cases} t = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow t = \frac{9}{2}, |v| = \pi \rightarrow t = 6, v = 0$$

السرعة تساوي: $v = \frac{dx}{dt} = -\pi \sin(\frac{\pi}{3} t)$

التسارع يساوي: $\gamma(t) = v' = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\pi^2}{3} \cos\frac{\pi}{3} t$

العلاقة بين x والتسارع هي:

$$\gamma(t) = -3 \cdot (\frac{\pi}{3})^2 \cos\frac{\pi}{3} t = -\omega^2 x$$

هناك من يعرف الحركة التوافقية بأنها حركة نقطة على مستقيم تتحرك بحيث يكون:

$$\gamma(t) = -\omega^2 x \qquad (٩,١٥)$$

(x المسافـــة المقطوعة ابتداء من بدء الحـــركة، $\gamma(t)$ تسارع الحركة ويساوي $\frac{d^2x}{dt^2}$).

وصـــف الحركـــة

تتحرك النقطة B على خط الأعداد من الموضع A عند بدء الزمن(t = 0) وبسرعة تساوي الصفر (v = 0) متجهة نحو 0 بسرعة عددية متزايدة، لتصل هذه النقطة في اللحظة $t = \frac{3}{2}$ حيث تبلغ السرعة(speed)العددية أقصاها: π = |v|.

تتحرك النقطة من 0 يسارًا وبسرعة عددية متناقصة لتصل الموضع C (أبعد موضع يمكن أن تصله يسارًا) لتصبح سرعتها v = 0 عند الزمن t = 3 حيث x = −3. تتابع النقطـــة حركتها مغيرة جهة الحركة بسرعة عددية متزايدة ومتجهة نحو 0 لتصلها عند $t = \frac{9}{2}$ ولتبلـــغ سرعتها العددية قيمـــتها العظمى π = |v|. تتابع النقطـــة حركتها بنفس الجهـــة بسرعـــة عددية متناقصة لتبلغ الموضع A (نقطة البداية) وبسرعة مقدارها v = 0 في اللحظة t = 6. وهكـــذا نجـــد أن **الزمـــن اللازم للانطـــلاق من نقطة البدء A والعـــودة إليه يســـاوي**6 sec وهـــو **الزمن الدوري**(period).

أما **تـــردد** (frequency)**الحركـــة فهو عدد الدورات المنجـــزة في الثانية** وهنا يساوي $\frac{1}{6}$ دورة. أما **السعة**(amplitude)**فهو أبعد مسافـــة يمكن أن تبلغها النقطة B** وتدركها عندما تكون في A أو C وهي تساوي 3 cm.

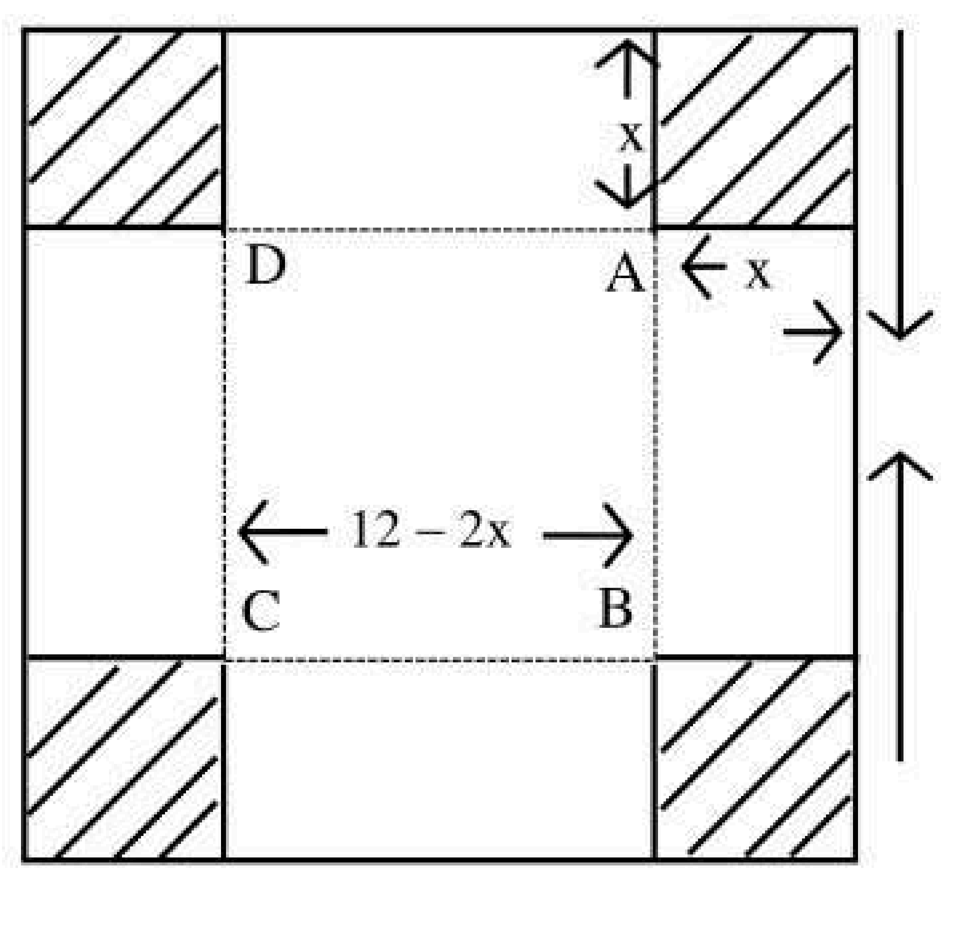
(٩,٢) الأمثلـــيـــة
The Optimization

يهتم الرياضيون والاقتصاديون والعاملون في الصناعة بإيجاد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدوال. فالاقتصادي ينشد في عمله إيجاد أقصى ربح ممكن ورجل الصناعة مثلا يريد صناعة

علبة من الورق المقوى من قطعة محددة من الورق بأكبر حجم ممكن أو مد أنابيب من البترول من موضع إلى آخر بأقل تكلفة ممكنة. والرياضي يبحث عند وضع نموذج رياضي معين مكوَّن من دالة تتبع عددًا من المتغيرات عن القيم القصوى لهذه الدالة. فيما يلي سنقدم أمثلة موضحة لذلك وسنسمي القيم التي نحصل عليها **بالقيم المثلى** ونسمي هذا الموضوع بموضوع الأمثلية.

مـثـال (٩,١٤)

في معمل لصناعة علب من الورق المقوى يهتم العاملون بصناعة علبة (من الورق المقوى) بدون غطاء من قطعة مربعة الشكل طول ضلعها 12 cm، وذلك بقص أربعة مربعات متطابقة (identical squares) من أركانها الأربعة ثم ثنيها كما هو موضح بالشكل. ما هي أبعاد العلبة للحصول على أكبر حجم ممكن لها.



شكل (٩,٩).

الحـــل

القاعدة للعلبة بعد قص المربعات المربعة هي مربع طول ضلعه 2x – 12 فمساحة القاعدة: $(12-2x)^2$

وارتفاع العلبة هو x فحجم العلبة (بدون غطاء) هو:

$$V = x(12-2x)^2$$

علما أن: $6 \geq x \geq 0$

نريد إيجاد القيم الأمثلية للدالة المتصلة V على الفترة [0,6].

لذا نحسب المشتقة، فنجد: $\frac{dV}{dx} = (12-2x)^2 - 4x(12-2x)$

$$= (12-2x)(12-2x-4x) = (12-2x)(12-6x)$$

والمشتقة تساوي الصفر عندما: x = 6 أو x = 2 والعددان ينتميان للفترة [0,6].

لإيجاد القيم المثلى (Optimal values):

١) نبحث عن قيمتي الدالة V عند العددين الحرجين x = 2, x = 6 ، فنجد:

$V(6) = 0$ ، $V(2) = 2(12-4)^2 = 2(8)^2 = 128cm^3$

٢) نبحث عن قيمتي الدالة عند طرفي الفترة [0, 6]، فنجد:

$V(0) = V(6) = 0$

إذن القيمة العظمى للدالة V (القيمة المثلى) هي 128 ونحصل عليها عندما x = 2 وأبعاد العلبة عند ذلك هي:

8, 8, 2

مـثـال (١٥ , ٩)

تسقط أشعة الشمس عموديًا على نافذة مستطيلة الشكل محيطها ثابت ويساوي 200 سم. أوجد أبعاد النافذة المصممة من قبل مهندس معماري والتي تسمح بوصول أكبر كمية من الضوء.

الحـــل

لنفرض أن أحد بعدي النافذة يساوي x سم فيكون البعد الآخر مساويًا: (x – 100) (نصف المحيط – أحد البعدين).

فمساحة المستطيل هي:

$$S = x(100-x) = 100x - x^2$$

حيث: $0 \le x \le 100$ (مجموع البعدين يساوي 100).

لإيجاد القيم المثلى:

١) نحسب المشتقة، فنجد: $S' = 100 - 2x$

الأعداد الحرجة: $100 - 2x = 0 \Leftarrow x = 50$

قيمة الدالة عند x = 50: $S(50) = 50(50) = 2500$

قيمتا الدالة عند طرفي الفترة [0, 100]:

$S(0) = S(100) = 0$ (وهنا متساويان)

إذن، القيمة المثلى للمساحة: $S(50) = 2500$ ويوافقها x = 50.

والبعد الثاني يساوي 50 أيضا. فالشكل الذي يسمح بوصول أكبر كمية من الضوء هو مربع.

مـثـال (٩,١٦)

أنبوب على شكل أسطوانة دائرية قائمة يجري فيه الماء. يريد مهندس زراعي تثبيت مصفاة مستطيلة الشكل على فتحة هذا الأنبوب وبحيث تغلق بقية الفتحة. أوجد أبعاد المصفاة والتي تجعل مساحتها أعظم ما يمكن.

الحـــل

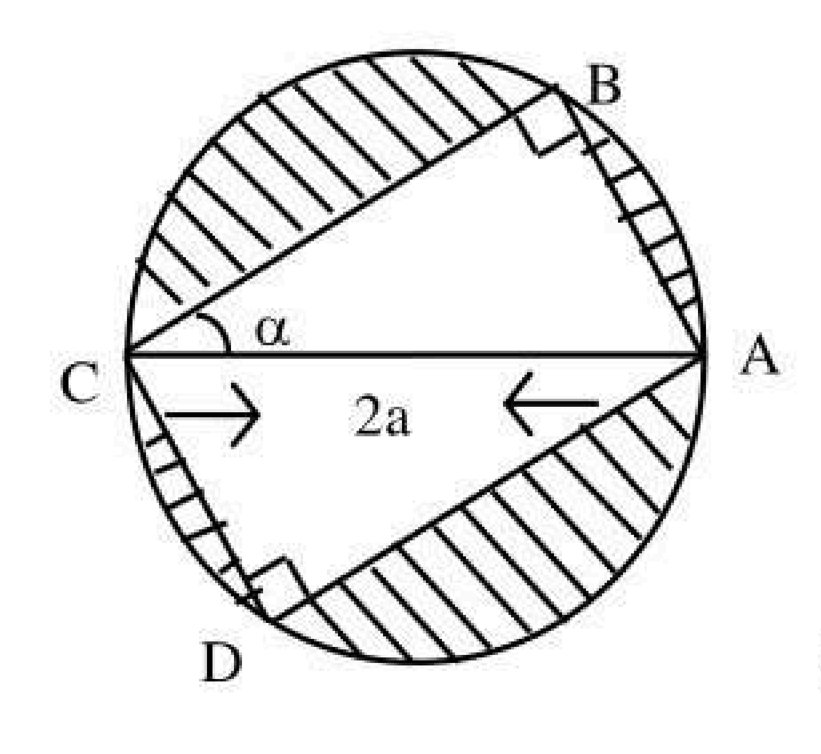
نفرض أن طول نصف قطر فتحة الأنبوب يساوي a وأن قياس الزاوية ACB يساوي α، إذن بعدا المستطيل:

$$|AB| = 2a\sin\alpha, |BC| = 2a\cos\alpha$$

فمساحة الصفيحة:

$$S = 4a^2 \sin\alpha\cos\alpha = 2a^2 \sin 2\alpha \qquad (٩,١٦)$$

$$(\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha)$$



شكل (٩,١١).

$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ (α زاوية حادة في المثلث ABC القائم الزاوية)

لإيجاد القيم القصوى للمقدار S، نشتق فنجد:

$$\frac{dS}{d\alpha} = 4a^2 \cos 2\alpha$$

جذور المشتقة: $\frac{dS}{d\alpha} = 0 \Leftarrow \cos 2\alpha = 0 \Leftarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

وهو العدد الحرج الوحيد على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$.

قيمتا الدالة (٩,١٦) عند طرفي الفترة:

$$S(0) = 0, S(\frac{\pi}{2}) = 0$$

وقيمة الدالة عند $\alpha = \frac{\pi}{4}$ هي: $S(\frac{\pi}{4}) = 2a^2 \sin\frac{\pi}{2} = 2a^2$

إذن: $S(\frac{\pi}{4}) = 2a^2$ هي القيمة العظمى للدالة.

بعدا المستطيل: $|AB| = 2a\sin\alpha = 2a\sin\frac{\pi}{4} = 2a(\frac{\sqrt{2}}{2}) = a\sqrt{2}$

$$|BC| = 2a\cos\alpha = 2a\cos\frac{\pi}{4} = 2a(\frac{\sqrt{2}}{2}) = a\sqrt{2}$$

من الواضح أن البعدين متساويان والشكل يصبح مربعًا.

مـــثـــال (٩,١٧)

يرغب العاملون في أحد مصانع الحليب في تصميم علبة مغلقة حجمها ثابت ويساوي $\frac{352}{7}cm^3$ على شكل أسطوانة دائرية (circular cylinder) قائمة. فما هي أبعاد العلبة (طول نصف قطر قاعدتها وطول ارتفاعها) والتي تجعل مساحة المعدن المستخدم أصغر ما يمكن $(\pi \approx \frac{22}{7})$.

الحــــل

حجم العلبة: $\pi x^2 y = \frac{352}{7}$ ومنه: $y = \frac{\frac{352}{7}}{\frac{22}{7}x^2} = \frac{16}{x^2}$ (٩,١٧)

المساحة الجانبية للعلبة:

2π x y = محيط القاعدة × الارتفاع

مثلا مساحة القاعدة: $2\pi x^2$

المساحة الكلية للعلبة: $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy$

$$= 2\pi(x^2 + \frac{16}{x})$$

(بالتعويض عن y بدلالة x من (٩,١٧)).

من الملاحظ أن: $0 < x < \infty$

x

y

شكل (٩,١٢).

لإيجاد القيمة الصغرى (المطلقة) للدالة:

$$S = 2\pi(x^2 + \frac{16}{x})$$

نبحث عن العدد الحرج، فنجد:

$$\frac{dS}{dx} = 2\pi(2x - \frac{16}{x^2}) = \frac{4\pi(x^3 - 8)}{x^2}$$

ومنه: $\frac{dS}{dx} = 0 \Leftarrow x^3 - 8 = 0 \Leftarrow x = 2$

وبالتالي، فإن: $S(2) = 2\pi(4+8) = \frac{24(22)}{7} = \frac{528}{7}cm^2$

وبملاحظة أن S متصلة على الفترة $(0, \infty)$

وأن: $\lim_{x \to 0^+} S(x) = \lim_{x \to \infty} S(x) = \infty$

فإن: $S(2) = \frac{528}{7}$ هي القيمة الصغرى للدالة.

فطول نصف قطر القاعدة هو: x = 2 cm وارتفاع الأسطوانة يساوي:

$$y = \frac{16}{4} = 4cm$$

مــثــال (٩,١٨)

إذا كــان عــــدد الوحـــدات المنتجة من الآلات الحاسبة والمطلوبة في إحـــدى الشـــركات هـــو x وحـــدة في اليـــوم. وكانـــت تكلفـــة إنتـــاج هـــذا العدد هي:

$$c(x) = 400 + 5x + 0.01x^2$$

فإذا كان سعر مبيع الوحدة هو 50 ريالاً، فأوجد:

١) دالة المبيع لعدد x من الوحدات.

٢) دالة الربح(profit function).

٣) الإنتاج اليومي الموافق لأقصى ربح ممكن والربح الأعظمي في اليوم.

الحـــــل

١) دالة المبيع تعرف بالشكل: $V = 50x$

٢) دالة الربح تعطى بالصورة:

$$\begin{aligned} R &= 50x - c(x) \\ &= 50x - 400 - 5x - 0.01x^2 \\ &= 45x - 400 - 0.01x^2 \end{aligned} \qquad (٩,١٨)$$

٣)لإيجـــاد الإنتـــاج اليـــومي الموافـــق لأقصى ربـــح ممكن، نشتـــق العلاقة (٩,١٨)، فنجد:

$$\frac{dR}{dx} = 45 - 0.02x$$

والدالة المعطاة في (٩,١٨) والتي هي من الدرجة الثانية في x تقبل قيمة عظمى مطلقة عندما: $\frac{dR}{dx} = 0 \Leftarrow$

$$x = \frac{45}{\frac{2}{100}} = 2250 \text{ وحدة}$$

والربح الأعظمي هو:

$$\begin{aligned} R(2250) &= 45(2250) - 400 - 0.01(5062500) \\ &= 101250 - 400 - 50625 \\ &= 50225 \end{aligned}$$

مـــثـــال (٩,١٩)

إذا كان عدد الوحدات المنتجة والمطلوبة من سلعة معينة في إحدى المدن هو q وحدة. وإذا كان سعر مبيع الوحدة الواحدة بدلالة عدد الوحدات ولنرمز له بالرمز p معطى بالعلاقة:

$$p = 1000 - 5q \quad \text{(دالة الطلب على السلعة)}$$

وإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج هذه الوحدات هو:

$$c = 300q + 13000 \quad \text{(مقدرة بالريال)}$$

فأوجد:

١)معدل تغير p بالنسبة إلى q مفسرًا ما يعنيه ذلك.

٢)عدد الوحدات الواجب إنتاجها والمطلوبة لتحقيق أقصى ربح ممكن.

٣)سعر الوحدة الموافقة لأقصى ربح.

الحـــــل

١)معدل التغير هو: $\frac{dp}{dq} = -5$

وهو مقدار ثابت ومعنى ذلك:

أنه إذا زاد الطلب على هذه السلعة بوحدة واحدة نقص سعر الوحدة الواحدة 5 ريالات.

٢)ثمن مبيع q وحدة:

سعر الوحدة × عدد الوحدات $= pq = (1000 - 5q)q = 1000q - 5q^2$

دالة الربح الموافق (ثمن المبيع.التكلفة الكلية) هي:

$$R = pq - c = 1000q - 5q^2 - c = 1000q - 5q^2 - 300q - 13000$$

$$R = 700q - 5q^2 - 13000$$

وهذه دالة من الدرجة الثانية في qويوافقها قيمة عظمى مطلقة $(R'' = -10 < 0)$ للربح.

لإيجاد هذه القيمة نشتق R، فنجد:

$$R' = 700 - 10q$$

ومنه: $R' = 0 \Leftarrow q = 70$

والقيمة العظمى للربح هي: $R(70) = 49000 - 24500 - 13000$

$$= 11500$$

وسعر الوحدة بالريال: $p = 1000 - 350 = 650$

مـثـال (٩,٢٠)

أوجد دالة البعد d بين النقطة B(1, 2) والنقطة A(x, y) من المستقيم:

$$y = 2x + 1$$

ثم أوجد النقطة A من هذا المستقيم والتي من أجلها يكون d(A, B) أصغريًّا.

الحـــل

$$z = d(A,B) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$
$$= \sqrt{(x-1)^2 + (2x+1-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (2x-1)^2}$$
$$= \sqrt{5x^2 - 6x + 2}$$

لإيجاد القيمة الصغرى لهذه الدالة:

١) نحسب المشتقة، فنجد:

$$z' = \frac{10x-6}{2\sqrt{5x^2-6x+2}}$$

والعدد الحرج هو: $x = \frac{3}{5}$ (جذر المشتقة)

(لاحظ أن المقدار $5x^2 - 6x + 2$ موجب دومًا لأن مميزه مقدار سالب).

بما أن z متصلة على الفترة $(-\infty, \infty)$

وأن: $\lim_{x \to \pm\infty} z = \infty$

شكل (٩,١٢).

وأن قيمة المقدار z عند: $x = \frac{3}{5}$ هي:

$$z(\frac{3}{5}) = \sqrt{(\frac{3}{5}-1)^2 + (\frac{6}{5}-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

إذن: $z(\frac{3}{5}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ قيمة صغرى للدالة z.

والنقطة A الموافقة هي: $c(\frac{3}{5}, \frac{11}{5})$

لاحظ أن ميل CB هو: $\dfrac{\dfrac{11}{5}-2}{\dfrac{3}{5}-1}=\dfrac{\dfrac{1}{5}}{-\dfrac{2}{5}}=-\dfrac{1}{2}$

وميل المستقيم هو:2

هذا يعني أن CB عمودي على المستقيم وأن C مسقط B على المستقيم. الطالب يعلم هذه الحقيقة بشكل هندسي وقد أثبتناها الآن بشكل تحليلي.

مــثــال (٩,٢١)

حدد دالة البعد d بين النقطة B(4, 3) والنقطة A(x, y) من نقاط نصف محيط الدائرة.

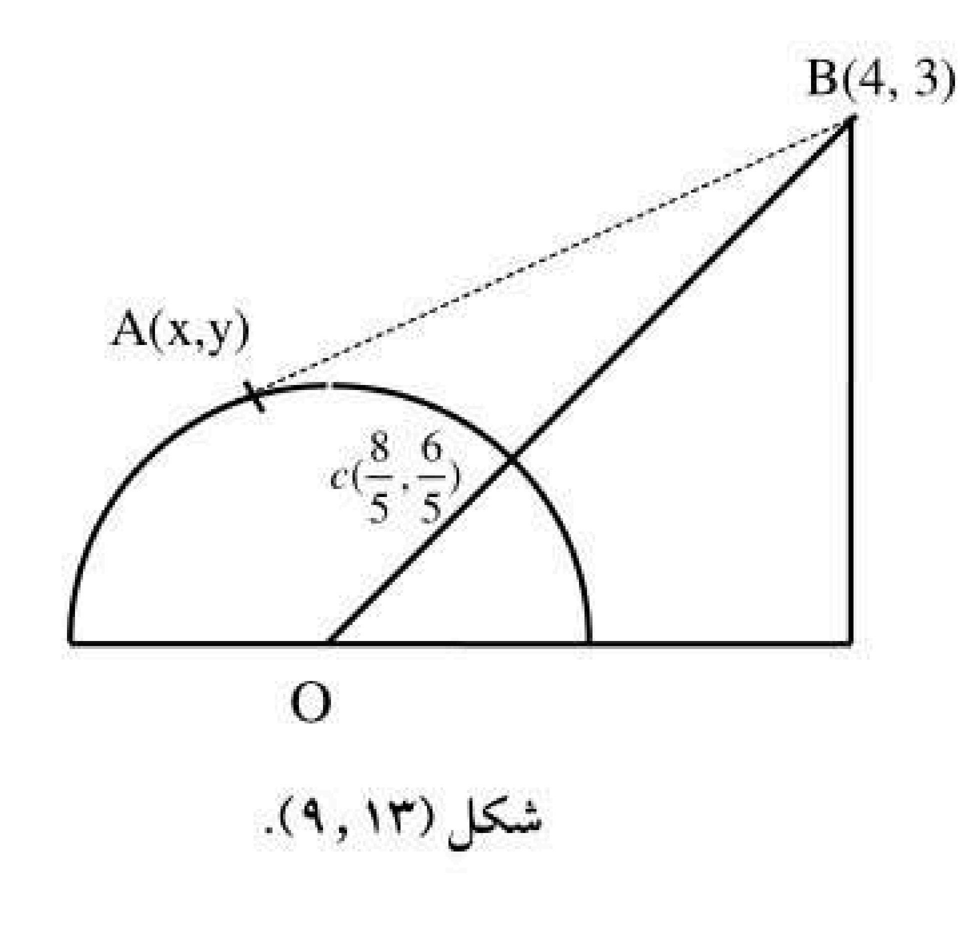
$$y=\sqrt{-x^2+4} \qquad (٩,١٩)$$

حدد النقطة A بحيث يكون d(A, B) أصغريًا، شكل (٩,١٩).

الحـــــل

$$d(A,B)=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$$
$$=\sqrt{x^2+y^2-8x-6y+25}$$
$$=\sqrt{4-8x-6y+25}=\sqrt{29-8x-6y}$$

(استنادا للعلاقة (٩,١٩))



شكل (٩,١٣).

والنقطة A على نصف الدائرة والتي تجعل d(A,B) أصغريا هي نفسها التي تجعل مربع هذا البعد أصغريًا لأن: $d(A,B)\geq 0$.

لنفتش عن القيمة الصغرى للدالة:

$$z=(d(A,B))^2=29-8x-6\sqrt{4-x^2} \quad \text{حيث} \quad 2\geq x\geq -2$$

نحسب المشتقة، فنجد:

$$z' = -8 + \frac{6x}{\sqrt{4-x^2}}$$

وبالتالي، فإن: $z' = 0 \Leftarrow 4 = \frac{3x}{\sqrt{4-x^2}} \Leftarrow$ (٩,٢٠)

$9x^2 = 16(4-x^2) \Leftarrow 25x^2 = 16(4)$ ومنه $x = \pm\frac{8}{5}$ والمقبـــول حسب (٩,٢٠) هو: $x = \frac{8}{5}$. من جهة أخرى فإن المشتقة غير موجودة عند x = −2، x = 2 (2,2- ينتميان لمجال الدالة). فالأعداد الحرجة هي: $\frac{8}{5}$,2,2 − .

لإيجاد القيمة الصغرى للمقدار z:

١) نبحث عن قيم z عند الأعداد الحرجة، فنجد:

$$z(-2) = 29 + 16 = 45\ ,\quad z(2) = 29 - 16 = 13$$

$$z(\frac{8}{5}) = 29 - \frac{8(8)}{5} - 6\sqrt{4-\frac{64}{25}} = 29 - \frac{64}{5} - \frac{36}{5} = 29 - 20 = 9$$

فالقيمة الصغرى هي: $z(\frac{8}{5}) = 9 \Leftarrow d(A,B) = \sqrt{9} = 3$

والنقطة A الموافقة هي: $c(\frac{8}{5},\frac{6}{5})$ وهي تقع على المستقيم OB. والطالب يعلم هذه الحقيقة بشكل هندسي.

مــثــال (٩,٢٢)

حدد عناصر المخروط الدوراني القائم الذي حجمه أعظميًّا والموجود داخل كرة طول نصف قطرها r. (العناصر: طول نصف قطر قاعدة المخروط، طول ارتفاعه).

الحـــــل

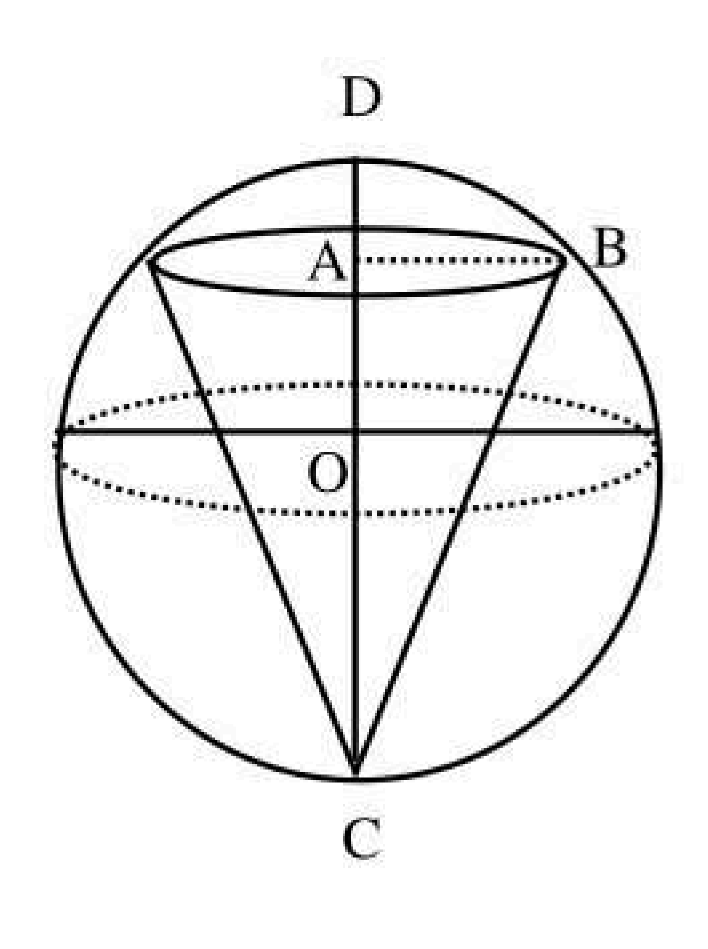
حجم المخروط = $V = \frac{1}{3}\pi|AB|^2|AC|$ (٩,٢١)

لنفرض أن: $|AB| = x$ ، $|AD| = y$

وبالتالي فإن: $|AC| = 2r - y$

من الملاحظ أن DBC مثلث قائم الزاوية في B

وأن: $\widehat{BDA} = \widehat{ABC} = \theta$ (٩,٢٢)

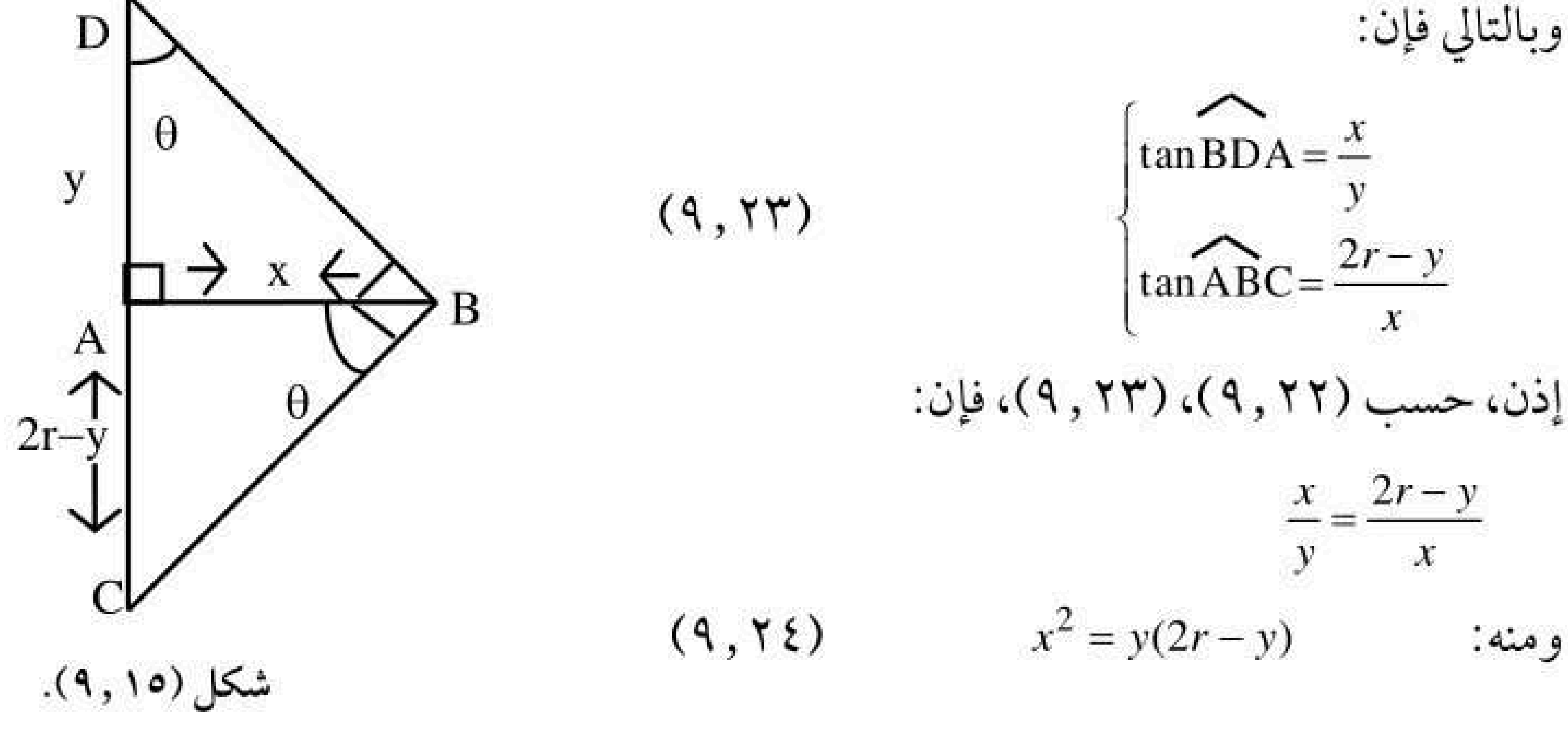


شكل (٩,١٤).



وبالتالي فإن:

$$\begin{cases} \tan\widehat{BDA} = \dfrac{x}{y} \\ \tan\widehat{ABC} = \dfrac{2r-y}{x} \end{cases} \qquad (٩,٢٣)$$



شكل (٩,١٥).

إذن، حسب (٩,٢٢)، (٩,٢٣)، فإن:

$$\frac{x}{y} = \frac{2r-y}{x}$$

ومنه:
$$x^2 = y(2r-y) \qquad (٩,٢٤)$$

(أو من تشابه المثلثين ABD، CAB نجد نفس النتيجة).

حجم المخروط يساوي:

$V = \dfrac{1}{3}\pi x^2(2r-y)$ (استفادة من (٩,٢١)).

$$(2r \geq y \geq 0)$$

وحسب (٩,٢٤)، فإن: $V = \dfrac{1}{3}\pi y(2r-y)^2$

لنشتق بالنسبة للمتغير y، فنجد:

$$\frac{dV}{dy} = \frac{1}{3}\pi[(2r-y)^2 - 2y(2r-y)]$$
$$= \frac{1}{3}\pi[(2r-y)(2r-3y)]$$

الأعداد الحرجة لدالة الحجم هي: $y = 2r, y = \dfrac{2r}{3}$

قيمتا دالة الحجم عند طرفي الفترة $[0, 2r]$ هما: $V(2r) = 0, V(0) = 0$

قيمة دالة الحجم عند العدد الحرج $\dfrac{2r}{3}$ هي: $V = (\dfrac{2r}{3}) = \dfrac{2\pi r}{9}(2r - \dfrac{2r}{3})^2$

$$= \frac{32\pi r^3}{81}$$

إذن: $V(\dfrac{2r}{3})$ قيمة عظمى لدالة الحجم. عناصر المخروط: الارتفاع يساوي $\dfrac{4}{3}r$، طول نصف قطر القاعدة = $\dfrac{2\sqrt{2}r}{3}$.

تمـــاريـــن (٩,١)

١) إذا كان معدل تغير طول مستطيل يساوي 0.01 سم/ ثا ومعدل تغير عرضه يساوي 0.03 سم/ ثا، فأوجد معدل تغير طول قطره ثم معدل تغير مساحته في اللحظة التي يساوي طوله 10 سم وعرضه 8 سم.

٢) أوجد أكبر مساحة لمستطيل محيطه ثابت ويساوي 90 سم.

٣) إذا كان معدل تغير طول ضلع مكعب يساوي 2 سم/ ثا، فأوجد معدل تغير حجمه في اللحظة التي يساوي طول ضلعه 40 سم.

٤) أوجد أكبر مساحة مثلث قائم طول قطره ثابت ويساوي 20 سم.

٥) نقطة تتحرك على المنحني المعرف بالمعادلة:

$$x^2 y + y^2 x + xy = 3$$

إذا كان معدل تغير x يساوي $\frac{dx}{dt} = 2$ سم/ ثا، فأوجد معدل تغير y في اللحظة التي تكون فيها النقطة عند الموضع $(1,1)$.

٦) أوجد أكبر مساحة مثلث قائم تبعد إحدى نقاط وتره عن ضلعيه القائمين: 4 سم، 3 سم على الترتيب.

٧) أوجد أكبر مساحة مثلث قائم مجموع طولي ضلعيه القائمين يساوي 80 قدما.

٨) إذا كان معدل تغير طول نصف قطر قاعدة أسطوانة دائرية قائمة يساوي 0.001 سم/ ثا، ومعدل تغير طول ارتفاعها يساوي 0.02 سم/ ثا، فأوجد معدل تغير حجمها ومساحتها الجانبية في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قطر قاعدتها مساويًا 5 سم وطول ارتفاعها مساويًا 10سم.

٩) يُصب سائل في خزان أسطواني الشكل طول نصف قطر قاعدته 2 متر بمعدل تغير قدره 2 سم^{٣}/ ثا. أوجد معدل تغير ارتفاع السائل في كل لحظة.

١٠) إذا كان معدل تغير طول ضلع معين يساوي 2 سم/ ثا وكانت إحدى زواياه تساوي 60^{o}، فأوجد معدل تغير مساحته في اللحظة التي يكون فيها طول ضلعه مساويا 15 سم، بفرض أنه يحافظ على شكله.

١١) ملعب مكون من مستطيل ونصفي دائرتين كما هو موضح في الشكل. إذا كـــان طول محيطـــــه يساوي 44 م، فأوجد بعدي المستطيل إذا كانت مساحته أعظم ما يمكن.



شكل (٩,١٥).

١٢) أوجد أكبر مساحة مستطيل أضلاعه توازي محوري الإحداثيات وموجود داخل قطع ناقص معادلته: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

١٣) يُصب سائل في قمع على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته 6 سم وارتفاعه 12 سم بمعدل تغير قدره 0.2سم٣/ ثا، ويتسرب السائل من فتحة القمع السفلي بمعدل تغير قدره 0.01سم٣/ ثا. أوجد معدل ارتفاع السائل في القمع في اللحظة التي يكون فيها ارتفاع مخروط السائل مساويا 6 سم.

١٤) أوجد أبعاد مخروط دائري قائم موجود داخل كرة طول نصف قطرها 15سم بحيث يكون حجمه أعظم ما يمكن.

١٥) أوجد أبعاد أسطوانة دائرية قائمة موجودة داخل كرة طول نصف قطرها 20سم بحيث يكون حجمها أعظم ما يمكن.

١٦) يراد صنع مستودع ماء من قطعة معدنية مستطيلة الشكل بعداها 3 متر، 4متر على شكل متوازي المستطيلات وذلك بقص أربعة مربعات متطابقة من زواياها ثم ثني الجزء الباقي. أوجد أبعاد المستودع لكي يكون حجمه أعظم ما يمكن.

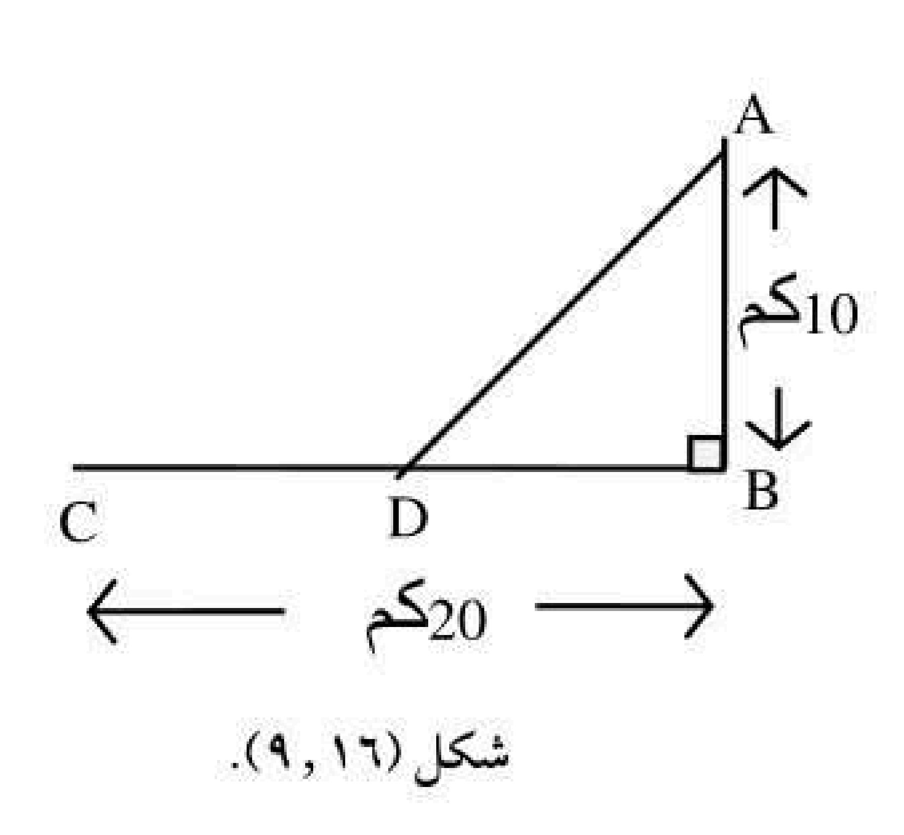
١٧) إذا كانت C التكلفة اللازمة لصنع سلك كهربائي مساحة مقطعه x ، معرفة بالمعادلة:

$$c=\frac{159}{x}+636x, x\neq 0$$

فحدد مساحة مقطع السلك لكي تكون التكلفة اللازمة لصنعه أصغر ما يمكن.

١٨) ينفخ منطاد كروي الشكل بغاز الهليوم بمعدل تغير قدره 0.02سم٣/ ثا. أوجد معدل تغير طول قطره في اللحظة التي يكون طول نصف قطره مساويا 120 سم.

١٩) محطة كهربائية D يراد إنشاؤها بين القرية C والموقع B. حدد موضع المحطة بحيث تكون تكلفة تعبيد الطريق ADC أصغر ما يمكن علما أن كلفة تعبيد الكيلومتر الواحد بين القرية A والمحطة D يساوي 10000 ريال، وكلفة تعبيد الكيلومتر بين المحطة D والقرية C يساوي 5000ريال.



شكل (٩,١٦).

٢٠) عدد الوحدات المنتجة والمطلوبة من سلعة تعطى بدلالة سعر بيع الوحدة الواحدة بالمعادلة:

$$p = 500 - 0.1q$$

حيث q عدد الوحدات المنتجة، p سعر الوحدة.

إذا كانت التكلفة لإنتاج p وحدة هي:

$$c = 400q + 1000$$

أوجد: عدد الوحدات المنتجة الموافقة لتحقيق أقصى ربح، سعر الوحدة المنتجة، التكلفة الكلية، الربح الناتج.

٢١) تتحرك نقطة على مستقيم وفقا للمعادلة الزمنية:

$$x = 2 \sin 2t$$

أوجد: سرعة النقطة وتسارعها في اللحظة t، العلاقة بين السرعة والتسارع، ثم صف هذه الحركة.

٢٢) برهن أن مجموع الحركتين:

$$x_1 = 3\sin t$$
$$x_2 = 3\cos t$$

هو حركة توافقية. حدد دور الحركة الناتجة وسعتها والسرعة الزاوية.

٢٣) قذفنا جسمًا نحو الأعلى بسرعة بدء قدرها 320قدم/ ثا. اكتب معادلة الحركة إذا علمت أن الجسم يخضع لتأثير الجاذبية الأرضية فقط وأن نقطة البدء هي مبدأ الإحداثيات. أوجد سرعة النقطة في اللحظة t = 5، ثم أعلى موضع تبلغه القذيفة وزمن اصطدامها في الأرض.

٢٤) تتحرك نقطة وفقًا للمعادلة الزمنية:

$S = t^3 + t^2 + 1$ (المسافة مقدرة بالمتر والزمن بالثانية)

(أ) أوجد سرعة النقطة في اللحظة: t = 1sec, t = 5 sec.

(ب) أوجد التسارع في اللحظتين t = 3 sec، t = 5 sec.

الفصل العاشر

الدوال الأسية واللوغاريتمية – التكامل

THE EXPONENTIAL AND LOGARI THMIC FUNCTIONS-THE INTEGRAL

(١ , ١٠) الدوال الأسية واللوغاريتمية

The Logarithmic and Exponential Functions

نعلم من دراستنا في المرحلة الثانوية، أنه إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين، وكان m, n عددين كسريين (قياسيين أو نسبيين)، فإن خواص القوى تتلخص بالصيغ التالية:

١) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

٢) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

٣) $(a^m)^n = a^{nm}$ (١٠, ١)

٤) $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$

٥) $(ab)^m = a^m b^m$

حيث قبلنا بالتعريف، أن:

١) $a^P = \underbrace{a.a.a...a}_{\text{P مرة}}$ (P عدد طبيعي)

٢) $a^0 = 1$

٣) $a^{-P} = \frac{1}{a^P}$ (P عدد صحيح)

٤) $(a^{\frac{1}{P}})^P = a$ (P عدد صحيح لا يساوي الصفر)

٥) $(a^{\frac{1}{P}})^q = a^{\frac{q}{P}}$ (p, q صحيحان، p ≠ 0)

من المهم هنا، أن نعرف مقادير من الشكل a^x $(a>0)$، عندما يكون x عددًا حقيقيا وليس بالضرورة عددًا كسريًّا.

من المستحســن في هــذه المرحلة أن نقبل بصحة الصيغ الخمس (١ , ١٠)، بدون برهان عندما تكون الأسس أعدادا حقيقية.

فمثلاً: ١) $(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = 2^3 = 8$

٢) $(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2 = \frac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2}{3}$

تعريف (١ , ١٠)

نسمي الدالة f، المعرفة بالشكل:

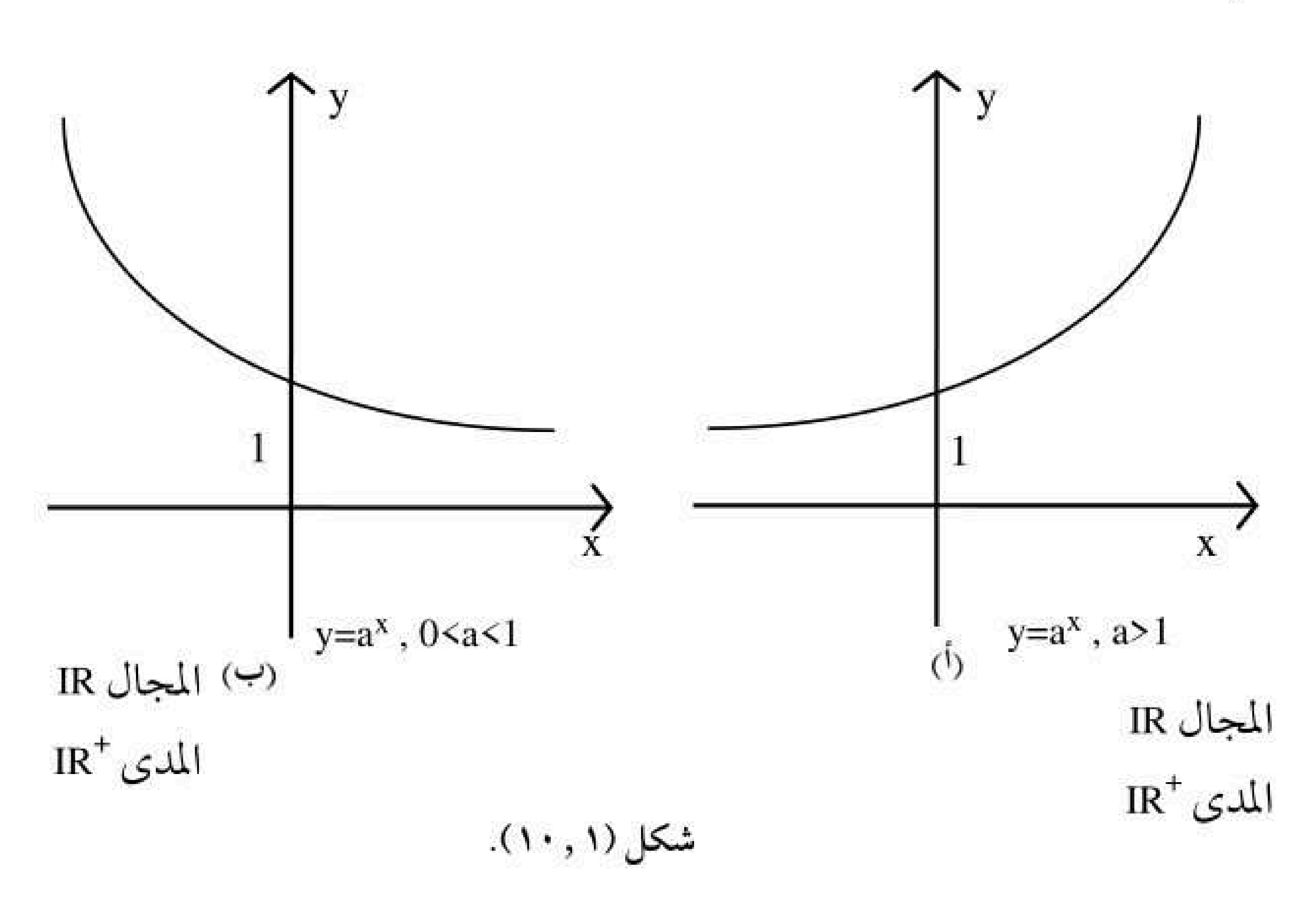
$$f : x \mapsto y = a^x , \quad x \in IR \quad , \quad a \in IR^+ \quad , \quad a \neq 1 \qquad (١٠ , ٢)$$

بالدالة الأسية من الأساس a

فمثلاً: $g : x \mapsto y = 2^x , \quad x \in IR$

دالة أسية من الأساس 2

نقبل دون برهان، أن: مدى الدالة الأسية f المعرفة في (٢ , ١٠)، هو: $IR^+=(0,\infty)$ وأنها متصلة على مجالها IR. وهي متزايدة إذا كان $a>1$، شكل (١ , ١٠)(أ) ومتناقصة إذا كان $0<a<1$ شكل (١ , ١٠)(ب).



شكل (١ , ١٠).

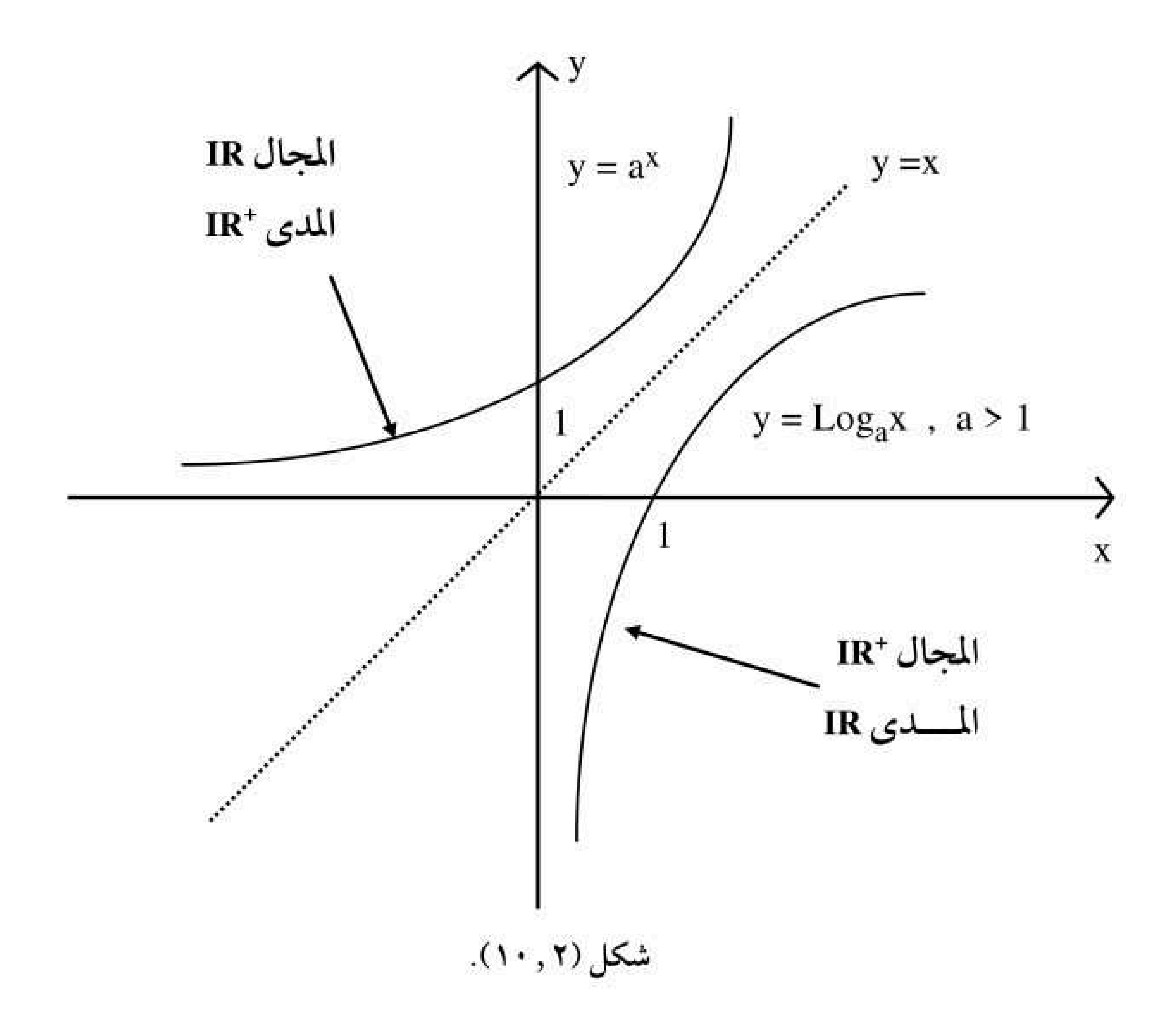
تعريف (٢ , ١٠)

الدالة الأسية التي أساسها a متباينة على مجالها IR (لأنها متزايدة شكل (١ , ١٠)(أ)، أو متناقصة شكل (١ , ١٠)(ب)، فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} ، نرمز لها بالرمز $\log_a$ شكل (٢ , ١٠)، وندعوها بالدالة اللوغاريتمية من الأساس a، وهي من الشكل:

$$f^{-1} = \log_a : x \mapsto y = \log_a x$$

لاحظ أن: $x > 0$، وأن:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$



شكل (٢ , ١٠).

فمثلا: $y = \log_3 x$، قاعدة لدالة لوغاريتمية أساسها 3.

لاحظ أن المنحني البياني للدالة اللوغاريتمية، ينشأ من المنحني للدالة الأسية بأخذ نظيره حول المستقيم y=x. والعكس صحيح فإن منحني الدالة الأسية، ينشأ من منحني الدالة اللوغاريتمية بأخذ نظيره حول المستقيم y=x، شكل (٢ , ١٠).

مثــال (١٠,١)

أوجد قيمة x فيما يلي:

١) $\log_2 x = 3$ ٢) $2^3 = 8^x$

الحــــل

١) من الملاحظ حسب تعريف الدالة اللوغاريتمية، أن:

$$\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$$

٢) من الملاحظ هنا، أن:

$$2^3 = 8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$$

وحيث إن، الدالة الأسية دالة تقابل، فإن:

$$3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

مثــال (١٠,٢)

أوجد لوغاريتمات الأعداد التالية من الأساس 10:

$$\ldots, 10^{-3}=0.001,\ 10^{-2}=0.01,\ 10^{-1}=0.1,\ 10^{0}=1,\ 10^{1}=10,\ 10^{2}=100,\ \ldots$$

الحــــل

من الواضح أن:

$$\ldots \log_{10}0.001=-3,\ \log_{10}0.01=-2,\ \log_{10}0.1=-1,\ \log_{10}1=0,$$
$$\log_{10}10=1,\ \log_{10}100=2,\ \ldots$$

ملحوظــة (١٠,١)

بسهولة، نستنتج من المثال (١٠,٢) أن:

$$(a \neq 1 \text{ ، } a \in IR^+) \qquad \log_a a = 1 \text{ ، } \log_a 1 = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \log x = \infty \text{ ، } \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$$

نظريــة (١ , ١٠)

إذا كانت: $a, x, y \in IR^+$ ، $a \neq 1$ ، فإن:

١) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

٢) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$

٣) $\log_a x^m = m \log_a x$ $(m \in IR)$

٤) $\log_a x = \log_b x \,.\, \log_a b$ $(b \in IR^+ ، b \neq 1)$

البرهـــان

لنبرهن على صحة الفقرة الأولى والأخيرة:

١) لنضع: $\log_a x = u$ ، $\log_a y = v$، فنجد: (٣, ١٠)

$x = a^u$ ، $y = a^v$ ، ومنه نجد:

$xy = a^u \,.\, a^v = a^{u+v}$. وحسب تعريف الدالة اللوغاريتمية، نجد:

$u + v = \log_a(xy) \Leftarrow \log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$

(بالاستفادة من (٣, ١٠))

٤) لنضع: $\log_b x = u$ ، فنجد: (٤ , ١٠)

$x = b^u$. وبأخذ لوغاريتم الطرفين من أساس a، نجد:

$\log_a x = u \,.\, \log_a b \Leftarrow \log_a x = \log_b x \,.\, \log_a b$

بالاستفادة من (٤ , ١٠) ومن الفقرة (٣)

ملحوظة (٢ , ١٠)

إذا كان x عددًا كسريًّا من الشكل $x = \frac{m}{n}$ ، حيث n و m عددان صحيحان والعدد n>0، فإن a^x يعرف بالشكل:

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad (a > 0)$$

الأساس الطبيعي للوغاريتمات

من الممكن البرهان على أن:

$$\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e \qquad (١٠,٥)$$

حيث e مجموع السلسلة التالية:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

ويساوي تقريبًا:

$$e \approx 2.7182818$$

ملحوظـة (١٠,٣)

سنرمز للدالة اللوغاريتمية التي أساسها العدد e بالرمز ln.

نظريـة (١٠,٢)

مشتقة: $f(x) = \ln x$، هو: $f'(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ (١٠,٦)

البرهـــان

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}[\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x}] = \lim_{h\to 0}[\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})] \\ &= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}[\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}] \\ &= \frac{1}{x}\ln[\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}] = \frac{1}{x}\ln[\lim_{\frac{h}{x}\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}] \end{aligned}$$

(لأن ln دالة متصلة)

بوضع: $\frac{h}{x} = n$، نجد:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}\ln[\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}] \\ &= \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(استنادا للعلاقة (١٠,٥)).

نتيجـــة (١ , ١٠)

إذا كان: $x \neq 0$, $y = \ln|x|$ ، فإن: $y' = \frac{1}{x}$

البرهـــان

(أ)إذا كان: $x > 0$ ، فإن $x = |x|$، وبالتالي:

$$y' = \frac{1}{x} \Leftarrow y = \ln x$$

(ب)إذا كان: $x < 0$، فإن: $|x| = -x$، وبالتالي:

$$y' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \Leftarrow y = \ln(-x)$$ **(حسب قاعدة السلسلة)**.

نتيجـــة (٢ , ١٠)

إذا كان: $y = \log_a x$، فإن: $y' = \frac{1}{x\ln a}$

$(a \in IR^+ ، a \neq 1)$

البرهـــان

من الواضح أن: $x = a^y$

بأخذ ln الطرفين، نجد: $\ln x = y\ln a$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة للمتغير x، فإن:

$$y' = \frac{1}{x\ln a} \Leftarrow \frac{1}{x} = y'\ln a$$

نتيجـــة (٣ , ١٠)

إذا كان: $y = \log_a|x|$ ، فإن: $y' = \frac{1}{x\ln a}$

البرهـــان

مشابه للبرهان الوارد في النتيجة (١ , ١٠).

نظريـــة (٣, ١٠)

إذا كان $y = a^x,\ a \in IR^+,\ a \neq 1$، فإن: $y' = a^x \ln a$

من المعادلة: $y = a^x$، نجد: $\ln y = x \ln a$

باشتقاق الطرفين بالنسبة للمتغير x، نجد:

$$\frac{y'}{y} = \ln a \Rightarrow y' = y \ln a \Rightarrow y' = a^x \ln a$$

نتيجـــة (٤, ١٠)

إذا كان $y = e^x$ ، فإن: $y' = e^x \ln e \Rightarrow y' = e^x$

نظريـــة (٤, ١٠)

إذا كان: $y = x^m$، حيث $m \in IR$ ، فإن:

$$y' = mx^{m-1}$$

مما سبق، نجد:

f(x)	f ′(x)	ملاحظات
$\ln \lvert u \rvert$	$\frac{u'}{u}$	u=g(x) (g قابلة للاشتقاق و $u \neq 0$)
$\log_a \lvert u \rvert$	$\frac{u'}{u \ln a}$	$a \neq 1,\ a \in IR^+,\ u \neq 0$
a^u	$a^u \ln a\ u'$	
e^u	$e^u\ u'$	
u^m	$m\,u^{m-1}\ u'$	$u > 0,\ m \in IR$

حيث: $u = g(x)$ ، g قابلة للاشتقاق (Differentiable).

ملحوظـــة (٤, ١٠)

$(x > 0)\ x = e^{\ln x}$

البرهـــان

لنضع $e^{\ln x} = u$ (٧, ١٠)

وبأخذ ln الطرفين، نجد: $\ln u = \ln x$. وبما أن الدالة ln دالة تقابل، فإن: $u=x$ أي أن:

$$e^{\ln x} = x$$ ((حسب (٧, ١٠))

ملحوظة (١٠,٥)

$(a > 0, x \in IR)\ a^x = e^{x\ln a}$

من الملاحظ أن: $a=e^{\ln a}$، إذن:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x\ln a}$$

مثـــال (١٠,٣)

أوجد y' فيما يلي:

١) $y = x\ln(1 + x^2)$ ٢) $y = x^2 e^{x^2+1}$

٣) $y = x\,e^{\sin x}$ ٤) $y = \sec(\ln x)$

الحـــــل

١) $y' = \ln(1+x^2) + \dfrac{x(2x)}{1+x^2} = \ln(1+x^2) + \dfrac{2x^2}{1+x^2}$

٢) $y' = 2xe^{x^2+1} + x^2e^{x^2+1}(2x) = 2xe^{x^2+1} + 2x^3e^{x^2+1}$

٣) $y' = e^{\sin x} + x\,e^{\sin x}\cos x$

٤) $y' = \sec(\ln x)\cdot\tan(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}$

مثـــال (١٠,٤)

أوجد y' فيما يلي:

١) $(x>0)\ y\ \log_3 x^4$ ٢) $y = \dfrac{2^{x^2+1}}{\log_3\sqrt{x^2+1}}$

٣) $y = x^x,\ x > 0$ ٤) $y = (\ln x + x)^{\sin x},\ (x > e)$

الحـــــل

١) $y = \log_3 x^4 = 4\log_3 x \Rightarrow y' = \dfrac{4}{x\ln 3}$

٢) لاحظ أن $y = \dfrac{2^{x^2+1}}{\frac{1}{2}\log_3(x^2+1)} = \dfrac{2^{x^2+2}}{\log_3(x^2+1)}$ ، بالاشتقاق نجد:

$$y' = (2^{x^2+2}\ln 2(2x)\log_3(x^2+1) - \frac{2x}{(x^2+1)\ln 3}\cdot 2^{x^2+2})/[\log_3(x^2+1)]^2$$

٣) بما أن: $x = e^{\ln x}$، فإن: $y = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x}$، ومنه:

$$y' = e^{x\ln x}(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}) = e^{x\ln x}(1+\ln x) = x^x(1+\ln x)$$

٤) بما أن: $\ln x + x = e^{\ln(\ln x+x)}$ ، فإن: $y = e^{\sin x\ln(\ln x+x)}$ ، ومنه:

$$y' = e^{\sin x \ln(\ln x + x)}(\cos x \ln(\ln x + x) + \frac{\sin x}{\ln x + x} \cdot (\frac{1}{x} + 1))$$
$$= (\ln x + x)^{\sin x}(\cos x \ln(\ln x + x) + \frac{\sin x(1+x)}{x(\ln x + x)})$$

مثـــال (٥ , ١٠)

أوجد y'، إذا كان:

$$y = \frac{(x^2+1)^3(x+1)^2}{(e^{\tan x} + 2^x)^4} \qquad (١٠ , ٨)$$

الحــــل

لنأخذ ln القيمة المطلقة للطرفين، فنجد:

$$\ln|y| = 3\ln(1 + x^2) + 2\ln|1 + x| - 4\ln(e^{\tan x} + 2^x)$$

وبالاشتقاق فإن:

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{1+x^2} \cdot 2x + \frac{2}{1+x} - \frac{4}{e^{\tan x} + 2^x} \cdot (e^{\tan x} \sec^2 x + 2^x \ln 2)$$ ، ومنه

$$y' = y(\frac{6x}{1+x^2} + \frac{2}{1+x} - \frac{4(e^{\tan x} \sec^2 x + 2^x \ln 2)}{e^{\tan x} + 2^x}) \qquad (١٠ , ٩)$$

وبالتعويض عن y بما يساويها من (٨ , ١٠) في (٩ , ١٠)، نجد المطلوب.

مثـــال (٦ , ١٠)

أوجد y'، إذا كان:

$$y + x e^x + y^2 \ln x = 0 \qquad (١٠ , ١١)$$

الحــــل

باشتقاق طرفي المعادلة (١١ , ١٠) بالنسبة للمتغير x، نجد:

$$\Leftarrow y' + e^x + xe^x + 2yy' \ln x + \frac{y^2}{x} = 0$$

$$\Leftarrow y'(1+2y\ln x) = -(\frac{y^2}{x} + e^x + xe^x)$$

$$y' = \frac{-(\frac{y^2}{x} + e^x + xe^x)}{1+2y\ln x}$$

(١٠,٢) التكامل غير المحدد

Indefinite Integral

درسنا في الفصول السابقة الطرائق المختلفة لإيجاد مشتقات الدوال بأنواعها المختلفة. سنتعرض فيما يلي لحل المسألة التالية وهي: إيجاد الدالة F، التي عُلِمت مشتقتها f: فمثلا، لو كان: $F'(x) = f(x) = 3x^2$، لكان: $F(x) = x^3$

تعريف (١٠,٣)

نقول إن الدالة F (القابلة للاشتقاق على فترة I) هي دالة أصلية للدالة f، إذا كان:

$$F'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in I$$

تعريف (١٠,٤)

نقول إن الدالة F قابلة للاشتقاق على الفترة المغلقة [a, b]، إذا كانت:

(١) قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b)

(٢) وكانت المشتقتان اليمنى عند a واليسرى عند b موجودتين

ملحوظة (١٠,٦)

إذا كانت F_1, F_2 دالتين أصليتين لنفس الدالة f؛ قابلتين للاشتقاق على الفترة [a, b]، فإن: $F_2(x) - F_1(x) = c$ (c مقدار ثابت)، (استنادًا للنظرية (٦,٧)).

نتيجة (١٠,٥)

إذا علمنا دالة أصلية F_1 لدالة مفروضة f، فإن جميع الدوال الأصلية الأخرى F لنفس الدالة f تحقق قيمها المساواة:

$$F(x) = F_1(x) + c$$ (c مقدار ثابت)

تعريف (٥ , ١٠)

نعرف التكامل غير المحدد لدالة f ونرمز له بالرمز $\int f(x)dx$ بالصورة:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$ (c مقدار ثابت) (١٠ , ١٢)

حيث F دالة أصلية للدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة I.

فمثلا: $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$

وأيضًا: $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

لاحظ أن: $(\frac{x^2}{2})' = x$ ، $(-\cos x)' = \sin x$

نضع فيما يلي جدولاً أساسيًّا لبعض التكاملات القياسية

f(x)	$\int f(x)dx$	ملاحظات
a	ax + c	a مقدار ثابت، c ثابت اختياري
ax^n	$\frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$	
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + c$	$x \neq 0$
sin (ax)	$-\frac{\cos(ax)}{a} + c$	$a \neq 0$
cos (ax)	$\frac{\sin(ax)}{a} + c$	
$\sec^2 (ax)$	$\frac{\tan(ax)}{a} + c$	
$\csc^2 (ax)$	$-\frac{\cot(ax)}{a} + c$	
sec (ax) tan (ax)	$\frac{\sec(ax)}{a} + c$	
csc(ax) cot (ax)	$-\frac{\csc(ax)}{a} + c$	
$u^n u'$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$	u=g(x) قابلة للاشتقاق على فترة I
$\frac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert + c$	$u \neq 0$
e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a} + c$	$a \neq 0$

$f(x)$	$\int f(x)dx$	ملاحظات
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+c$	$a \neq 1, a \in IR^+$
$\sin u\ u'$	$-\cos u + c$	$u=g(x)$ قابلة للاشتقاق على فترة I
$\cos u\ u'$	$\sin u + c$	
$\sec^2 u\ u'$	$\tan u + c$	
$\csc^2 u\ u'$	$-\cot u + c$	
$\sec u \tan u\ u'$	$\sec u + c$	
$e^u\ u'$	$e^u + c$	
$a^u\ u'$	$\frac{a^u}{\ln a}+c$	$a \neq 1, a \in IR^+$
$\csc u \cot u u'$	$-\csc u + c$	$\sin u \neq 0$
$\frac{1}{1+u^2}u'$	$\tan^{-1}u + c$	
$\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}u'$	$\sec^{-1}u + c$	
$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$	$\sin^{-1}u + c$	

نتيجة (٦ , ١٠)

من (١٢ , ١٠)، نجد أن:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x) \quad (١٠ , ١٣)$$

نتيجة (٧ , ١٠)

١) $\int \phi'(x)dx = \phi(x) + c$ (ϕ دالة قابلة للاشتقاق على فترة I)

٢) $\int du = u + c$، حيث $u = \phi(x)$ قابلة للاشتقاق على فترة I.

نظرية (٥ , ١٠)

إذا قبلت الدالتان f, g دالتين أصليتين قابلتين للاشتقاق على فترة I، فإن:

١) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

٢) $\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1\int f(x)dx + c_2\int g(x)dx$

(c_2, c_1, c مقادير ثابتة).

مثـال (١٠,٧)

أوجد التكاملات التالية:

١) $\int (x^4 + x^2 - x)dx$

٢) $\int (\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$

٣) $\int xe^{x^2} dx$

٤) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$

الحـــل

١) $$\int (x^4 + x^2 - x)dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c$$

٢) $$\int (\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx = \int (x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{2}})dx$$
$$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c$$

٣) $$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int (2x)e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int u'e^u dx$$

حيث $u = x^2$

$$= \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

٤) $$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int (2x)(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\int u'u^{\frac{1}{2}}dx$$

حيث $u = 1 + x^2$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

مثـال (١٠,٨)

أوجد التكاملات التالية:

١) $\int \frac{2x+2}{4x^2+8x+1}dx$

٢) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}+1)dx$

٣) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

٤) $\int (\cos x+1)^3 \sin x dx$

الحـــل

١) $$\int \frac{2x+2}{4x^2+8x+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4(2x+2)}{4x^2+8x+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{u'}{u}dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln|4x^2+8x+1| + c$$

حيث $u = (4x^2 + 8x + 1)$

٢) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}+1)dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}+1)dx$

حيث $u = (\sqrt{x}+1)$

$= 2\int u' \sin u dx = 2\int \sin u \, du$

$= -2\cos(\sqrt{x}+1) + c$

٣) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{u'}{u} dx = \int \frac{du}{u} = \ln(1+e^x) + c$

حيث $u = (1 + e^x)$

٤) $\int (\cos x+1)^3 \sin x dx = -\int (\cos x+1)^3 (-\sin x) dx$

حيث $u = (\cos x + 1)$

$= -\int u^3 \, u' dx = -\int u^3 du$

$= -\frac{(\cos x+1)^4}{4} + c$

مثـــال (٩ , ١٠)

أوجد التكاملات التالية:

١) $\int \tan x \, dx$ ٢) $\int \cot x \, dx$

٣) $\int \sec x \, dx$ ٤) $\int \csc x \, dx$

الحـــــل

١) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{u'}{u} dx = -\ln|\cos x| + c$

٢) $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{u'}{u} dx = \ln|\sin x| + c$

٣) $\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$

$= \ln|\sec x + \tan x| + c$

(ضربنا البسط والمقام في secx+tanx ولاحظنا أن البسط مشتقة المقام).

٤) $\int \csc x dx = -\int \frac{-\csc x(\csc x + \cot x)}{\csc x + \cot x} dx = -\ln|\csc x + \cot x| + c$

(ضربنا البسط والمقام بالمقدار cscx+cotx)

مثـال (١٠ , ١٠)

أوجد كلا من:

١) $\int(\cos 3x - \sin x + \sec^2 2x)dx$

٢) $\int (\sin 2x - \cos x + \sec 2x \tan 2x)\, dx$

الحـــل

١) $\int (\cos 3x - \sin x + \sec^2 2x)dx = \frac{1}{3}\sin 3x + \cos x + \frac{1}{2}\tan 2x + c$

٢) $\int(\sin 2x - \cos x + \sec 2x \tan 2x)dx = -\frac{1}{2}\cos 2x - \sin x + \frac{1}{2}\sec 2x + c$

(٣ , ١٠) التكامل بالتعويض

The Integration by Substitution

نظرية (٦ , ١٠)

إذا كانت الدالة F دالة أصلية للدالة f($F'=f$)، وكانت g دالة قابلة للاشتقاق على الفترة [a, b] وإذا كانت $u=g(x)$ تقع في مجال F لكل قيم x المنتمية للفترة [a, b]، فإن:

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+c = F(g(x))+c \quad (١٠ , ١٤)$$

البرهـــان

استنادا لقاعدة السلسلة، فإن:

$$F(g(x))' = F'(g(x))\, g'(x) = F'(u)u' = f(u)u' = f(g(x))\, g'(x)$$

بتكامل طرفي المساواة: $(F(g(x))' = f(g(x))\, g'(x)$، نجد:

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx = F(g(x)) + c \quad (١٠ , ١٥)$$

ولو كاملنا طرفي المساواة: $f(u)u' = F(g(x))'$، لوجدنا:

$$\int f(u)u'\, dx = F(g(x)) + c$$

أو:

$$\int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c \quad (١٠ , ١٦)$$

من (١٥ , ١٠)، (١٦ , ١٠)، نجد (١٤ , ١٠).

مثـــال (١١ , ١٠)

أوجد التكاملات التالية:

١) $\int (1-x^2)^4 x^3 dx$

٢) $\int x\sqrt{x-1}dx$

٣) $\int \sin^3 x \cos^4 x \ dx$

الحـــــل

١) (أ) نضع $u = g(x) = 1-x^2$ ،ومنه: $x^2 = 1-u$

(ب) لنفاضل، فنجد $2xdx = -du$

(جـ) من الواضح أن: $xdx = -\frac{1}{2}du$

(د) نعوض في التكامل، فنجد: $-\frac{1}{2}\int u^4 x^2 du = -\frac{1}{2}\int u^4(1-u)du$

$$= -\frac{1}{2}(+\frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6}) + c = -\frac{(1-x^2)^5}{10} + \frac{(1-x^2)^6}{12} + c$$

٢) (أ) نضع: $\sqrt{x-1} = u \Leftarrow x-1 = u^2 \Leftarrow x = 1+u^2$

(ب) لنفاضل: $dx = 2u\ du$

(جـ) لنعوض في التكامل، فنجد

$$\int(1+u^2)\ u(2udu) = \int(2u^2 + 2u^4)\ du$$

$$= \frac{2u^3}{3} + \frac{2u^5}{5} + c = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + c$$

٣) نضع: $\cos x = u \Leftarrow -\sin x dx = du$

ويصبح التكامل على الشكل:

$$-\int \sin^2 x\ u^4\ du = -\int(1 - \cos^2 x)\ u^4\ du$$

$$= -\int(1-u^2)u^4\ du$$

$$= -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c = -\frac{(\cos x)^5}{5} + \frac{(\cos x)^7}{7} + c$$

ملحوظة (٧ , ١٠)

إذا كانت قوة $\sin x$ فردية، نضع $\cos x = u$. أما إذا كانت قوة $\cos x$ فردية فنضع $\sin x = u$.

من جدول التكامل، نعلم أن:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + c$$

$$\int \frac{1}{1+u^2} = \tan^{-1} u + c$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1} u + c$$

حيث u=g(x) دالة قابلة للاشتقاق على مجالها

لنعمم فيما يلي التكاملات السابقة من خلال النظرية التالية:

نظرية (١٠,٧)

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + c$$

حيث u=g(x) دالة قابلة للاشتقاق على مجالها

لنبرهن الفقرة الأولى:

لنضع: u=at، نجد: du=adt، ومنه:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \int \frac{adt}{\sqrt{a^2-a^2t^2}} = \int \frac{adt}{a\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= \sin^{-1} t + c = \sin^{-1} \frac{u}{a} + c$$

بالمثل نثبت بقية الفقرات.

مثـــال (١٠,١٢)

أوجد التكاملات التالية:

١) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{9-\tan^2 x}} dx$

٢) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx$

٣) $\int \frac{x}{9+x^4}dx$ ٤) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-4}}$

الحـــل

١) نضع: $\tan x = u \Leftarrow du = \sec^2 x dx$.

يكتب التكامل على الشكل:

$$\int \frac{du}{\sqrt{9-u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{3} + c = \sin^{-1}\frac{\tan x}{3} + c$$

٢) نضع: $x^2 = t \Leftarrow 2xdx = dt$.

يصبح التكامل على الصورة:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{t}{2} + c = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x^2}{2} + c$$

٣) نضع: $x^2 = t \Leftarrow 2xdx = dt$.

من الملاحظ أن التكامل يصبح على الشكل:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{9+t^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{t}{3} + c = \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x^2}{3} + c$$

٤) نضع: $x^2 = t \Leftarrow dt = 2xdx$.

والتكامل يصبح على الشكل:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{x^2\sqrt{t^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-4}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{t}{2} + c = \frac{1}{4}\sec^{-1}\frac{x^2}{2} + c$$

(٤ , ١٠) التكامل بالتجزيء
The Integration by Parts

نظرية (١٠ , ٧)

لتكن: $u = f(x)$، $v = g(x)$

إذا كانت f', g' متصلتين على الفترة المغلقة $[a, b]$، فإن:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

البرهــان

حيث إن: $(uv)' = u'v + uv'$

فإن: $\int (uv)'\,dx = \int u'v\,dx + \int uv'dx$

إذن: $uv = \int vdu + \int udv$

ومنه، نجد المطلوب.

مثــال (١٣, ١٠)

أوجد التكاملات التالية:

١) $\int x \ln x\,dx$

٢) $\int x\,e^x\,dx$

٣) $\int e^x \cos x\,dx$

٤) $\int x^2 \sin x\,dx$

الحــــل

١) لإجراء التكامل: $\int x \ln x dx$

نضع: $u = \ln x\ ,\ dv = x\,dx$

فنجد: $du = \frac{1}{x}dx\ , v = \frac{1}{2}x^2$

ومنه: $\int x \ln x dx = uv - \int vdu = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x}dx$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$$

٢) لإجراء التكامل: $\int x\,e^x\,dx$

نضع: $u = x\ ,\ dv = e^x\,dx$

فنجد: $du = dx\ ,\ v = e^x$

ومنه: $\int x\,e^x\,dx = uv - \int v\,du$

$$= x\,e^x - \int e^x\,dx$$

$$= x\,e^x - e^x + c$$

٣) لإجراء التكامل: $\int e^x \cos x dx$

نضع: $u = e^x \ , \ dv = \cos x \, dx$

فنجد: $du = e^x dx \ , \quad v = \sin x$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \qquad (١٠ , ١٧)$$

بالمثل لإجراء التكامل: $\int e^x \sin x dx$

نضع: $u = e^x \ , \ dv = \sin x \, dx$

فنجد: $du = e^x dx \ , \quad v = -\cos x$

ومنه: $$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \qquad (١٠ , ١٨)$$

بالتعويض من (١٨ , ١٠) بما يساويه في (١٧ , ١٠)، نجد:

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos dx$$

ومنه: $$2\int e^x \cos x \, dx = e^x (\sin x + \cos x)$$

إذن: $$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$$

٤) لإجراء التكامل: $\int x^2 \sin x dx$

نضع: $u = x^2 \ , \ dv = \sin x \, dx$

فنجد: $du = 2x \, dx \ , \quad v = -\cos x$

ومنه: $$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, dx \qquad (١٠ , ١٩)$$

بالمثل لإجراء التكامل: $\int x \cos x \, dx$

نضع: $u = x \ , \ dv = \cos x \, dx$

فنجد: $du = dx \ , \quad v = \sin x$

ومنه: $$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx$$

$$= x \sin x + \cos x + \frac{1}{2} c$$

بالتعويض في (١٩ , ١٠)، نجد:

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c$$

مثـال (١٤ , ١٠)

أوجد التكاملات التالية:

١) $\int x \sec^2 x \, dx$ ٢) $\int \sin^{-1} x \, dx$

٣) $\int \tan^{-1} x \, dx$ ٤) $\int (x^2 + x + 1) \ln x \, dx$

الحــــل

١) لإجراء التكامل: $\int x \sec^2 x \, dx$

نضع: $u = x \ , \ dv = \sec^2 x \, dx$

فنجد: $du = dx \ , \quad v = \tan x$

ومنه:
$$\int x \sec^2 x \, dx = x \tan x + \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$
$$= x \tan x + \ln |\cos x| + c$$

٢) لإجراء التكامل: $\int \sin^{-1} x \, dx$

نضع: $u = \sin^{-1} x \ , \ dv = dx$

فنجد: $du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx \ , \ v = x$

ومنه:
$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \int (-2x)(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$
$$= x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \frac{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

٣) لإجراء التكامل: $\int \tan^{-1} x \, dx$

نضع: $u = \tan^{-1} x \ , \ dv = dx$

فنجد: $du = \frac{1}{1 + x^2} dx, v = x$

ومنه:
$$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + x^2} dx$$
$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$$

(لاحظ أن البسط مشتقة المقام)

٤) لإجراء التكامل: $\int \ln x \, (x^2 + x + 1) \, dx$

نضع: $u = \ln x \ , \ dv = x^2 + x + 1$

فنجد: $du = \frac{1}{x} dx, v = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$

ومنه: $\int \ln x\,(x^2 + x + 1)\,dx = (\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x)\ln x - \int \frac{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x}{x}dx$

$$= (\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x)\ln x - \int (\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + 1)dx$$

$$= (\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x)\ln x - (\frac{x^3}{9} + \frac{1}{4}x^2 + x) + c$$

(٥ , ١٠) التكامل المحدد
Definite Integral

لتكن f دالة معرفة على فترة مغلقة [a, b]، لنجزئ هذه الفترة إلى n فترة جزئية بالنقاط:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$$

$\leftarrow \Delta x_1 \rightarrow \leftarrow \Delta x_2 \rightarrow$ .... λ_i

$x_0=a$ x_1 x_2 x_{i-1} x_i x_{n-1} $x_n=b$

$\leftarrow \Delta x_i \rightarrow$

المحققة للشرط:

$$x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots\ldots < x_{n-1} < x_n$$

لنحدد أطوال هذه الفترات، بالصورة:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots\ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

لتكن λ_i نقطة اختيارية من الفترة $[x_{i-1}, x_i]$، بالتالي، فإن:

$$\lambda_1 \in [x_0, x_1], \lambda_2 \in [x_1, x_2], \ldots\ldots, \lambda_i \in [x_{i-1}, x_i], \ldots$$

من الملاحظ أن:

$$f(\lambda_1)\Delta x_1 + f(\lambda_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\lambda_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x_i$$

تعريف (٦ , ١٠)

نسمي المجموع $\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x_i$ بمجموع ريمان (Riemann sum) للدالة f على الفترة [a,b] ونرمز له أحيانا بالرمز S_n.

مثـال (١٠,١٥)

أوجد مجموع ريمان للدالة f، حيث $f(x) = 2x + 1$ على الفترة $[1,5]$، علما أن نقاط التجزئة لهذه الفترة هي: $1, \frac{3}{2}, 2, 3, \frac{9}{2}, 5$ وأن λ_i هي منتصفات فترات التجزئة $(i = 1,2,3,4,5)$.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{3}{2} & 2 & 3 & \frac{9}{2} & 5 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$

الحــــل

i	1	2	3	4	5
λ_i	$\frac{1+\frac{3}{2}}{2}=\frac{5}{4}$	$\frac{\frac{3}{2}+2}{2}=\frac{7}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{15}{4}$	$4\frac{3}{4}=\frac{19}{4}$
Δx_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$f(\lambda_i)$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	6	$\frac{17}{2}$	$\frac{21}{2}$
$f(\lambda_i)\Delta x_i$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$	6	$\frac{51}{4}$	$\frac{21}{4}$

$$\sum_{i=1}^{5} f(\lambda_i)\Delta x_i = \frac{112}{4} = 28$$

تعريف (١٠,٧)

إذا انتهى مجموع ريمان: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x_i$ نحو نفس النهاية:

١)مهما كانت التجزئة

٢)ومهما كان اختيار λ_i داخل فترات التجزئة.

وذلك عندما ينتهي أكبر أطوال الفترات الجزئية نحو الصفر:

$\max \Delta x_i \to 0$ فإننا نسمي هذا المجموع بالتكامل المحدد للدالة f على الفترة $[a, b]$، ونرمز له بالرمز:

$$\int_a^b f(x)dx$$

إذن:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x_i$$

أو:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} S_n$$

نقبل صحة النظرية التالية بدون برهان.

نظرية (٨ , ١٠)

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة [a, b]، فإنها قابلة للتكامل على هذه الفترة.

مثـــال (١٦ , ١٠)

باستخدام التعريف، أوجد التكامل:

$$\int_a^b x dx$$

الحــــل

f دالة متصلة على [a, b] لأنها دالة كثيرة حدود، إذن هي قابلة للتكامل على [a, b] استنادًا للنظرية السابقة.

لنختر التجزئة بحيث تكون أطوال الفترات متساوية (تجزئة منتظمة)، إذن:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n = \frac{b-a}{n}$$

بالتالي، فإن:

$x_0=a$ — $x_1=a+\Delta x$ — $x_2=a+2\Delta x$ — $x_i=a+i\Delta x$ — $x_n=b$

$$x_i = a + i\,\Delta x \;,\; i = 1,2,......,n$$

لنختر λ_i بحيث يكون: $\lambda_i = x_i$، فنجد: $f(\lambda_i) = f(x_i) = x_i$

لنشكل مجموع ريمان، فنجد:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \Delta x(x_1 + x_2 + ... + x_i + ... + x_n)$$

$$= \Delta x(a + \Delta x + a + 2\Delta x + ... + a + i\Delta x + + ... a + n\Delta x)$$

$$= \Delta x[na + \Delta x(1 + 2 + 3 + ... + n)]$$

لكن: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (مجموعة حدود متوالية عددية)

إذن:

$$S_n = \frac{b-a}{n}[na + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}]$$

$$= (b-a)[a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{n+1}{n}]$$

عندما $\Delta x \to 0$، فإن $n \to \infty$، إذن:

$$\int_a^b x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = (b-a)[a + \frac{b-a}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}]$$

$$= (b-a)(a + \frac{b-a}{2}) = \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

(لأن $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$)

تعريف (٨ , ١٠)

نقبل بالتعريف أن:

١) $\int_a^a f(x)dx = 0$ (f معرفة عند a)

٢) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (b>a) (١٠ , ٢٠)

استنادًا إلى تعريف التكامل المحدد يمكن البرهان على صحة النظريات التالية والتي نقبلها بدون برهان.

نظرية (١٠ , ١٠)

إذا كانت f, g قابلتين للتكامل على الفترة [a, b]، فإن:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1\int_a^b f(x)dx + c_2\int_a^b g(x)dx$$

نظرية (١١ , ١٠)

إذا كانت f قابلة للتكامل على فترة مغلقة [a, b]، وإذا كان: $c\in[a,b]$ ، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

نظرية (١٢ , ١٠)

إذا كانت f قابلة للتكامل على الفترة [a, b]، وكان $f(x) \geq 0$ على هذه الفترة، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

نظرية (١٣ , ١٠)

إذا كانت f، g قابلتين للتكامل على الفترة [a, b] وكانت $g(x) \leq f(x)$ على هذه الفترة، فإن: $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

نظرية القيمة الوسطى للتكامل (١٣ , ١٠)

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة [a, b]، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad (١٠ , ٢١)$$

حيث: $c \in (a,b)$

النظرية الأساسية في التكامل (١٤ , ١٠)

The Fundamental Theorem of Calculus

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة [a, b]. فإن:

١)مشتقة الدالة G المعرفة بالمعادلة:

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad (١٠ , ٢٢)$$

عند x حيث x ∈ [a,b] ، هي: $G'(x)=f(x)$

٢)إذا كانت F دالة أصلية للدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة [a, b]، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

البرهـــان

لنبرهن على صحة الفقرة الثانية فقط:

من الملاحظ من العلاقة (٢٢ , ١٠)، أن G دالة أصلية للدالة f. فإذا كانت F دالة أصلية أخرى للدالة f، فإن:

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)+c \qquad (١٠ , ٢٣)$$

(الفرق بين دالتين أصليتين لنفس الدالة مقدار ثابت).

لتحديد c نعوض في طرفي العلاقة (٢٣ , ١٠) عن x بالقيمة a، فنجد:

$$\int_a^a f(t)dt=F(a)+c=0$$

(استنادًا للتعريف (٨ , ١٠))

ومنه c = - F(a). بالتعويض عن c بقيمته في (٢٣ , ١٠)، نجد:

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$$

وبشكل خاص إذا كانت: x = b، فإن:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

أو:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

مثـــال (١٠ , ١٧)

أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة الوسطى للتكامل على الفترة [0 , 1]، إذا كان: $f(x) = 3x^2$

الحـــــل

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

وحسب العلاقة (١٠ , ٢١)، فإن:

$\int_0^1 f(x)dx = 3c^2(1-0) = 1$، إذن $c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

والمقبول: $c = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (0,1)$

مثـــال (١٠ , ١٨)

أوجد قيمة كل من:

١) $\int_1^2 (x^2 + x + 1)dx$

٢) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x (1 + \sin^2 x)^3 dx$

الحـــل

١)
$$\int_1^2 (x^2+x+1)dx = [\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x]_1^2$$
$$= (\frac{8}{3}+2+2)-(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1)$$
$$= \frac{7}{3}+\frac{5}{2}=\frac{29}{6}$$

٢)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cos x(1+\sin^2 x)^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin^2 x)^3(2\sin x\cos x)dx$$
$$= \frac{1}{2}[\frac{(1+\sin^2 x)^4}{4}]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{1}{2}[\frac{(1+\frac{1}{2})^4}{4}-\frac{1}{4}]$$
$$= \frac{1}{8}(\frac{81}{16}-1)=\frac{1}{8}\frac{65}{16}=\frac{65}{128}$$

نتيجة (٨ , ١٠)

استنادًا إلى (١٤ , ١٠) وإذا افترضنا أن f متصلة على مدى g وأن g قابلة للاشتقاق على الفترة [a,b] وأن مشتقتها متصلة على هذه الفترة، فإن:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))]_a^b$$

(f دالة أصلية للدالة F)= F(g(b)) − F(g(a))

لكن استنادًا إلى (١٤ , ١٠) أيضًا وبنفس الشروط أعلاه، فإن:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b))-F(g(a))$$

إذن:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x))dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

مثـــال (١٠,١٩)

أوجد قيمة التكامل:

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$ (**إرشاد:** أجْرِ التغيير x = 2sin u)

الحـــــل

من المعادلة: $x = 2\sin u$ $(\frac{\pi}{2} \geq u \geq \frac{-\pi}{2})$

نجد: $dx = 2\cos u\, du$، عندما: $x = 0$، فإن: $2\sin u = 0 \Leftarrow u = 0$

وعندما: $x = 2$، فإن: $2\sin u = 2 \Leftarrow u = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 u} \cdot 2\cos u\, du$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du$$

لكن: $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1+\cos 2u)$، إذن:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2u)\,du = 2(u+\frac{\sin 2u}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

تمـــاريـــن (١٠,١)

أوجد مشتقات المقادير التالية:

١) $x2^{x^2+1}$ ٢) $\log_3 x^2$

٣) $xe^{\ln(x^2+1)}$ ٤) $\sqrt{\ln x}$

٥) $x\ln(\sin x)$ ٦) $\ln(\frac{(2x+1)^4\sqrt{x+1}}{3x-7})$

٧) $2^{\ln x}$ ٨) $(e^{2x}+1)^3$

٩) $\frac{\ln x+1}{x}$ ١٠) $\log_3(x^2+1)$

١١) $\tan^2(e^x+1)$ ١٢) $\log_4\left|\frac{2x-1}{bx+3}\right|$

١٣) $(2^x+2^{-x})^3$ ١٤) $x10^{\frac{1}{x}}$

١٥) $2^{\sin^3 x}$ ١٦) $\sec(\tan e^x)$

١٧) $\sin^{-1}\sqrt{1-e^x}$ ١٨) $\cos^{-1}(\ln x)$

١٩) $\tan^{-1}(2x)$ ٢٠) $2^x \ln|\sin x|$

٢١) $x^{\sin x},\ x>0$ ٢٢) $(x^2+1)^x$

٢٣) $\dfrac{(x^2+1)^7(x^2-1)^4}{\sqrt{x^2+x+1}}$ ٢٤) $\ln\left(\dfrac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}}{(1+\sin^2 x)^3}\right)$

٢٥) $x^{\csc x+\tan x}$ (x>0) ٢٦) $2^{\tan x}\sin x$

٢٧) $\cos^{-1}(\cos(e^{2x}))$ ٢٨) $3^x\sqrt{x+1}$

٢٩) $\ln(\tan^{-1}x^3)$ ٣٠) $\sec^{-1}(\ln\sqrt{x})$

أوجد 'y إذا كان:

٣١) $y\ln x + x = y$ ٣٢) $xe^{-xy} + y = 1$

لتكن f دالة قابلة للتكامل على الفترة [a,b]. نعرف المساحة الواقعة تحت المنحني y=f(x)، حيث $f(x)\geq 0$ وفوق محور السينات وبين المستقيمين x=a، x=b بالصيغة: $S=\int_a^b f(x)dx$

أوجد فيما يلي المساحة المحصورة بين المنحني والمستقيمات المبينة في كل فقرة:

٣٣) (أ) $y=e^{-x}$، $x=0$، $x=1$، $y=0$

(ب) $y=x^2$، $x=1$، $x=2$، $y=0$

(ج) $y=\sqrt{x}$، $x=1$، $x=4$، $y=0$

(د) $y=\ln x$، $x=1$، $x=e$، $y=0$

أوجد التكاملات التالية:

٣٤) $\int \dfrac{(2x-1)^2}{x}dx$ ٣٥) $\int\left(x^2+x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

٣٦) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \sec x \tan x)dx$

٣٧) $\int \frac{1}{\sin x \tan x} dx$

٣٨) $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$

٣٩) $\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^2 dx$

٤٠) $\int (x^2 - 1)(x^3 + x)dx$

٤١) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx$

٤٢) $\int_2^3 \frac{x^2 - 1}{x - 1} dx$

٤٣) $\int \frac{x^2 - x^3 + x + 1}{\sqrt{x}} dx$

٤٤) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sec x} dx$

٤٥) $\int \frac{1}{\cos^2 t} dt$

٤٦) $\int \frac{d}{dx} (\sin^3 x + \sqrt{x})dx$

٤٧) $\int_0^1 \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x)dx$

٤٨) $\frac{d}{dx} \int x^8 (1 + x)^2 dx$

٤٩) $\int (ax + b)^{10} dx$

٥٠) $\int (\sin 3x + \cos 4x)dx$

٥١) $\int_0^1 (x^3 + 1)^2 x^2 dx$

٥٢) $\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

٥٣) $\int \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^3} dx$

٥٤) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin^4 t \cos t dt$

٥٥) $\int x^2 \sqrt[5]{x^3 + 1} dx$

٥٦) $\int \frac{(5 + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$

٥٧) $\int \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} dx$

٥٨) $\int (\sin 3x + 1)^3 \cos 3x dx$

٥٩) $\int \frac{\sec^2 x}{(1 - \tan x)^2} dx$

٦٠) $\int x \sec x^2 \tan x^2 dx$

٦١) $\int \cos \sqrt[3]{\sin x} dx$

٦٢) $\int (e^{-3x} + \tan 2x)dx$

٦٣) $\int (\cot 3x + 2^x)dx$

٦٤) $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 7} dx$

٦٥) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

٦٦) $\int (e^x + 1)^2 dx$

٦٧) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 5} dx$

٦٨) $\int x2^{x^2}\,dx$

٦٩) $\int_0^1 e^{\ln x}dx$

٧٠) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

٧١) $\int \frac{\tan\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{2}{3}}}dx$

٧٢) $\int (\sec x+\tan x)dx$

٧٣) $\int \frac{1}{\sin 3x}dx$

٧٤) $\int (1+\cot(\sin x))\cos x dx$

٧٥) $\int 3^{\sin x}\cos x dx$

٧٦) $\int (1+\csc x)^2 dx$

٧٧) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

٧٨) $\int \sin^{-1}x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

٧٩) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan^{-1}x+1)^3}{1+x^2}dx$

٨٠) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

٨١) $\int xe^{-x}dx$

٨٢) $\int x\ln x dx$

٨٣) $\int x\cos 3x dx$

٨٤) $\int x^5\ln x dx$

٨٥) $\int x^2\sin x dx$

٨٦) $\int e^x\sin 2x dx$

٨٧) $\int e^{x^2+\ln x}dx$

٨٨) $\int_{-2}^{3}\sqrt{|x-1|}dx$

٨٩) $\int \sqrt{x}\ln x\;dx$

٩٠) $\int \sin\sqrt{x}dx$

٩١) $\int \tan^{-1}(2x)dx$

٩٢) $\int \sin^{-1}(3x)dx$

٩٣) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sec^2 x dx$

٩٤) $\int 2^x e^x dx$

٩٥) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,dx$

٩٦) $\int x^3\sqrt{1-x}dx$

٩٧) $\int_{-1}^{2} |x-1|\,dx$

(٦ , ١٠) تكامل حاصل ضرب نسبتين مثلثيتين

مثـال (٢٠ , ١٠)

أوجد التكاملات التالية:

١) $\int \sin 2x \cos x\, dx$ ٢) $\int \cos 3x \sin 2x\, dx$

الحـــل

١) نعلم أن:
$$\boxed{\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]}$$

إذن:

$$\int \sin 2x \cos x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 3x + \sin x) dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + c$$

٢) نعلم أن:
$$\boxed{\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]}$$

إذن:

$$\int \cos 3x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x) dx = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + c$$

مثـال (٢١ , ١٠)

أوجد التكاملات التالية:

١) $\int \cos 4x \cos 3x\, dx$ ٢) $\int \sin 3x \sin 2x\, dx$

١) نعلم أن:
$$\boxed{\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]}$$

إذن:

$$\int \cos 4x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 7x + \cos x) dx = \frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{2}\sin x + c$$

٢) نعلم أن:
$$\boxed{\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]}$$

إذن:

$$\int \sin 3x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 5x) dx = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + c$$

(١٠, ٧) التكاملات المثلثية من الشكل: $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

١) إذا كان m عددا فرديا (دالة الجيب من أس فردي)، نفرض: $\cos x = t$
٢) إذا كان n عـددا فرديا (دالة جيب التمام من أس فردي)، نفرض: $\sin x = t$
٣) إذا كان m,n زوجيين، نستعين بالصيغتين:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

مثـال (١٠, ٢٢)

أوجد التكاملات التالية:

١) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

٢) $\int \cos^3 x \sin x \, dx$

٣) $\int \sin^4 x \, dx$

٤) $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$

الحـــل

١) لنضع: $\cos x = t \Leftarrow dt = -\sin x \, dx$

ويصبح التكامل على الشكل:

$$\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \, dx$$

$$= -\int (1-t^2)t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + c$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

٢) لنضع: $\sin x = t \Leftarrow dt = \cos x \, dx$

ويصبح التكامل على الشكل:

$$\int (1-\sin^2 x)\sin x\cos x\,dx=\int \cos^2 x \sin x \cos x\,dx$$

$$=\int(1-t^2)t\,dt=\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{4}+c$$

$$=\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^4 x}{4}+c$$

٣)

$$\int \sin^4 x\,dx=\int(\sin^2 x)^2\,dx=\int(\frac{1-\cos 2x}{2})^2\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2})dx$$

$$=\frac{1}{4}(x-\sin 2x+\frac{1}{2}x+\frac{\sin 4x}{8})+c$$

٤)

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx=\int(\frac{1-\cos 2x}{2})\cdot(\frac{1+\cos 2x}{2})^2\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)$$

$$=\frac{1}{8}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x-\cos 2x-2\cos^2 2x-\cos^3 2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int(1+\cos 2x-\frac{1+\cos 4x}{2}-\cos^3 2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}(x+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{\sin 4x}{8})-\frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx$$

لكن:

$$\int \cos^3 2x\,dx=\int \cos^2 2x\cos 2x\,dx$$

$$=\int(1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx$$

$$=\int \cos 2x-\frac{1}{2}\int \sin^2 2x(2\cos 2x)dx$$

$$=\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sin^3 2x}{3}+a$$

(a ثابت اختياري)

وبالتالي، فإن:

$$\int \sin^2 x \cos^4 xdx$$
$$= \frac{1}{8}(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{8}) - \frac{1}{8}(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{6}\sin^3 2x) + c$$
$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{1}{48}\sin^3 2x + c$$

(٨ , ١٠) التكاملات المثلثية من الشكل $\int \tan^m x \sec^n xdx$

حيث: n, m عددان طبيعيان وقد يساوي أحدهما الصفر.

تصادفنا هنا ثلاث حالات أساسية:

١) قوة $\sec x$ **زوجية:**

والوسيلة لتبسيط التكامل إجراء التغيير: $\tan x = u$

٢) قوة $\sec x$ **وبالمثل قوة** $\tan x$ **فردية:**

والوسيلة لتبسيط التكامل إجراء التغيير: sec x = u

٣) قوة $\sec x$ **فردية وقوة** $\tan x$ **زوجية:**

هنا نلجأ إلى التكامل بالتجزيء لتبسيط التكامل.

٤) قوة $\sec x$ **تساوي الصفر**: نكتب التكامل على الشكل:

$(m \geq 2) \int \tan^m xdx = \int \tan^{m-2} x(\sec^2 x - 1)dx$ ، فنجد:

$$\boxed{\int \tan^m xdx = \frac{1}{m-1}\tan^{m-1} x - \int \tan^{m-2} xdx} \qquad (١٠ , ٢٤)$$

ثم نتابع بنفس الطريقة بالنسبة للتكامل الناتج. وسنوضح ذلك بالتفصيل فيما يلي:

١) قوة $\sec x$ **زوجية وأكبر من** 2

(أ) نكتب التكامل على الشكل: $\int \tan^m x \sec^{n-2} x \sec^2 xdx$

(ب) نعبر عن $\sec^{n-2} x$ بدلالة $\tan x$ باستخدام العلاقة:

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$.

(ج) نجري التغيير $\tan x = u$ فيتحول التكامل إلى تكامل كثيرة حدود في المتغير u.

مثـــال (١٠,٢٣)

أوجد التكامل: $\int \tan^3 x \sec^6 x dx$

الحـــل

(أ)نكتب التكامل على الشكل: $\int \tan^3 x \sec^4 x \sec^2 x dx$

(ب)نعبر عن $\sec^4 x$ بدلالة $\tan x$، فنجد: $\sec^4 x = (1+\tan^2 x)^2$

(ج)نجري التغيير $\tan x = u$، فنجد: $du = \sec^2 x dx$ يصبح التكامل على الشكل:

$$\int \tan^3 x(1+\tan^2 x)^2 \sec^2 x dx = \int u^3(1+u^2)^2 du = \int u^3(1+2u^2+u^4) du$$

$$= \int (u^3+2u^5+u^7) du = \frac{u^4}{4}+\frac{2u^6}{6}+\frac{u^8}{8}+c = \frac{\tan^4 x}{4}+\frac{\tan^6 x}{3}+\frac{\tan^8 x}{8}+c$$

مثـــال (١٠,٢٤)

أوجد التكامل: $\int \sec^4 x dx$

الحـــل

نكتب التكامل على الشكل: $\int \sec^2 x \sec^2 x dx = \int (1+\tan^2 x)\sec^2 x dx$

نضع: $\tan x = u \Leftarrow du = \sec^2 x dx$

يصبح التكامل على الشكل: $\int (1+u^2) du = \frac{u^3}{3}+u+c = \frac{\tan^3 x}{3}+\tan x + c$

٢) قوة $\sec x$ وبالمثل قوة $\tan x$ فردية

(أ) نكتب التكامل على الشكل: $\int \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x \sec x \tan x dx$

(ب)نعبر عن $\tan^{m-1} x$ بدلالة $\sec x$ باستخدام العلاقة: $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

(ج)نجري التغيير: $\sec x = u$ فيتحول التكامل إلى تكامل كثيرة حدود في المتغير u.

مثـــال (١٠,٢٥)

أوجد التكامل: $\int \sec^3 x \tan^3 x dx$

الحـــل

(أ) نضع التكامل على الشكل: $\int \sec^2 x \tan^2 x \sec x \tan x dx$

(ب)نعبر عن $\tan^2 x$ بدلالة $\sec x$ باستخدام الصيغة: $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

(ج)نجري التغيير: $\sec x = u \Leftarrow du = \sec x \tan x dx$

يصبح التكامل على الشكل:

$$\int \sec^2 x(\sec^2 x-1)\sec x\tan x dx=\int u^2(u^2-1)du$$
$$=\int (u^4-u^2)du=\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}+c=\frac{\sec^5 x}{5}-\frac{\sec^3 x}{3}+c$$

٣) قوة $\sec x$ فردية وقوة $\tan x$ زوجية نعبر عن $\tan x$ بدلالة $\sec x$ باستخدام الصيغة: $\tan^2 x=\sec^2 x-1$ ثم نكامل بالتجزيء.

نظرية (١٠, ١٦)

إذا كان $I_n=\int \sec^n x dx$ ، حيث n عدد طبيعي $(n\geq 2)$ ، فإن:

$$I_n=\frac{1}{n-1}\tan x\sec^{n-2} x+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2} \qquad (١٠,٢٥)$$

البرهان

نكتب التكامل على الشكل:

$$I_n=\int \sec^{n-2} x \sec^2 x dx$$

نضع:
$$\left.\begin{aligned} u=\tan x &\Leftarrow \sec^2 x dx=du\\ dv=(n-2)\sec^{n-3} x\sec x\tan x dx &\Leftarrow \sec^{n-2} x=v\end{aligned}\right\}$$

نطبق الصيغة: $\int v du=uv-\int u dv$ ، فنجد:

$$I_n=\int \sec^{n-2} x\sec^2 x dx=\tan x\sec^{n-2} x-(n-2)\int \sec^{n-2} x\tan^2 x dx$$
$$=\tan x\sec^{n-2} x-(n-2)\int \sec^{n-2} x(\sec^2 x-1)dx$$
$$=\tan x\sec^{n-2} x-(n-2)I_n+(n-2)I_{n-2}$$

ومنه، فإن:
$$(n-1)I_n=\tan x\sec^{n-2} x+(n-2)I_{n-2}$$

أو:
$$I_n=\frac{1}{n-1}\tan x\sec^{n-2} x+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

إذا كان: n = 3 ، فإن:

$$\int \sec^3 x dx=\frac{1}{2}\tan x\sec x+\frac{1}{2}\int \sec x dx$$

$$\boxed{\int \sec^3 x=\frac{1}{2}\tan x\sec x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+c} \qquad (١٠,٢٦)$$

ملحوظة (١٠,٨)

ينصح بتطبيق الصيغة (١٠,٢٦) فقط عندما يكون n عددا فرديا، أما بالنسبة للأعداد الزوجية فمن الأسهل مكاملتها مباشرة حسبما أشرنا إليه سابقا.

مثـــال (١٠,٢٦)

أوجد التكامل: $\int \tan^2 x \sec^3 x dx$

الحـــل

نعبر عن tan x بدلالة sec x ، فيصبح التكامل على الصورة:

$$\int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x dx = \int \sec^5 x dx - \int \sec^3 x dx \qquad (١٠,٢٧)$$

بالاستفادة من الصيغة (١٠,٢٥)، نجد:

$$I_5 = \frac{1}{4}\tan x \sec^3 x + \frac{3}{4} I_3$$

ومن نفس الصيغة، نجد:

$$I_3 = \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$$

بالتعويض في (١٠,٢٧)، نجد المطلوب.

مثـــال (١٠,٢٧)

أوجد التكامل: $\int \csc^5 x dx$

الحـــل

بالاستفادة من (١٠,٢٥)، نعلم أن:

$$\int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1}\tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x dx$$

لنبدل x في طرفي المساواة السابقة بالمقدار: $\frac{\pi}{2} - x$ ، فنجد:

$$-\int \csc^n x dx = \frac{1}{n-1}\cot x \csc^{n-2} x - \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x dx$$

(لاحظ أن: $\csc x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ، وأن: $d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -dx$)

إذن:

$$\boxed{\int \csc^n x dx = -\frac{1}{n-1}\cot x \csc^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x dx}$$

بالأسلوب نفسه المتبع في المثال السابق، نجد المطلوب.

٤) قوة $\sec x$ تساوي الصفر

مثـــال (١٠,٢٨)

أوجد التكاملين:

١) $\int \tan^6 x dx$ ٢) $\int \tan^5 x dx$

الحــل

١) نكتب التكامل على الصورة: $\int \tan^4 x \tan^2 x dx$

ثم نعوض عن $\tan^2 x$ بالقيمة $\sec^2 x - 1$، فنجد:

$$\int \tan^4 x \tan^2 x dx = \int \tan^4 x(\sec^2 x - 1)dx = \int \tan^4 x \sec^2 x dx - \int \tan^4 x dx$$

نتبع نفس الأسلوب بالنسبة للتكامل: $\int \tan^4 x dx$، فنجد:

$$\begin{aligned}\int \tan^6 x dx &= \int \tan^4 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)dx \\ &= \int \tan^4 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x \sec^2 x dx + \int (\sec^2 x - 1)dx \\ &= \int \tan^4 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x \sec^2 x dx + \int \sec^2 x dx - \int dx\end{aligned}$$

(بالنسبة للتكاملات الثلاث الأول نضع: $\tan x = u$)

$$= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c$$

٢) نكتب التكامل على الصورة: $\int \tan^3 x \tan^2 x dx$

بنفس الأسلوب السابق نكتب التكامل على الشكل:

$$\int \tan^5 x dx = \int \tan^3 x(\sec^2 x - 1)dx = \int \tan^3 x \sec^2 x dx - \int \tan x(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int \tan^3 x \sec^2 x dx - \int \tan x \sec^2 x dx + \int \tan x dx = \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\cos x| + c$$

مثـــال (١٠, ٢٩)

ليكن: $I_n = \int \tan^n x dx \qquad (n \geq 2)$

أثبت أن: $I_n = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2} \qquad (١٠, ٢٨)$

الحـــل

من الملاحظ أن:

$$I_n = \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)dx$$
$$= \int \tan^{n-2} x \cdot \sec^2 x dx - I_{n-2}$$

(نضع: $\tan x = u \Leftarrow du = \sec^2 x dx$)، إذن:

$$I_n = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}$$

مثـــال (١٠, ٣٠)

أوجد التكامل: $\int \cot^8 x dx$

الحـــل

من (١٠, ٢٨)، نعلم أن:

$$\boxed{\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx}$$

لنعوض عن x بالمقدار: $\frac{\pi}{2} - x$ في طرفي المطابقة السابقة، فنجد:

$$\Leftarrow \int \tan^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \int \tan^{n-2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$-\int \cot^n x dx = \frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x + \int \cot^{n-2} x dx$$

ومنه:

$$\boxed{\int \cot^n x = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx}$$

ومنه:

$$\int \cot^8 x dx = -\frac{1}{7}\cot^7 x - \int \cot^6 x dx$$

$$\int \cot^6 x dx = -\frac{1}{5}\cot^5 x - \int \cot^4 x dx$$

$$\int \cot^4 x dx = -\frac{1}{3}\cot^3 x - \int \cot^2 x dx$$

$$\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + c$$

إذن:

$$\int \cot^8 x dx = -\frac{1}{7}\cot^7 x + \frac{1}{5}\cot^5 x - \frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + c$$

تمارين (٢ ,١٠)

أوجد التكاملات التالية:

١) $\int \sin 3x \cos 5x dx$

٢) $\int \sin 10x \sin 15x dx$

٣) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} dx$

٤) $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{2} dx$

٥) $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b) dx$

٦) $\int \sin wt \sin(wt+\varphi) dt$

٧) $\int \cos x \cos^2 3x dx$

٨) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$

أوجد التكاملات التالية:

٩) $\int \cos^3 x dx$

١٠) $\int \sin^5 x dx$

١١) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

١٢) $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} dx$

١٣) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$

١٤) $\int \sin^4 x dx$

١٥) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

١٦) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

١٧) $\int \cos^6 3x dx$

١٨) $\int \csc^4 x dx$

١٩) $\int \sec^6 x dx$

٢٠) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx$

٢١) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x}$

٢٢) $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$

٢٣) $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}$

٢٤) $\int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x\cos x}dx$

٢٥) $\int \csc^5 x dx$

٢٦) $\int \sec^5 4x dx$

٢٧) $\int \tan^2 5x dx$

٢٨) $\int \cot^4 x dx$

٢٩) $\int \left(\tan^3\frac{x}{3}+\tan^4\frac{x}{4}\right)dx$

٣٠) $\int x\sin^2 x^2 dx$

٣١) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$

٣٢) $\int \sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}\, dx$

٣٣) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}$

٣٤) $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$

٣٥) $\int \cot^3 x dx$

(٩ , ١٠) التعويضات المثلثية
The Trigonometric Substitution

نظرية (١٧ , ١٠)

لتكن f دالة متصلة على الفترة [a,a-].

١) إذا كانت f دالة زوجية تحقق الشرط f(x) = f(− x)، فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

٢) إذا كانت f دالة فردية تحقق الشرط f(x) − = f(− x)، فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

يستحسن في كثير من التكاملات التي تحوي المقادير:

$\sqrt{a^2-x^2}$ ، $\sqrt{a^2+x^2}$ ، $\sqrt{x^2-a^2}$ ، حيث a > 0

إجراء التغيير للمتحول x، كما يلي:

المقدار	التغيير	القيمة الجديدة للمقدار	مجال t	قيمة t بدلالة x
$\sqrt{a^2-x^2}$	x = a sin t	a cos t	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$t=\sin^{-1}\frac{x}{a}$
$\sqrt{a^2+x^2}$	x = a tan t	a sec t	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$t=\tan^{-1}\frac{x}{a}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	x = a sec t	a tan t	$[+\pi,\frac{3\pi}{2})\cup[0,\frac{\pi}{2})$	$t=\sec^{-1}\frac{x}{a}$

لاحظ أن: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ، $\sec^2 x=1+\tan^2 x$ ، $\tan^2 x=\sec^2 x-1$

مثـــال (١٠,٣١)

أوجد قيمة التكامل: $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

الحـــل

نضع: $x = \sin u$ ، فنجد $dx = \cos u du$

(لاحظ أن: $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ ، وأن $u \neq 0$)

عندما: $x = \frac{1}{2}$ ، فإن: $\sin u = \frac{1}{2} \Leftarrow u = \frac{\pi}{6}$

وعندما: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، فإن: $\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftarrow u = \frac{\pi}{4}$ ، إذن:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos u\, du}{\sin^2 u \cdot \cos u} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\sin^2 u} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \csc^2 u\, du$$

$$= -\cot u \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\cot\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{6} = -1 + \sqrt{3} \approx -1 + 1.73 \approx 0.73$$

نظرية (١٠,١٨)

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة [a,b]، وإذا كانت الدالتان F,G المعـرفتين بالمعادلتـــين: v=F(x) ، u=G(x). قابلتين للاشتقاق على الفترة I. وإذا كان المقداران u,v ينتميان إلى الفترة [a,b]، فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_u^v f(t)dt\right) = f(v)\frac{dv}{dx} - f(u)\frac{du}{dx}$$

مثـــال (١٠,٣٢)

أوجد مشتقة الدالة المعرفة بالمساواة: $y = \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\ dt$

الحـــل

نعلم أن: $\frac{d}{dx}\left(\int_u^v f(t)\, dt\right) = f(v)\frac{dv}{dx} - f(u)\frac{du}{dx}$

إذن:

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$=\sqrt{1+v^2}\cdot 2x-\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+x^4}\cdot(2x)-\sqrt{1+x^2}$$

$$(v=x^2)$$

مثـال (١٠,٣٣)

أوجد التكامل: $\int \frac{x^2}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

الحـــل

لنجر التغيير: $u=\sin^{-1}(2x)\Leftrightarrow 2x=\sin u$

$$\left(\frac{\pi}{2}>u>-\frac{\pi}{2}\right)$$

فنجد: $1-4x^2=1-\sin^2 u=\cos^2 u$ ، $dx=\frac{1}{2}\cos u\,du$

يكتب التكامل على الشكل:

$$\int \frac{x^2}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx=\frac{1}{4}\int \frac{\sin^2 u}{(\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{2}\cos u\,du=\frac{1}{8}\int \frac{\sin^2 u\cos u}{\cos^3 u}\,du$$

$$=\frac{1}{8}\int \tan^2 u\,du=\frac{1}{8}\int(\sec^2 u-1)\,du$$

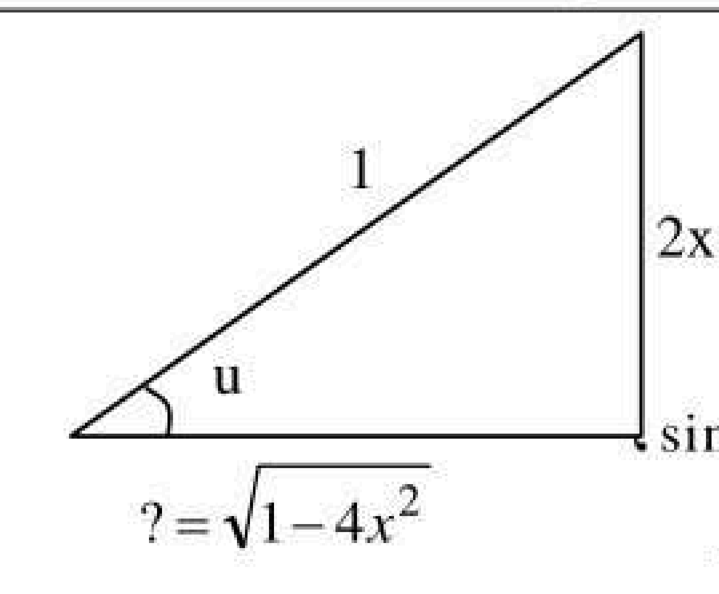
$$=\frac{1}{8}(\tan u-u)+c$$

(لاحظ أن: $\sin u=\frac{2x}{1}\Leftarrow \tan u=\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$)

(اعتبرنا u زاوية حادة)

ملحوظة:

لو وقعت u في الربع الرابع، لكانت $x\le 0$ ، $\sin u\le 0$ ، $\cos u>0$ ، $\tan u\le 0$ وحصلنا على نفس النتيجة.



$$\left(\sin u=\frac{2x}{1}\right)$$

مما سبق، نجد:

$$\int \frac{x^2}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \sin^{-1} 2x\right) + c$$

مثـــال (١٠,٣٤)

أوجد التكامل: $\int \frac{t^2-4t+4}{(-4t^2+16t-15)^{\frac{3}{2}}}$

الحـــل

من الواضح أن:

$$-4t^2+16t-15 = -4(t^2-4t)-15$$

نتمم إلى مربع كامل (Perfect Square) **المقدار ما بين القوسين بإضـافة وطـرح مربـع نصـف معامل t، فنجد:**

$$-4(t^2-4t)-15 = -4[(t^2-4t+4)-4]-15$$

$$= -4[(t-2)^2-4]-15 = -4(t-2)^2+16-15 = 1-4(t-2)^2$$

لنجر التغيير: $dt = dx \Leftarrow t = x+2 \Leftarrow t-2 = x$

يكتب التكامل على الشكل:

$$\int \frac{x^2}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

(لاحظ أن: $t^2-4t+4 = (t-2)^2 = x^2$)

وبالاستفادة من المثال السابق، نجد:

$$\int \frac{t^2-4t+4}{(-4t^2+16t-15)^{\frac{3}{2}}}\,dt = \int \frac{x^2}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \sin^{-1} 2x\right) + c$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{2(t-2)}{\sqrt{-4t^2+16t-15}} - \sin^{-1}(2t-4)\right) + c$$

$$= \frac{t-2}{4\sqrt{-4t^2+16t-15}} - \frac{1}{8}\sin^{-1}(2t-4) + c$$

مثــال (١٠,٣٥)

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{(9+x^2)^2}\,dx$

الحــل

لنجر التغيير: $u=\tan^{-1}\frac{x}{3} \Leftrightarrow x=3\tan u$

$$\left(\frac{\pi}{2}>u>-\frac{\pi}{2}\right)$$

فنجد: $9+x^2=9(1+\tan^2 u)=9\sec^2 u$ ، $dx=3\sec^2 u\,du$

يكتب التكامل على الشكل:

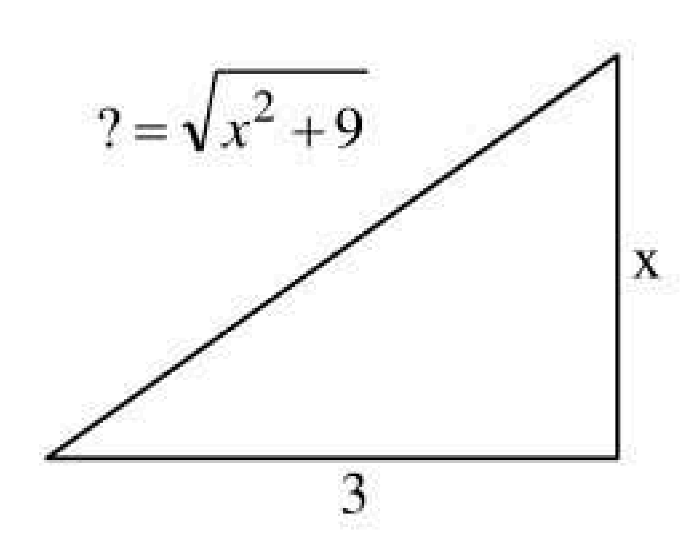
$$\int \frac{1}{(9+x^2)^2}\,dx=\frac{3}{81}\int \frac{\sec^2 u}{\sec^4 u}\,du=\frac{1}{27}\int \frac{1}{\sec^2 u}\,du=\frac{1}{27}\int \cos^2 u\,du$$

$$=\frac{1}{54}\int (1+\cos 2u)\,du=\frac{1}{54}\left(u+\frac{\sin 2u}{2}\right)+c=\frac{1}{54}(u+\sin u\cos u)+c$$

لاحظ أن:

$$\sin u=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,,\ \cos u=\frac{3}{\sqrt{x^2+9}} \Leftarrow \tan u=\frac{x}{3}$$

(اعتبرنا u زاوية حادة)



$\left(\tan u=\frac{x}{3}\right)$

ملحوظة:

لو وقعت u في الربع الرابع، لكانت $x\le 0$ ،

$\sin u\le 0$ ، $\cos u>0$ ، وحصلنا على نفس النتيجة.

مما سبق، نجد:

$$\int \frac{1}{(9+x^2)^2}\,dx=\frac{1}{54}\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}+\frac{3x}{x^2+9}\right)+c$$

مثــال (١٠,٣٦)

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{(4t^2+4t+37)^2}\,dt$

الحــل

من الواضح أن: $4t^2+4t+37=4(t^2+t)+37$

نتمم إلى مربع كامل المقدار ما بين القوسين بإضافة وطرح مربع نصف معامل t، فنجد:

$$4(t^2+t)+37=4\left(t^2+t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+37$$

$$=4\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+37=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-1+37=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+36$$

لنجر التغيير: $t+\frac{1}{2}=x \Leftarrow t=x-\frac{1}{2} \Leftarrow dt=dx$

يكتب التكامل على الشكل:

$$\int\frac{1}{(4t^2+4t+37)^2}dt=\int\frac{1}{(4x^2+36)^2}dx=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{(x^2+9)^2}$$

وبالاستفادة من المثال السابق، نجد:

$$\int\frac{1}{(4t^2+4t+37)^2}dt=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{54}\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}+\frac{3x}{x^2+9}\right)+c$$

(c ثابت جديد، لاحظ أن $x=t+\frac{1}{2}$)

مثــال (١٠,٣٧)

أوجد التكامل: $\int\frac{1}{(x^2-2)\sqrt{x^2-4}}dx$

الحــل

لنضع: $u=\sec^{-1}\frac{x}{2} \Leftrightarrow x=2\sec u$

$$\left(\frac{3\pi}{2}>u>\pi \quad \text{أو} \quad \frac{\pi}{2}>u>0\right)$$

فنجد: $\sqrt{x^2-4}=2\tan u$ ، $dx=2\sec u\tan u\,du$

يكتب التكامل على الشكل:

$$\int \frac{1}{(x^2-2)\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{2\sec u \tan u}{(4\sec^2 u-2)(2\tan u)}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{\sec u}{2\sec^2 u-1}\,du$$

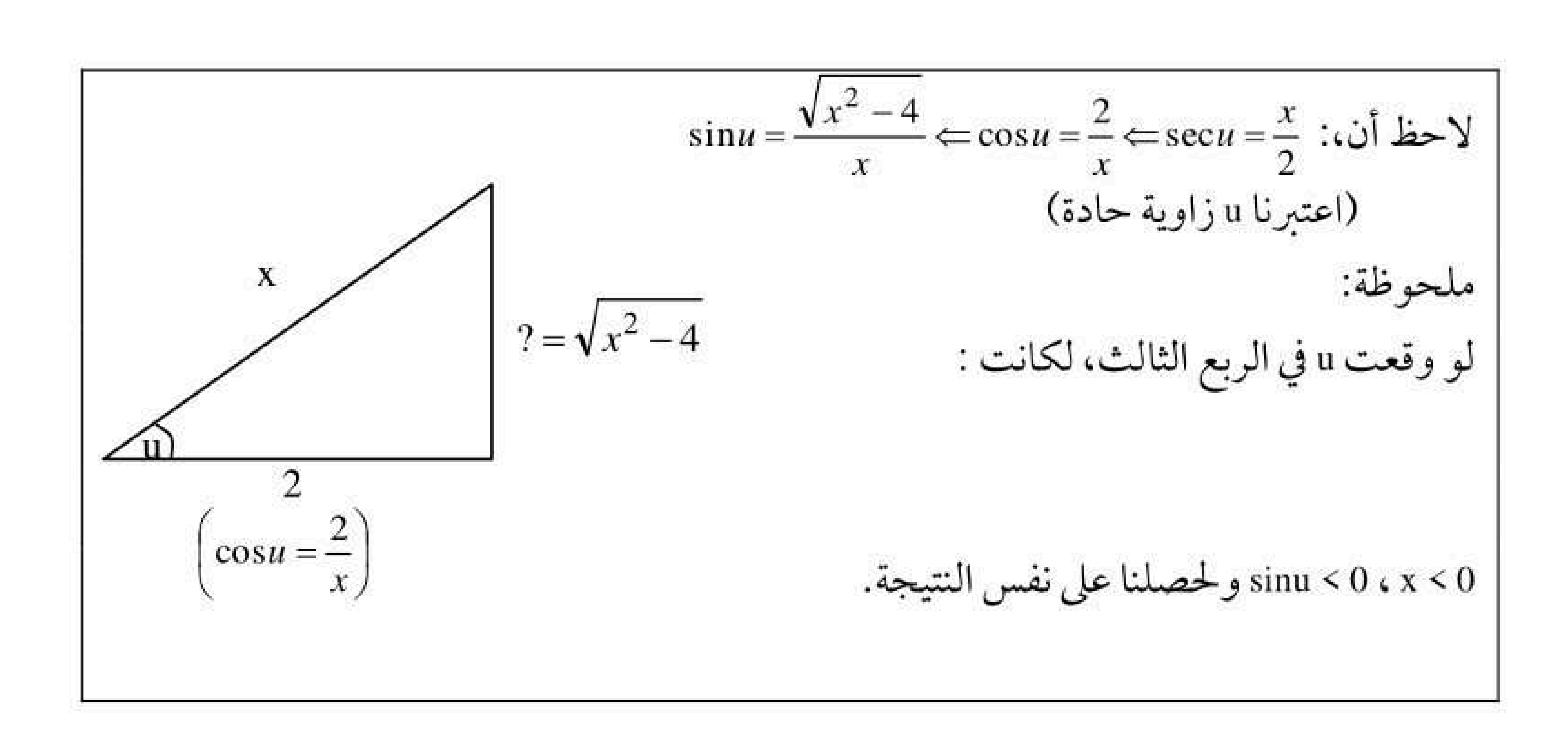
$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{\cos u}}{\frac{2}{\cos^2 u}-1}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{\cos u}{2-\cos^2 u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos u}{2-(1-\sin^2 u)}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{\cos u}{1+\sin^2 u}\,du$$

نضع $\sin u = t \Leftarrow dt = \cos u\,du$.

بالتالي فإن:

$$\int \frac{1}{(x^2-2)\sqrt{x^2-4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1} t + c = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\sin u) + c$$



لاحظ أن: $\sec u = \frac{x}{2} \Leftarrow \cos u = \frac{2}{x} \Leftarrow \sin u = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$

(اعتبرنا u زاوية حادة)

ملحوظة:

لو وقعت u في الربع الثالث، لكانت :

$x < 0$ ، $\sin u < 0$ وحصلنا على نفس النتيجة.

مما سبق، نجد:

$$\int \frac{1}{(x^2-2)\sqrt{x^2-4}}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + c$$

مثــال (١٠,٣٨)

أوجد التكامل: $\int \frac{dt}{(t^2+2t-1)\sqrt{t^2+2t-3}}$

الحــل

من الملاحظ أن: $t^2+2t-3 = t^2+2t+1-1-3$

أضــفنا وطرحنــا مربــع نصــف معامــل t، فأصــبح ثلاثــي الحــدود عــلى الشكل: $t^2+2t-3=(t+1)^2-4$

لنجر التغيير: $t+1=x \Leftarrow t=x-1 \Leftarrow dt=dx$

يكتب التكامل على الشكل:

$$\int \frac{dt}{(t^2+2t-1)\sqrt{t^2+2t-3}} = \int \frac{dx}{[(x-1)^2+2(x-1)-1]\sqrt{x^2-4}}$$
$$= \int \frac{dx}{(x^2-2)\sqrt{x^2-4}}$$

وبالاستفادة من المثال السابق، فإن:

$$\int \frac{dt}{(t^2+2t-1)\sqrt{t^2+2t-3}} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}+c$$
$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{t^2+2t-3}}{t+1}+c$$

تمــارين (١٠,٣)

أوجد العدد c الذي يحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة f في كل ما يلي، على الفترة المرافقة:

١) $f(x) = 3+|x-1|$ ، $[-2,2]$

٢) $f(x) = 3x^2-2x+3$ ، $[-1,3]$

٣) $f(x) = |x|+2$ ، $[-2,1]$

٤) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ ، $[-2,0]$

٥) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ ، $[0,\sqrt{5}]$

٦) $f(x)=\sqrt{1+x}$ ، $[0,3]$

أوجد y'، إذا كان:

٧) $y = x\int_{1}^{x^3}\sin(2t^2)dt + \int_{2x}^{\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{t}dt$

٨) $y = x^2\int_{1}^{x^2}\sin(2t^2)dt + \int_{0}^{\pi}\sin^2 t dt$

أوجد التكاملات:

٩) $\int_{0}^{2}(x^2 - 4x + 2)dx$

١٠) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$

١١) $\int_{2}^{6}\sqrt{x-2}\,dx$

١٢) $\int_{3}^{8}\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\,dx$

١٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx$

١٤) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة [a,b]، فبالتعريف نحدد معدل الدالة f على الفترة [a,b]، بالصيغة: $f_{av} = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)dx$.

أوجد المعدل لكل من دوال التكامل الموضحة في التمارين من ٩ حتى ١٢ على فترات التكامل المشار إليها في كل تمرين.

أوجد التكاملات التالية:

١٥) $\int\sqrt{3-2x-x^2}dx$

١٦) $\int\sqrt{2+x^2}\,dx$

١٧) $\int\frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx$

١٨) $\int\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

١٩) $\int\sqrt{x^2-4}\,dx$

٢٠) $\int\sqrt{x^2+x}\,dx$

٢١) $\int\sqrt{x^2-6x-7}\,dx$

٢٢) $\int(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}dx$

٢٣) $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$

٢٤) $\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}$

٢٥) $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

٢٦) $\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$

الإجابات

١٥) $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\sin^{-1}\frac{x+1}{2}$

١٦) $\frac{x}{2}\sqrt{2+x^2}\ \ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)$

١٧) $\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2}-\frac{9}{2}\ \ln\left(x+\sqrt{9+x^2}\right)$

١٨) $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ \ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)$

١٩) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln|x+\sqrt{x^2-4}|$

٢٠) $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x}-\frac{1}{8}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}|$

٢١) $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x-7}-8\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}|$

٢٢) $\frac{1}{64}(2x+1)(8x^2+8x+17)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{27}{128}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})$

٢٣) $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$

٢٤) $\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}$

٢٥) $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$

٢٦) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$

(١٠ , ١٠) تكامل الدوال الكسرية باستخدام الكسور الجزئية
Integration of Rational Functions by Partial Fractions

الهدف من دراستنا التالية هو تكامل الدوال الكسرية الحقيقية من الشكل:

$$h(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+...+b_m} \qquad (١٠ , ٢٩)$$

وذلك بتفريقها إلى كسور جزئية بسيطة يسهل تكاملها، ونظرية تفريق الكسور تجيب على هذا التساؤل.

لتفريق كسر من الشكل (٢٩ , ١٠)، كل من بسطه ومقامه كثيرة حدود في المتغير x، يجب مراعاة الأمور التالية:

١) **قوة البسط أقل من قوة المقام، وإلا قسمنا البسط على المقام واستنتجنا القسم الصحيح.**

٢) **اختصار العوامل المشتركة بين البسط والمقام.**

٣) **تحليل المقام إلى عوامل من الشكل:**

(أ) $(x-a)^m$ حيث m عدد طبيعي، $a \in IR$.

(ب) أو الشكل: $(bx^2+cx+d)^n$ ، حيث n عدد طبيعي: $b,c,d \in IR$

بشرط أن لا يكون المقدار: bx^2+cx+d قابلا للتحليل إلى عوامل من الدرجة الأولى. بلغة أخرى أن يكون مميز هذا المقدار سالبا $(c^2-4bd<0)$. يكون شكل التفريق للكسر: h(x) إن كان مقامه مساويا $(x-a)^m$ على الصورة:

$$h(x)=\frac{A_0}{(x-a)^m}+\frac{A_1}{(x-a)^{m-1}}+\cdots\cdots+\frac{A_{m-1}}{x-a}, m \in N$$

يكون شكل التفريق للكسر h(x)، إن كان المقام مساويا $(bx^2+cx+d)^n$ ، حيث: $c^2-4bd<0$ على الصورة:

$$h(x)=\frac{B_0x+C_0}{(bx^2+cx+d)^n}+\frac{B_1x+C_1}{(bx^2+cx+d)^{n-1}}+\cdots\cdots+\frac{B_{n-1}x+C_{n-1}}{(bx^2+cx+d)}$$

أما إذا كان المقام حاصل ضرب عوامل مختلطة من الصنفين $(x-a)^m$ و $(cx^2+bx+d)^n$ معا، كما في الكسر:

$$h(x)=\frac{x^4+x^2+x+1}{(x-3)(x^2+4)^2(x+1)^2(x^2+x+1)}$$

فيكون التفريق، على الصورة:

$$h(x)=\frac{A_0}{x-3}+\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{(x+1)}+\frac{A_3x+A_4}{x^2+x+1}+\frac{A_5x+A_6}{(x+4)^2}+\frac{A_7x+A_8}{x^2+1}$$

حيث: $\frac{A_0}{x-1}$ ، هو الجزء الموافق للعامل x - 3

$\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}$ ، هو الجزء الموافق للعامل $(x+1)^2$

$\frac{A_3x+A_4}{x^2+x+1}$ ، هو الجزء الموافق للعامل x^2+x+1

$\frac{A_7x+A_8}{x^2+4}+\frac{A_5x+A_6}{(x+4)^2}$ ، هو الجزء الموافق للعامل $(x^2+4)^2$

مثـال (١٠,٣٩)

بين الشكل الذي يجب أن نفرق عليه الكسور التالية:

١) $\frac{x+1}{x+x^2}$ ٢) $\frac{x^2+4}{x^3+x^2+x}$

٣) $\frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-4)(x^2+5)}$ ٤) $\frac{x^3+7x}{(x+1)^2(x^2+2)^2}$

٥) $\frac{3x^4}{(x^2+x+1)^3(x^2-1)}$ ٦) $\frac{2x^2+3x}{(x^2+5x+6)(x^2+3)}$

الحــــل

١) $$\frac{x+1}{x+x^2}=\frac{x+1}{x(1+x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{1+x}$$

٢) $$\frac{x^2+4}{x^3+x^2+x}=\frac{x^2+4}{x(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

٣) $$\frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-4)(x^2+5)}=\frac{x^3+x^2+2}{x(x-2)(x+2)(x^2+5)}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}+\frac{Dx+E}{x^2+5}$$

٤) $$\frac{x^3+7x}{(x+1)^2(x^2+2)^2}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+2}$$

٥) $$\frac{3x^4}{(x^2+x+1)^3(x^2-1)}=\frac{3x^4}{(x^2+x+1)^3(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{Ax+B}{(x^2+x+1)^3}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+x+1}+\frac{G}{x-1}+\frac{H}{x+1}$$

٦) $$\frac{2x^2+3x}{(x^2+5x+6)(x^2+3)}=\frac{2x^2+3x}{(x+2)(x+3)(x^2+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+3}$$

لاحظ أن قوة البسط أقل من قوة المقام في جميع الفقرات، وأنه لا يوجد عوامل مشـتركة بـين البسـط والمقام.

مثـــال (١٠ , ٤٠)

أوجد التكامل: $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

الحـــــل

يكتب الكسر على الشكل:

$$h(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

وتتحدد الثوابت وبشكل وحيد، بالطريقة التالية:

بتوحيد المقامات وحذفها، نجد:

$$x^2+1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

لنعوض، عن:

x،بالقيمة1(جذر العامل الأول)،فنجـــد: $2 = A(-1)(-2) \Rightarrow A = 1$

x،بالقيمة 2(جذر العامل الثاني)، فنجد: $5 = B(1)(-1) \Rightarrow B = -5$

x،بالقيمة 3(جذر العامل الثالث)،فنجـد: $10 = C(2)(1) \Rightarrow C = 5$

(يمكن استخدام هذه الطريقة إذا كانت العوامل من الدرجة الأولى وجذورها بسيطة)، بالتالي:

$$h(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-1}+\frac{-5}{x-2}+\frac{5}{x-3}$$

إذن: $\int h(x)\,dx = \text{Ln}\,|x-1|-5|x-2|+5\text{Ln}|x-3|+C$

(تسمى الطريقة التي حددنا بها الثوابت: طريقة تحديد الثوابت بإعطاء قيم مناسبة للمتغير x)

مثـــال (١٠ , ٤١)

(الطريقة العامة لتحديد الثوابت) (طريقة المطابقة)

فرق الكسر التالي إلى كسوره البسيطة:

$h(x)=\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$ ، ثم أوجد: $\int h(x)dx$

الحـــل

شكل التفريق:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

بتوحيد المقامات ثم حذفها، نجد:

$$x^2+1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)\Rightarrow$$
$$x^2+1=x^2(A+B)+x(A+B+C)+A+C$$

بإجراء المطابقة بين طرفي المساواة، نجد:

$1=A+B$ (معامل x^2)

$0=A+B+C$ (معامل x)

$1=A+C$ (الحد الثابت)

(ساوينا بين معاملات قوى x المشابهة).

حصلنا على ثلاث معادلات خطية بثلاثة مجاهيل. بحلها، نجد:

$C=-1$ (طرحنا المعادلة الأولى من الثانية)

$A=2$ (عوضنا عن C بقيمتها في المعادلة الثالثة)

$B=-1$ (عوضنا عن A بقيمتها في المعادلة الأولى)

فشكل التفريق، هو: $h(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}$

من الملاحظ أن:

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=t^2+\frac{3}{4}$$

(أتممنا إلى مربع كامل، ووضعنا $x+\frac{1}{2}=t \Leftarrow x=t-\frac{1}{2}$)

إذن:

$$\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2t}{\sqrt{3}}+c$$

ومنه:

$$\int h(x)dx=2\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$$

(c ثابت جديد)

مثـــال (١٠ , ٤٢)

أوجد التكامل: $\int \frac{x^3+x}{(x-2)^3(x+1)}dx$

الحـــل

يكتب الكسر على الشكل:

$$h(x)=\frac{x^3+x}{(x-2)^3(x+1)}=\frac{A}{(x-2)^3}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+1}$$

بتوحيد المقامات، نجد:

$$x^3+x = A(x+1) + B(x-2)(x+1) + C(x-2)^2(x+1) + D(x-2)^3 \qquad (١٠ , ٣٠)$$

$=A(x+1) + B(x^2-x-2) + C(x^2-4x+4)(x+1) + D(x^3-6x^2+12x-8)$ وبمطابقة الطرفين (بالمساواة بين الحدود الثابتة في الطرفين ثم بين معاملات x ، x^2، ... وهكذا...)، نجد:

الحد الثابت: $0 = A-2B+4C-8D$

معامل x: $1 = A-B-4C+4C+12D$

معامل x^2: $0 = B+C-4C-6D$ (١٠ , ٣١)

معامل x^3: $1 = C + D$

لنعوض في المعادلة (١٠ , ٣٠) عن:

x، بالقيمة 1− (جذر العامل x+1)، فنجد: $D=\frac{2}{27}$

x، بالقيمة 2 (جذر العامل x-2)، فنجد: $A=\frac{10}{3}$

وبالتعويض عنD بقيمتها في المعادلة الأخيرة من المجموعة (١٠ , ٣١)، نجد: $C=\frac{25}{27}$

أخيرا، نستنتج من المعادلة الثالثة من نفس المجموعة:

$$B=6D+3C=\frac{12}{27}+\frac{75}{27}=\frac{29}{9}$$

هنا مزجنا بين طريقة المطابقة لتحديد الثوابت وبين إعطاء قيم مناسبة للمتغير x وهذه أسرع الطرائق لإيجاد الثوابت، بالتالي:

$$\int h(x)dx=\frac{10}{3}\int\frac{dx}{(x-2)^3}+\frac{29}{9}\int\frac{dx}{(x-2)^2}+\frac{25}{27}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{2}{27}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=\frac{10}{3}\frac{(x-2)^{-2}}{-2}+\frac{29}{9}\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+\frac{25}{27}Ln|x-2|+\frac{2}{27}Ln|x+1|+C$$
$$=-\frac{5}{3}\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{29}{9}\frac{1}{(x-2)}+\frac{25}{27}Ln|x-2|+\frac{2}{27}Ln|x+1|+C$$

مثـــال (٣٤ , ١٠)

أوجد التكامل:

$$\int\frac{x^4+1}{(x+1)(x^2+x+1)}dx$$

الحـــل

من الملاحظ أن **درجة البسط أكبر من درجة المقام**، لذا نقسم البسط على المقام فنجد:

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2+2x+1 & x^4+1 \\ & x-2 \\ & \mp x^4 \mp 2x^3 \mp 2x^2 \mp x \\ & -2x^3-2x^2-x+1 \\ & \pm 2x^3 \pm 4x^2 \pm 4x \pm 2 \\ \hline & 2x^2+3x+3 \end{array}$$

(الباقي) $2x^2 + 3x + 3$

بالتالي:

$$h(x)=\frac{x^4+1}{(x+1)(x^2+x+1)}=x-2+\frac{2x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

نكتب الجزء الكسري على الشكل:

$$\frac{2x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1} \qquad (١٠,٣٢)$$

لاحـظ أن $\frac{A}{x+1}$ هـو الجـزء الموافـق للمقـدار $x+1$ (عامـل مـن الدرجـة الأولى في المقـام)، وأن $\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ هو الجزء الموافق للمقدار x^2+x+1 (عامل من الدرجة الثانية في المقام).

لاحظ أن المقدار x^2+x+1 لا يمكن تحليله إلى عوامل من الدرجة الأولى.

بتوحيد المقامات في (٣٢ , ١٠) وحذفها، نجد:

$$2x^2 + 3x + 3 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

لتحديد الثوابت، نطابق طرفي المساواة السابقة:

الحد الثابت: $3 = A + C$

معامل x: $3 = A + B + C$

معامل x^2: $2 = A + B$

بطرح المعادلتين الأخيرتين طرفا من طرف، نجد: $C = 1$

وبالتعويض في الأولى، فإن: $A = 2$. بالتعويض في الثانية، نجد: $B = 0$

نسمي الطريقة السابقة في تحديد الثوابت (A,B,C) بطريقة المطابقة.

لنكامل الآن، فنجد:

$$\int h(x)dx = \int (x-2)dx + 2\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2Ln\,|x+1| + \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

التكامل في الطرف الثاني يساوي:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

(أتممنا إلى مربع كامل)

نجري التعويض: $x + \frac{1}{2} = t \Leftarrow x = t - \frac{1}{2} \Leftarrow dx = dt$

ومنه: $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1} \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

إذن: $\int h(x)dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 2Ln\,|x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

(١١ , ١٠) التكاملات من الشكل: $\int f(\sin x, \cos x, \tan x)\, dx$

(التكامل باستخدام ظل نصف الزاوية)

من المستحسن في كثير من الأحيان إجراء التحويل:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \Leftarrow \frac{x}{2} = \tan^{-1} t \Leftarrow \tan\frac{x}{2} = t$$

مع ملاحظة أن:

١) $$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

٢) $$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

٣) $$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

مثـــال (١٠ , ٤٤)

أوجد التكاملات ا لتالية:

١) $$\int \frac{\sec x}{2\tan x + \sec x - 1}dx$$

٢) $$\int \frac{\sin x \cos x}{(2+\cos x)^2}dx$$

٣) $$\int \frac{dx}{\cos x(1+\sin x)}$$

٤) $$\int \frac{dx}{3+2\cos x}$$

الحـــل

١)

$$\int \frac{\sec x}{2\tan x + \sec x - 1}dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} - 1}dx = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 1}$$

نجري التغيير: $\tan\frac{x}{2}=t \Leftarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ ، $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ ،

$\Leftarrow \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\Leftarrow \int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{4t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)}=\int\frac{2dt}{(4t-1+t^2+1+t^2)}=\int\frac{dt}{t^2+2t}$$

$$\int\frac{dt}{t^2+2t}=\int\frac{dt}{t(t+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2})dt=\frac{1}{2}(Ln|t|-Ln|t+2|)+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{t+2}\right|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+2}\right|+c$$

٢) نضع: $2+\cos x=t \Leftarrow dt=-\sin x dx$ ، $\cos x = t-2$

يصبح التكامل على الشكل:

$$-\int\frac{t-2}{t^2}dt=-\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt$$

$$=-\ln|t|-\frac{2}{t}+c=-\ln(2+\cos x)-\frac{2}{2+\cos x}+c$$

٣) نضع: $\sin x=t \Leftarrow dt=\cos x dx \Leftarrow dx=\frac{dt}{\cos x}$

يصبح التكامل على الشكل:

$$\int\frac{dt}{\cos^2 x(1+t)}=\int\frac{dt}{(1-t^2)(1+t)}=\int\frac{dt}{(1+t)^2(1-t)}$$

شكل التفريق، هو: $\frac{1}{(1-t)(1+t)^2}=\frac{A}{(1+t)^2}+\frac{B}{1+t}+\frac{C}{1-t} \Leftarrow$

$$1=A(1-t)+B(1+t)(1-t)+C(1+t)^2$$

بالتعويض عن t بالقيمة 1-، نجد: $A=\frac{1}{2}$ ، ثم بالقيمة: t=1، نجد:

$$C=\frac{1}{4}$$

ثم بالقيمة t=0، نجد: $A+B+C=1 \Leftarrow B=\frac{1}{4}$ ، ومنه:

$$\int\frac{dt}{(1+t)^2(1-t)}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1+t)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1-t}$$

$$=-\frac{1}{2(1+t)}+\frac{1}{4}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\ln|1-t|+c$$

$$= -\frac{1}{2(1+\sin x)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c$$

٤) نضع: $\tan\frac{x}{2} = t \Leftarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ، $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

يصبح التكامل على الشكل:

$$\int \frac{dx}{3+2\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{5}} + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}\right) + c$$

(لاحظ أن: $\int \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{t}{a} + c$)

تمارين (٤, ١٠)

١) $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$

٢) $\int \frac{dx}{(x-4)(x-5)(x+1)}$

٣) $\int \frac{dx}{(1-x)(x^2+4)}$

٤) $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x+1)(x-1)^4}$

٥) $\int \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}$

٦) $\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}dx$

٧) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)^5(x^2+4)}dx$

٨) $\int \frac{(x^4+1)}{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2}dx$

٩) $\int \frac{x^2+x+2}{(x^2-2x+3)^2}dx$

١٠) $\int \frac{x^4+x^2+1}{(x-1)^5}dx$

١١) $\int \frac{dx}{x(1+x^2)^3}$

١٢) $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}dx$

١٣) $\int \frac{x^2+2}{x^4+1}dx$

١٤) $\int \frac{x^2+1}{x^3+1}dx$

١٥) $\int \frac{x^2+2x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx$

١٦) $\int \frac{x^4+x+1}{x^3-6x^2+12x-8}dx$

١٧) $\int \frac{2x^2+4}{x^3+2x^2-3}dx$

١٨) $\int \frac{x^5+1}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$

١٩) $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)(x-1)}dx$

٢٠) $\int \frac{1}{x^4+x^2+1}dx$

٢١) $\int \frac{x^3+2x}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}dx$

٢٢) $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)(x^2-4)}dx$

٢٣) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}dx$

٢٤) $\int \frac{dx}{x^4+1}dx$

٢٥) $\int \frac{x^5dx}{(1+x^2)^4}$

٢٦) $\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}dx$

إرشاد: أجر التغيير $x^3 = t$

٢٧) $\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}dx$

٢٨) $\int \frac{x^2+x-2}{(x-2)^3(x-1)}dx$

٢٩) $\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$

٣٠) $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$

إرشاد: ضع $x^3 = t$

٣١) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+1)(x^2+2x+5)}$

٣٢) $\int \frac{dx}{(x-1)^3(x-2)^3}$

٣٣) $\int \frac{(x^4+1)dx}{(x^2+1)(x-2)(x-3)}$

٣٤) $\int \frac{x^2dx}{(x-2)^8}$

٣٥) $\int \frac{dx}{x^6+x^8}$

٣٦) $\int \frac{dx}{x(x^6+1)^2}$

ضع: $x^3 = t$

٣٧) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2(x-1)}$

٣٨) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$

٣٩) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

٤٠) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

٤١) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$

٤٢) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

٤٣) $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$

٤٤) $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$

٤٥) $\int \frac{\cos^2 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$

٤٦) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}dx$

٤٧) $\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}dx$

٤٨) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

قسم البسط والمقام على $\cos^2 x$

ثم ضع $\tan x = t$

٤٩) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x}$

استفد من المثال السابق

٥٠) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x\cos x}$ ٥١) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\,dx$.

٥٢) $\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx$ ٥٣) $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$

٥٤) $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\,dx$

(١٠ , ١٢) التكاملات من الشكل:

$$\int f\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}\ ,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}\ ,\ \cdots\cdots\right]dx$$

$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots\ldots$ أعداد كسرية (قياسية) وضعت بأبسط صورة لها. لإجراء التكامل، نجري التغيير: $\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$ ، حيث n المضاعف المشترك الأصغر للأعداد: $n_1, n_2, \ldots$

مثـــال (١٠ , ٤٥)

أوجد التكاملات:

١) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$ ٢) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+(x-1)}$

الحـــل

١) يكتب التكامل على الشكل:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}\,dx$$

المضاعف المشترك للعددين: 2 و 3 هو 6 . لنفرض أن:

$(t \geq 0)\quad x = t^6 \Leftarrow dx = 6t^5\,dt$. يصبح التكامل على الشكل:

$$\int \frac{t^3}{t^2+1}6t^5\,dt = 6\int \frac{t^8}{t^2+1}\,dt$$

باستخدام القسمة المطولة، نجد:

$$\frac{t^8}{t^2+1}=t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2}$$

والتكامل يساوي:

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx=6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\tan^{-1}t\right)+C$$

$$=6\left(\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7}-\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}-x^{\frac{1}{6}}+\tan^{-1}x^{\frac{1}{6}}\right)+C$$

٢) يكتب التكامل على الشكل:

$$\int\frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{2}}+(x-1)}$$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين: 1 و 2 هو 2. لنفرض أن: $x-1=t^2\ (t>0)$ ، فنجد: $dx=2t\,dt$، ومنه:

$$\int\frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{2}}+(x-1)}=\int\frac{2tdt}{t+t^2}=\int\frac{2dt}{1+t}=2\ln|1+t|+C$$

$$=2\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)+C$$

مثـــال (١٠,٤٦)

أوجد التكاملين:

١) $\int\frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

٢) $\int\frac{\cos x}{(\sin x)^{\frac{1}{2}}+(\sin x)^{\frac{1}{3}}}dx$

الحـــل

١) $\frac{m_1}{n_1}=\frac{1}{2}$. نجري التغيير: $z>0$, $dz=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Leftarrow z=x^{\frac{1}{2}} \Leftarrow x=z^2$

التكامل يكتب على الشكل:

$$\int\frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dz=2\int\frac{z}{z^2+z}dz=2\int\frac{dz}{1+z}=2\ln|1+z|+c$$

$$=2\ln(1+\sqrt{x})+c$$

٢) نضع: $du=\cos x dx \Leftarrow \sin x=u$. يصبح التكامل على الصورة:

$$\int\frac{du}{u^{\frac{1}{2}}+u^{\frac{1}{3}}}$$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين: 2,3 هو 6. نفرض:

$z > 0 \quad , \quad u = z^6 \Leftarrow du = 6z^5 dz$. بالتالي، فإن:

$$\int \frac{6z^5}{z^3 + z^2} dz = 6\int \frac{z^3}{z+1} dz = 6\int (z^2 - z + 1) dz - 6\int \frac{dz}{1+z}$$

(أجرينا القسمة المطولة، لأن قوة البسط أكبر من قوة المقام).

$$= 6\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z\right) - 6\ln(1+z) + c$$

$$= 6\left(\frac{\sin^{\frac{1}{2}} x}{3} - \frac{\sin^{\frac{1}{3}} x}{2} + \sin^{\frac{1}{6}} x\right) - 6\ln\left(1 + \sin^{\frac{1}{6}} x\right) + c$$

(١٣ , ١٠) التكاملات من الشكل: $\int f(e^{ax}) dx$

تكامل بوجه عام بإجراء التغيير: $t = e^{ax}$

مثــال (٤٧ , ١٠)

أوجد التكاملين:

١) $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$ ٢) $\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$

الحــل

١) نفرض أن: $e^x = t \Leftarrow dt = e^x dx$. يكتب التكامل على الشكل:

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{1}{e^x(1+e^x)} dt = \int \frac{1}{t(1+t)} dt$$

لكن: $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$

إذن: $\int \frac{dx}{1+e^x} = \ln|t| - \ln|1+t| + C$

$$= \ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + C = \ln\frac{e^x}{1+e^x} + C$$

٢) نضع: $e^x = t \Leftarrow dt = e^x\,dx$. نكتب التكامل على الشكل:

$$\int \frac{dt}{t + \frac{1}{t}} = \int \frac{t\,dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C \; = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C$$

طريقة أخرى:

من الواضح أن: $\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$

(البسط مشتقة المقام)

تمارين (٥ , ١٠)

١) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$

٢) $\int \frac{\sqrt{x}}{(2-x)\sqrt{1+x}}dx$

٣) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$

٤) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$

٥) $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx$

٦) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

٧) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+2}}$

٨) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

٩) $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}$

١٠) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

١١) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

١٢) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$

١٣) $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}dx$

١٤) $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{1+x^{\frac{3}{4}}}}dx$

١٥) $\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$

١٦) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

١٧) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

١٨) $\int \frac{(e^x+3)}{(e^{2x}+e^x+1)}dx$

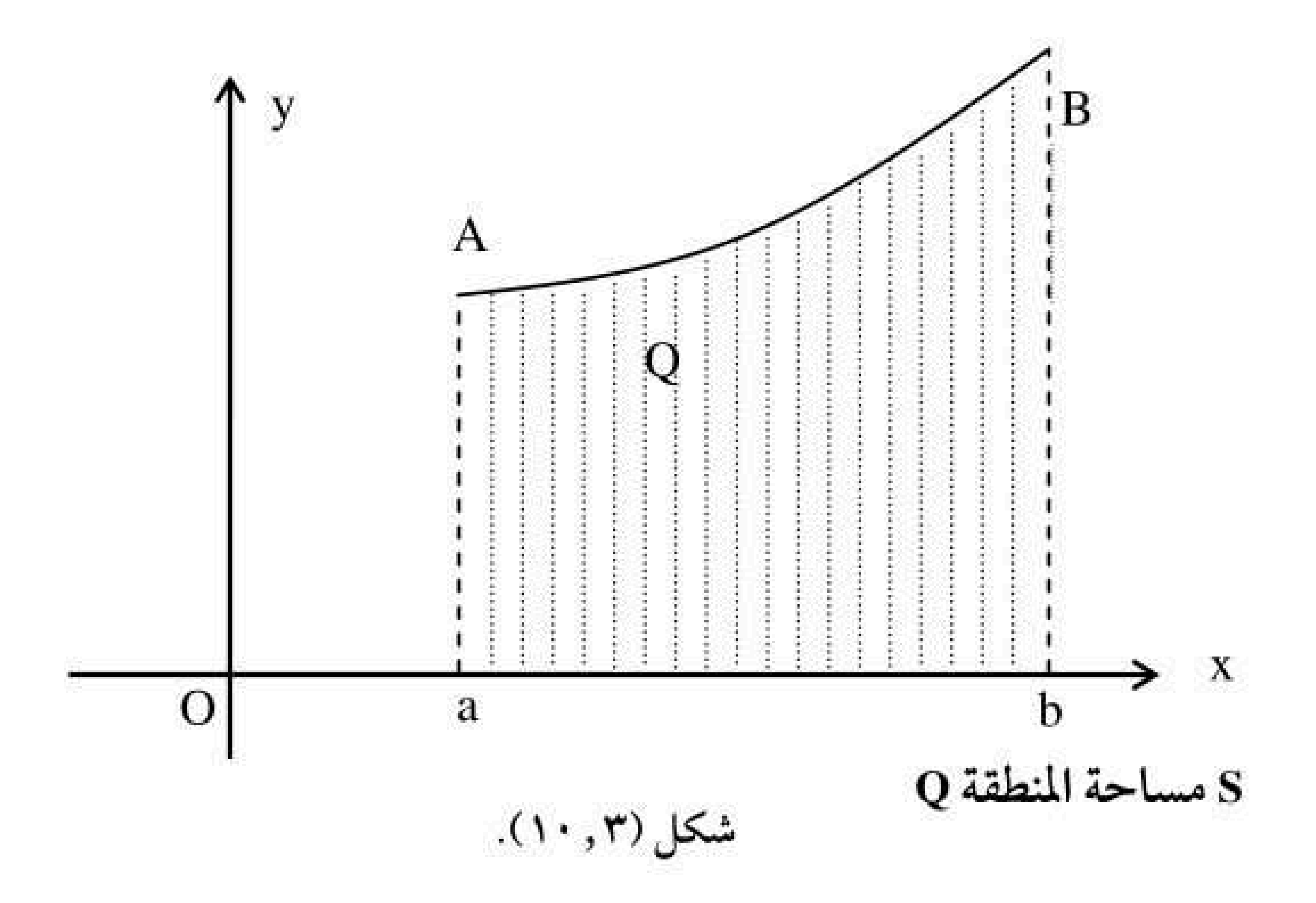
١٩) $\int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+3}dx$

٢٠) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-5e^x+6}dx$

أجر التغيير: $e^x = t$

٢١) $\int \frac{e^{4x}}{e^{8x}+e^{-4x}}dx$

(١٤ , ١٠) حساب المساحات باستخدام الإحداثيات الديكارتية



شكل (٣ , ١٠).

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة [a,b]، وكانت $f(x)\geq 0$، فإن S: مساحة المنطقة Q الواقعة بين المستقيمين x=a، x=b وفوق المحور x وتحت المنحني: y=f(x) شكل (٣ , ١٠)، تساوي:

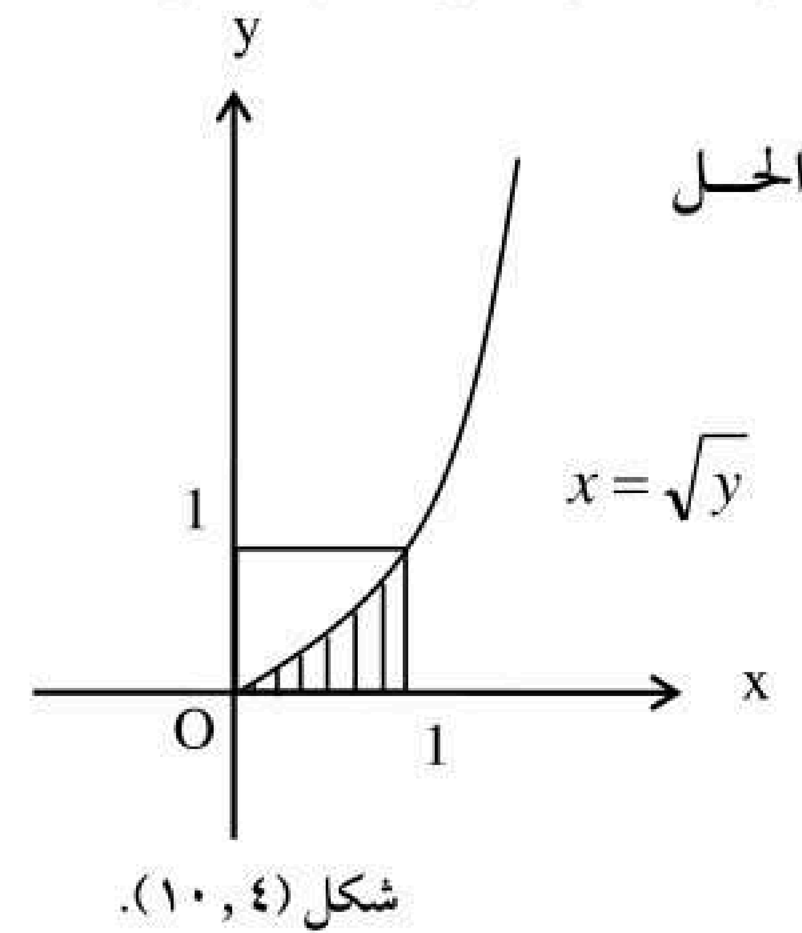
$$S=\int_a^b f(x)dx$$

مثـال (٤٨ , ١٠)

أوجد المساحة الواقعة تحت المنحني: $x=\sqrt{y}$ وفوق محور السينات وبين المستقيمين: x=1، x=0.

الحـل

$$S=\int_0^1 x^2 dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

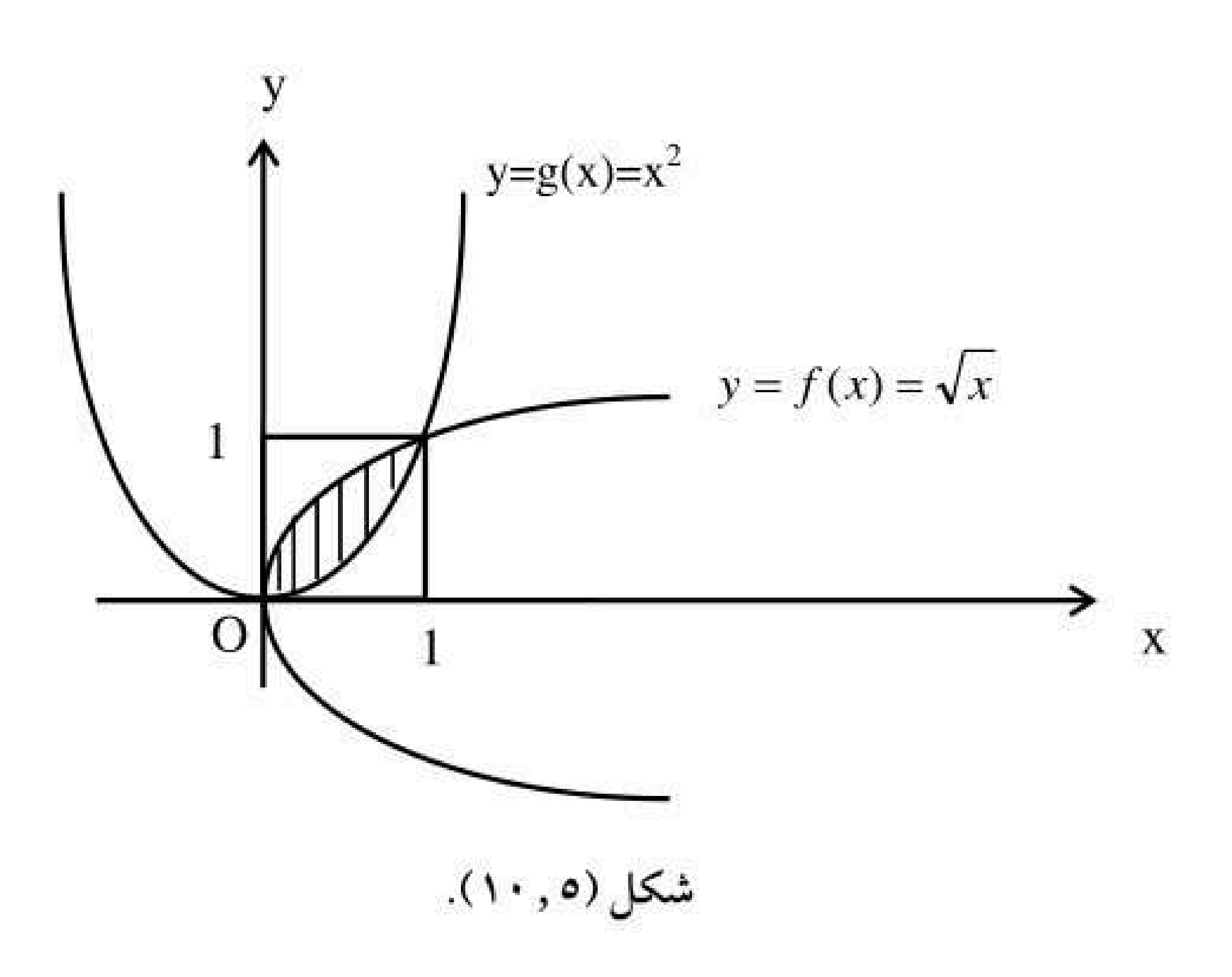


شكل (٤ , ١٠).

مثـــال (١٠,٤٩)

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين:

$$x=y^2 \text{ ، } y = x^2$$



شكل (١٠,٥).

الحـــل

لإيجاد إحداثيات نقط التقاطع، نعوض عن y من إحدى المعادلتين في المعادلة الأخرى، فنجد:

$x = x^4 \Leftarrow x(1-x^3) = 0 \Leftarrow x = 0$ أو $x = 1$

نقطتا التقاطع هما: $(0,0)$ ، $(1,1)$

المساحة الواقعة تحت المنحني: $y=\sqrt{x}$ (الجزء الأعلى من القطع المكافئ: $x=y^2$) وبين المستقيمين $x=1$، $x=0$ وفوق المحور x (بعبارة مختصرة فوق القطعة $[0,1]$ وتحت المنحني $y=\sqrt{x}$)، هي:

$$S_1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}[x^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{2}{3}$$

والمساحة الواقعة تحت المنحني: $y=g(x)=x^2$ وفوق القطعة $[0,1]$، تساوي:

$$S_2 = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$$

أما المساحة المحصورة بين المنحنيين، فتساوي:

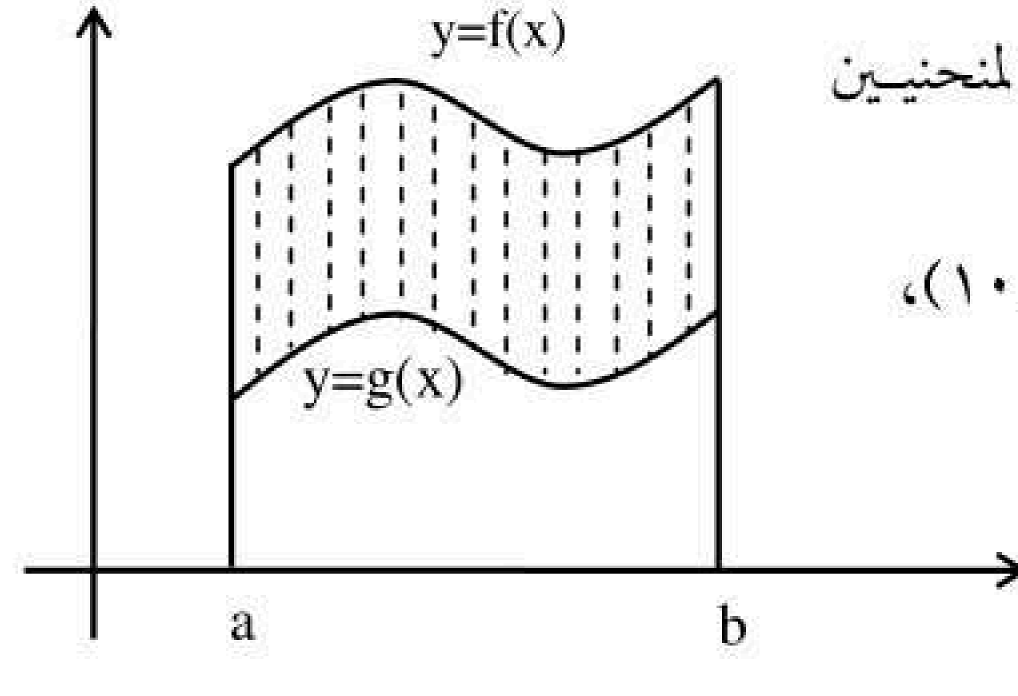
$S = S_1 - S_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ، شكل (١٠,٥).

ملحوظة (٩ , ١٠)

بشكل عام إذا كانت f، g دالتين متصلتين على الفترة [a,b]، وكان:

$$f(x) \ge g(x)$$

فإن مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيـين y=f(x)،y=g(x) والمستقيمين x=a, x=b، شكل (٦ , ١٠)، تساوي: $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$



شكل (٦ , ١٠).

مثــال (٥٠ , ١٠)

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين:

(Find the area of the region Enclosed by the two curves)

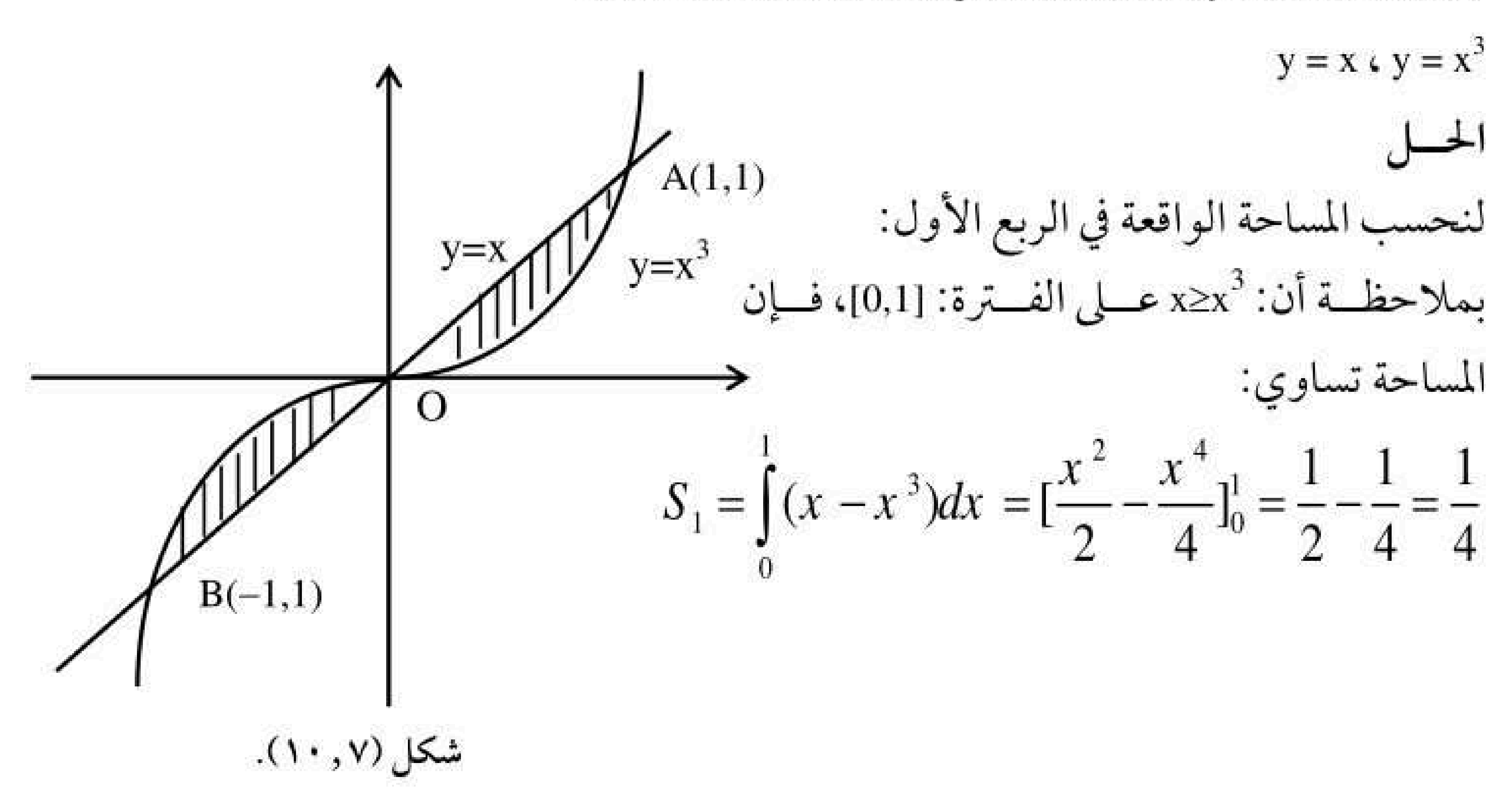
$y = x$ ، $y = x^3$

الحــل

لنحسب المساحة الواقعة في الربع الأول:

بملاحظــة أن: $x \ge x^3$ عــلى الفــترة: [0,1]، فــإن المساحة تساوي:

$$S_1 = \int_0^1 (x - x^3)dx = [\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$



شكل (٧ , ١٠).

لنحسب المساحة الواقعة في الربع الثالث:

بملاحظة أن: $x^3 \geq x$، على الفترة: [-1,0]، فإن المساحة تساوي:

$$S_2 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = -(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

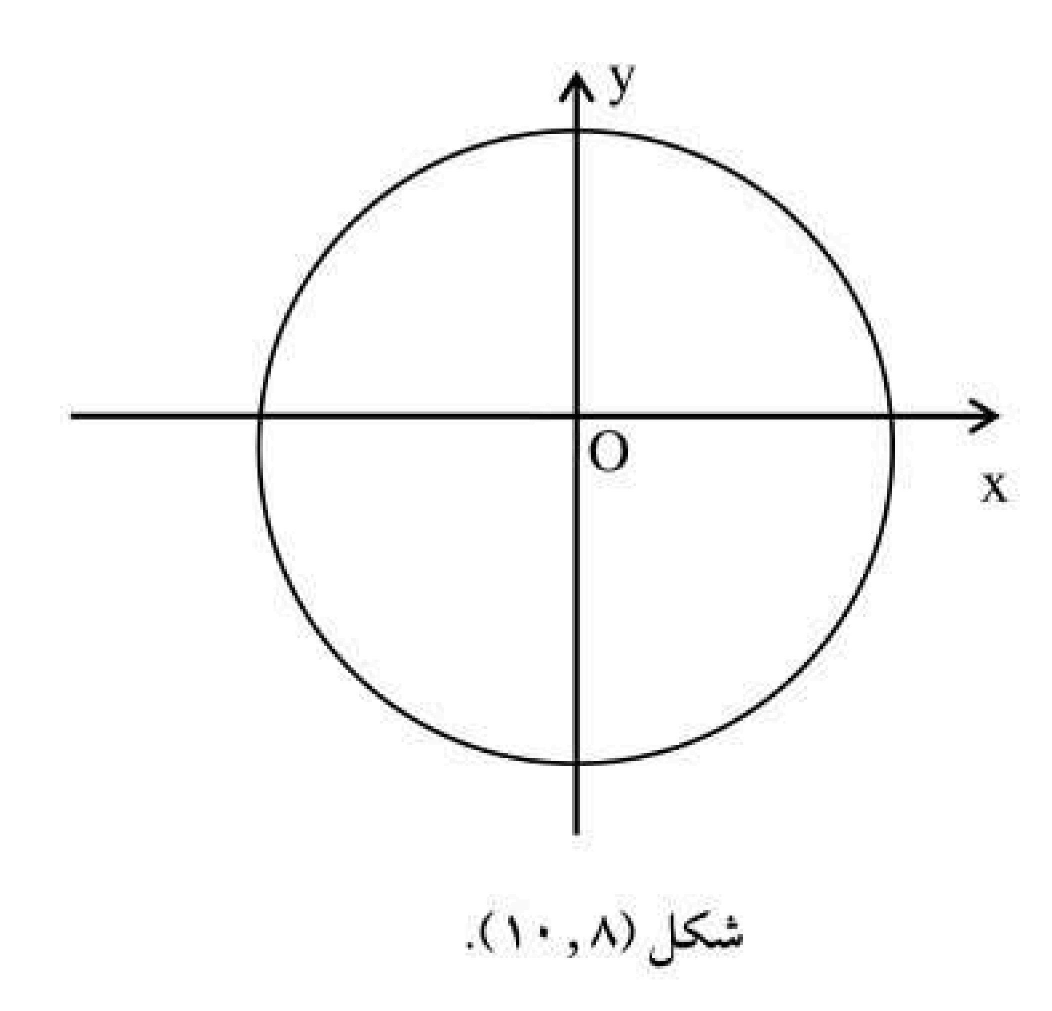
فالمساحة الكلية تساوي:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ (وحدة مساحة)

كان بالإمكان مضاعفة المساحة الواقعة في الربع الأول للحصول على المساحة الكلية، لأن المنطقة الواقعة في الربع الأول نظيرة المنطقة الواقعة في الربع الثالث حيث O هو مركز التناظر.

مثـال (٥١ , ١٠)

احسب مساحة الدائرة: $x^2 + y^2 = a^2$



شكل (٨ , ١٠).

الحـل

مساحة القرص تساوي: $S = 4\int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

(أربعة أمثال مساحة ربع الدائرة)

لنضع: x = a sint ، فنجد:

$$S=4\int_0^a \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\ \ (a\cos t\ dt)=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\ dt$$

(لاحظ أن: $x=0 \Leftarrow \sin t=0 \Leftarrow t=0$

وأن: $x=a \Leftarrow \sin t=1 \Leftarrow t=\frac{\pi}{2}$)

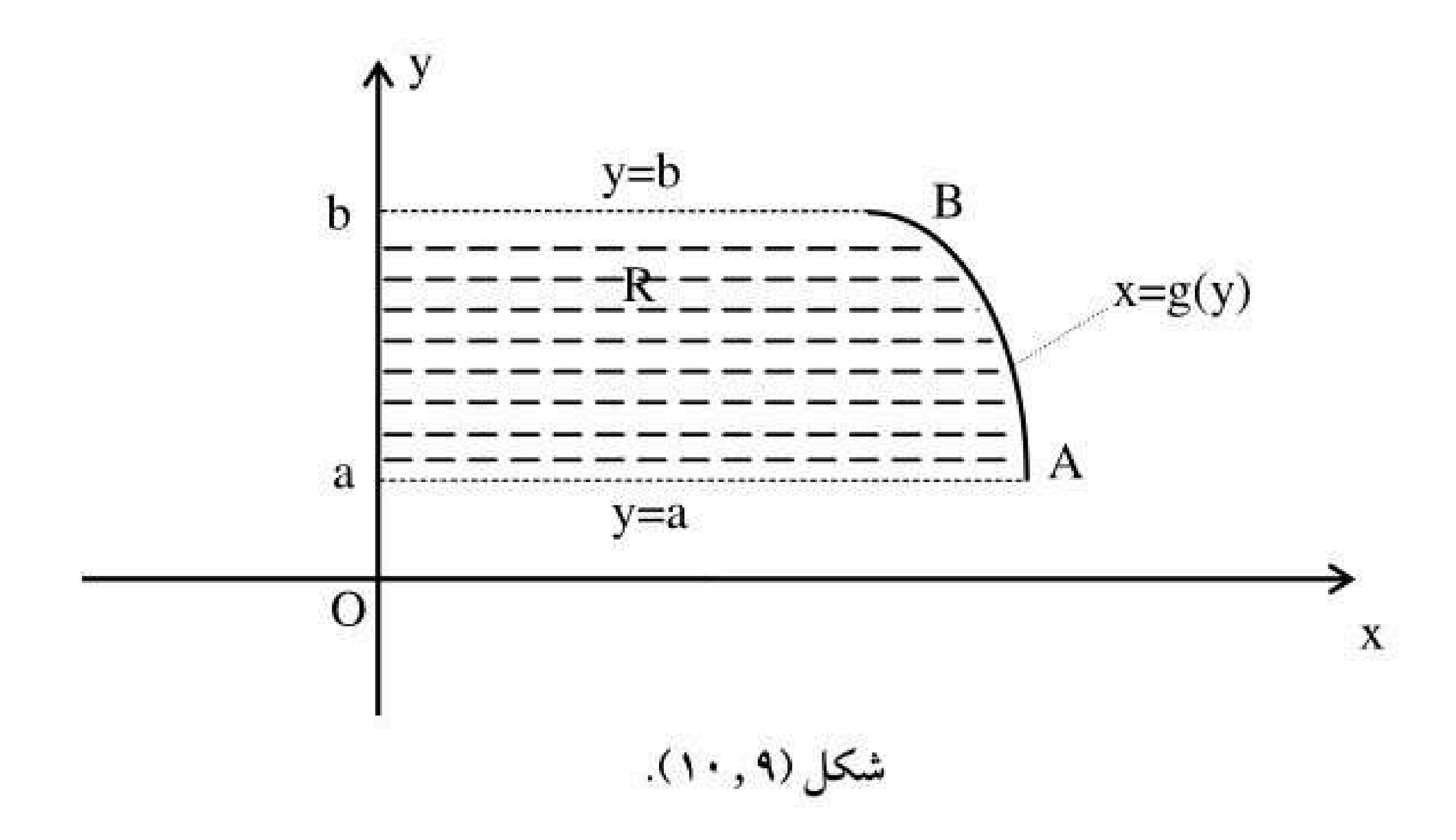
$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=2a^2\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2a^2(\frac{\pi}{2})=a^2\pi$$

ملحوظة (١٠,١٠)

إذا كانت g دالة متصلة على الفترة [a,b] وتحقق الشرط: g(y)≥0، فإن مساحة المنطقة R المحصورة بين المستقيمين: y=a،y=b والمحور y والمنحني: x=g(y)، شكل (٩ , ١٠) يعبر عنها بالصيغة:

$$S=\int_a^b g(y)dy=\int_a^b xdy$$



شكل (٩ , ١٠).

مثـــال (٥٢ , ١٠)

أوجد المساحة المحصورة بين القطع المكافئ: $x^2 = y$ والمستقيمين: y=1, y=4 والمحور y والواقعة في الربع الأول.

الحــل

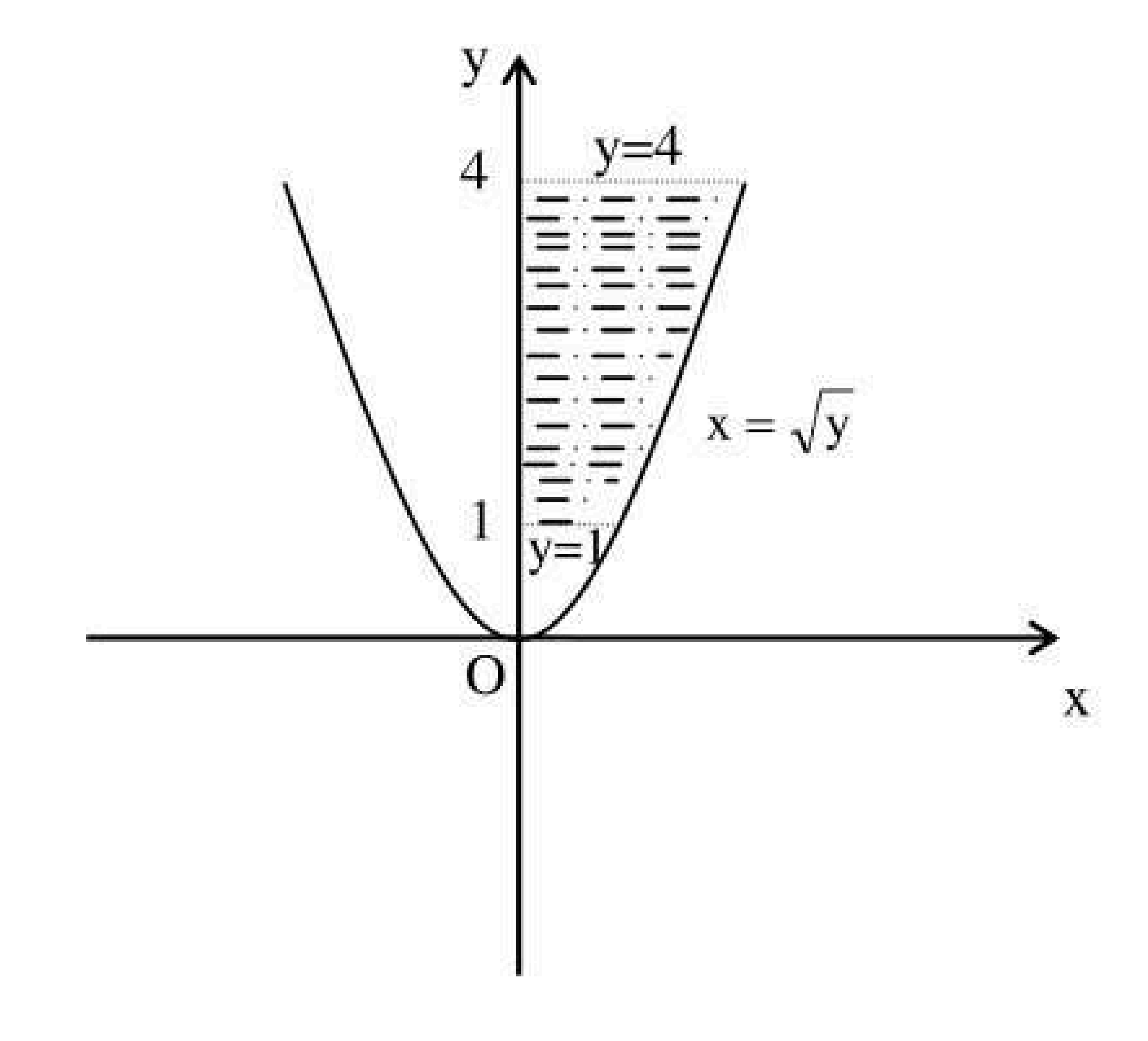
المساحة تساوي:

$$S = \int_1^4 x dy = \int_1^4 \sqrt{y} dy$$

$$= \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}((4)^{\frac{3}{2}} - 1)$$

$$= \frac{2}{3}((2^2)^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{2}{3}(8-1)$$

$$= \frac{14}{3}$$



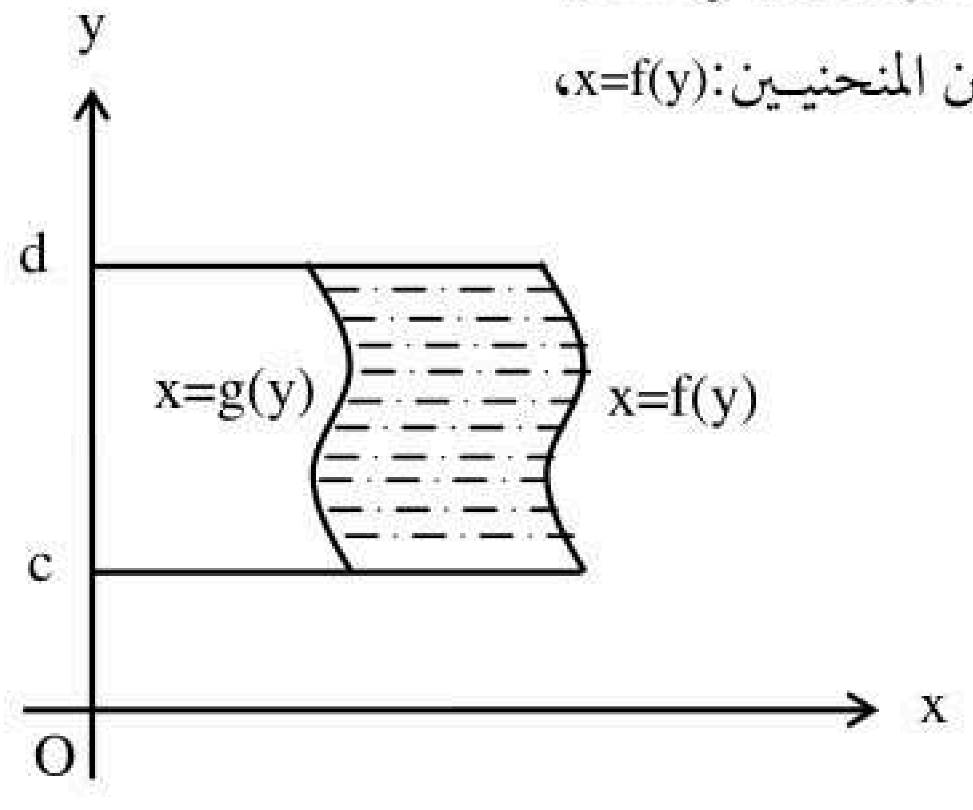
شكل (١٠,١٠).

ملحوظة (١٠,١١)

إذا كانــت f و g دالتــين متصــلتين عــلى الفــترة [c,d]، وكــان: $f(y) \geq g(y)$ ، فإن مساحة المنطقة المحصورة بـين المنحنيـين: x=f(y)، x=g(y)

والمستقيمين y=c ، y=d ،شكل (١٠,١١)،

تساوي: $S = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$



شكل (١٠,١١).

مثــال (١٠,٥٣)

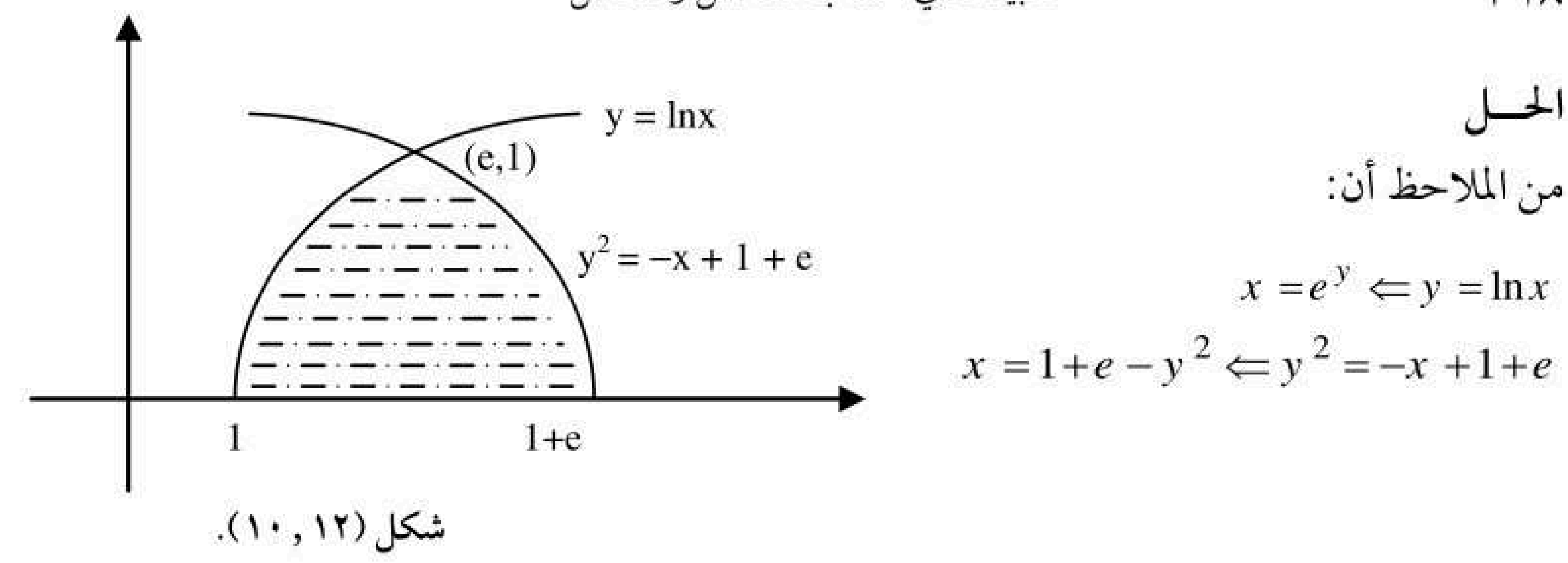
أوجـد مسـاحة المنطقـة المحـدودة بالمنحنيـات: $y = \ln x$ ، $y^2 = -x + 1 + e$ ، $y = 0$ والواقعة في الربع الأول.

الحــل

من الملاحظ أن:

$$x = e^{y} \Leftarrow y = \ln x$$

$$x = 1+e-y^{2} \Leftarrow y^{2} = -x+1+e$$



شكل (١٢ , ١٠).

مساحة المنطقة Q تساوي:

$$S = \int_0^1 [(1+e-y^2)-e^y]\,dy$$

$$= (1+e)y - \frac{y^3}{3} - e^y \Big|_0^1 = \left((1+e-\frac{1}{3}-e\right)+1 = \frac{5}{3}$$

تمارين(٦ , ١٠)

١) احسب مساحة المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ: $y = 4x - x^2$ ومحور السينات.

٢) احسب مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y=\ln x$ ، والمحور x والمستقيم $x=e$.

٣) احسب مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = x(x-1)(x-2)$ ومحور السينات.

٤) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y^3 = x$ والمستقيمين: $y=1$ و $x=8$

٥) أوجد مساحة الشكل المحدود بقوس المنحني: $y=\sin x$ المحدود بالنقطتين $x=0$ ، $x=\pi$ والمحور x.

٦) احسب مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = \tan x$ ومحور السينات والمستقيم: $x = \frac{\pi}{3}$

٧) أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالقطع الزائد: $xy = m^2$ والمستقيمين: $x=a$ ، $x=3a\,(a>0)$ ، والمحور x.

٨) احسب مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ ومحور السينات.

٩) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = x^3$ ومحور الصادات والمستقيم: $y=8$.

١٠) أوجد مساحة الشكل المحدود بالقطعين المكافئين: $y^2 = 2ax$ ، $x^2 = 2ay$.

١١) احسب مساحة الشكل المحدود بالقطع المكافئ: $y=2x-x^2$ والمستقيم $y=-x$.

١٢) أوجد مساحة جزء القطع المكافئ: $y=x^2$ المحدود بالمستقيم: $y=3-2x$.

١٣) أوجد مساحة الشكل المحدود بالقطعين المكافئين: $y=x^2$ ، $y=\frac{x^2}{2}$ والمستقيم: $y=2x$.

١٤) أوجد مساحة الشكل المحدود بالقطعين المكافئين: $y=\frac{x^2}{2}$ ، $y=4-\frac{2}{3}x^2$.

١٥) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y=\frac{1}{1+x^2}$ والقطع المكافئ $y=\frac{x^2}{2}$.

الإجابات

١) $\frac{32}{3}$	٢) 1	٣) $\frac{1}{2}$	٤) $\frac{17}{4}$
٥) 2	٦) $\ln 2$	٧) $m^2\ln 3$	٨) πa^2
٩) 12	١٠) $\frac{4}{3}a^2$	١١) $\frac{9}{2}$	١٢) $\frac{32}{3}$
١٣) 4	١٤) $\frac{32}{3}$	١٥) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$	

(١٠,١٥) طول قوس منحن معرف بمعادلته الديكارتية

إذا أعطي المنحني C، بالمعادلة الديكارتية: $y = f(x)$ ، حيث f دالة قابلة للاشتقاق على الفترة [a,b] ومشتقتها f' متصلة على هذه الفترة، فإن طول قوس المنحني الواصل بين النقطتين $A(a,f(a))$ و $B(b,f(b))$ ، يساوي :

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad (b>a)$$

مثال (١٠,٥٤)

أوجد طول قوس القطع المكافئ $y=\frac{1}{2}x^2$ الواقع بين النقطتين $A(1,\frac{1}{2})$ ونقطة الأصل 0.

الحل

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

لنضع: $x=\tan t \Leftarrow dx=\sec^2 t\,dt$

إذا كان: $x=0$ ، فإن: $\tan t=0 \Leftarrow t=0$

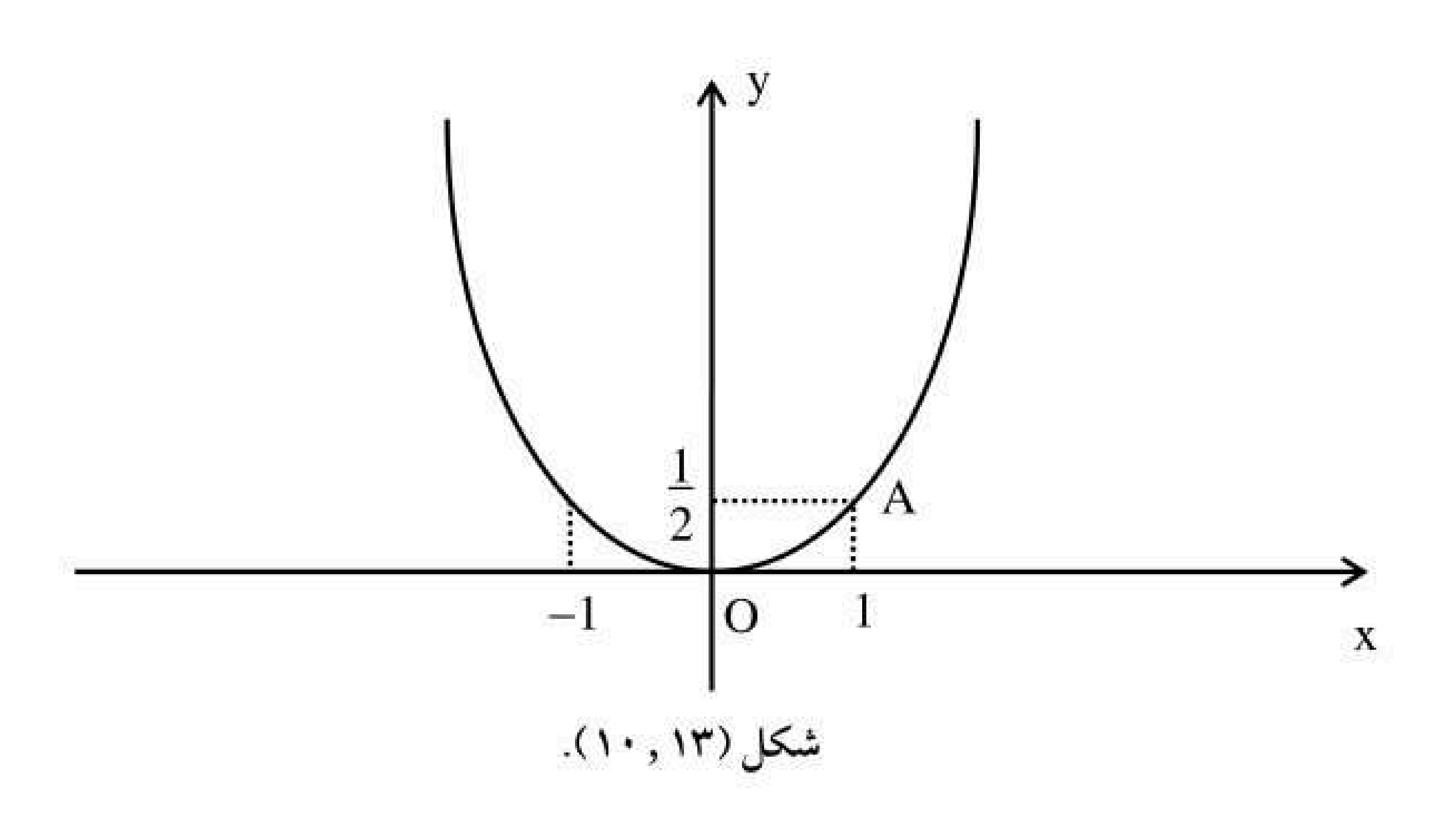
إذا كان: $x=1$ ، فإن: $\tan t=1 \Leftarrow t=\frac{\pi}{4}$

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 t}\,\sec^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 t\,dt$$

(لاحظ أن: $\sqrt{1+\tan^2 t} = \sec t$)

وبالاستفادة من (٢٦ , ١٠)، فإن:

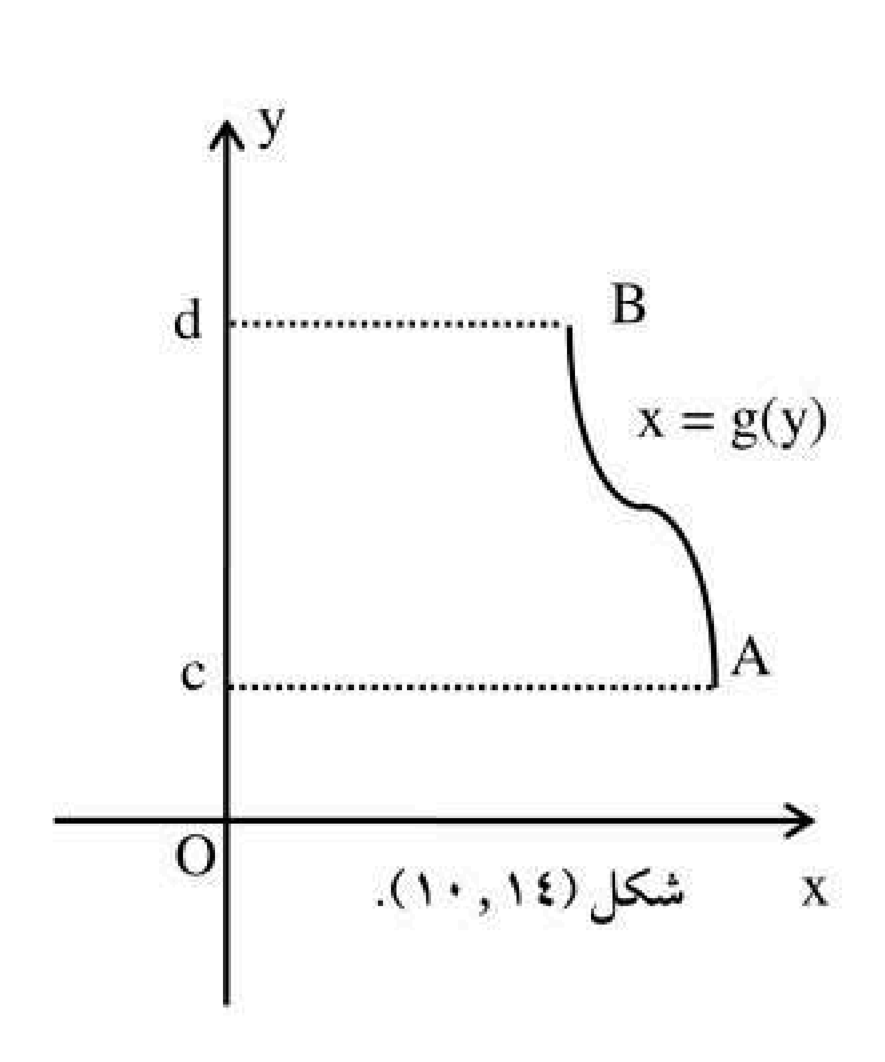
$$L = \left[\frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}Ln|\sec x + \tan x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$



شكل (١٣ , ١٠).

إذن: $L = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}Ln(\sqrt{2}+1)$

(لاحظ أن: $\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$، $Ln1 = 0$، $\tan 0 = 0$)



شكل (١٤ , ١٠).

ملحوظة (١٠,١٢)

إذا أعطي المنحني C بالمعادلة: x=g(y)، حيث g دالة قابلة للاشتقاق على الفترة [c,d] ومشتقتها متصلة على هذه الفترة شكل (١٠,١٤)، فإن طول قوس المنحني الواقع بين النقطتين:
A(g(c),c)، B(g(d),d) يعطى بالصيغة:

$$\boxed{L=\int_c^d \sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy}$$

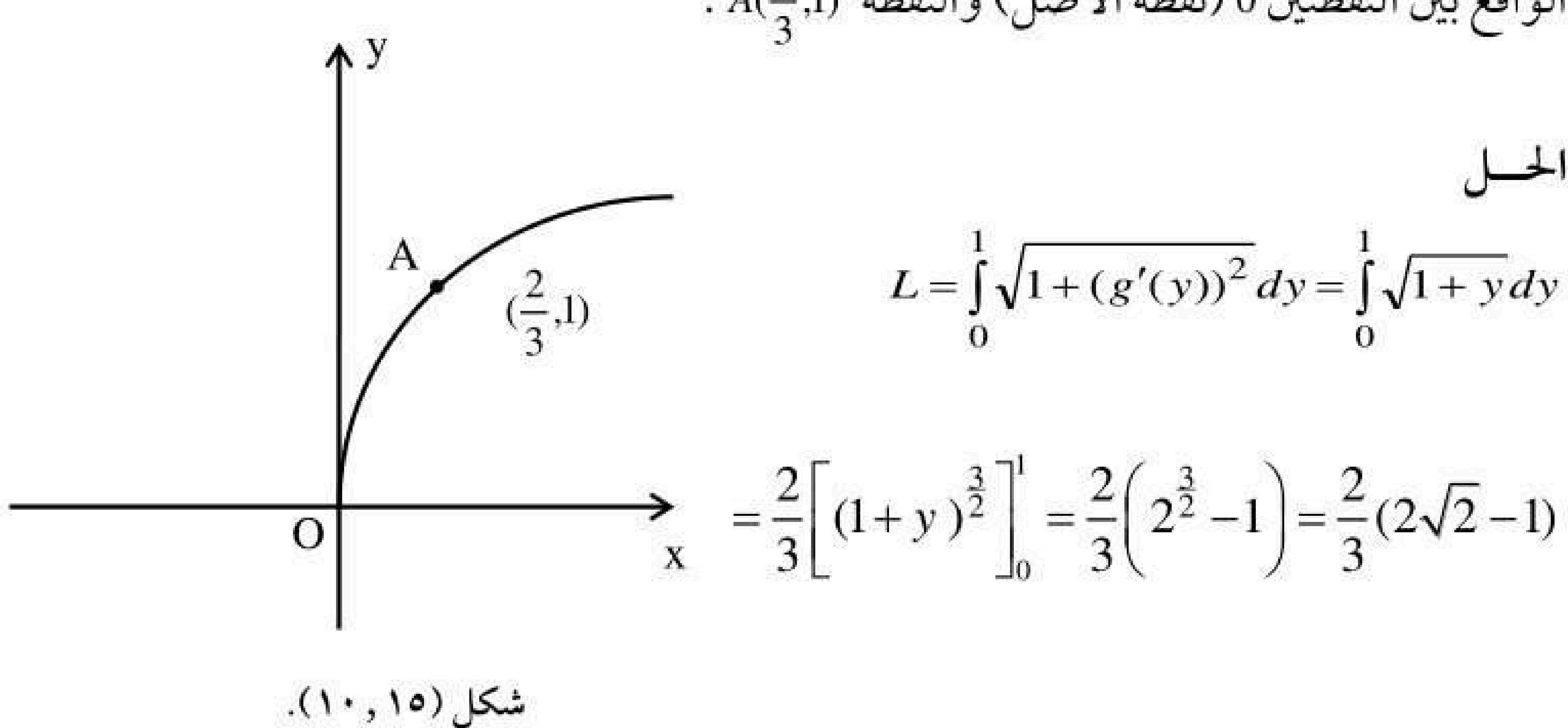
مثــال (١٠,٥٥)

أوجد طول قوس المنحني: $x=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$
الواقع بين النقطتين 0 (نقطة الأصل) والنقطة $A(\frac{2}{3},1)$.

الحــل

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy=\int_0^1 \sqrt{1+y}\,dy$$

$$=\frac{2}{3}\left[(1+y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$



شكل (١٠,١٥).

تمارين (١٠,٧)

أوجد طول قوس كل من المنحنيات المعرفة فيما يلي، والمحصور بين النقطتين الموافقتين للقيمتين المرفقتين:

١) $y^2=x^3$ $(x=4\ ,\ x=0)$

٢) $y=2\sqrt{x}$ $(x=1\ ,\ x=0)$

٣) $y=e^x$ $(x=1\ ,\ x=0)$

٤) $y=\ln x$ $(x=\sqrt{8}\ ,\ x=\sqrt{3})$

٥) $y=\sin^{-1}(e^{-x})$ $(x=1\ ,\ x=0)$

٦) $x=\ln(\sec y)$ $(y=\frac{\pi}{3}\ ,\ y=0)$

٧) $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ $(y=e\ ,\ y=1)$

٨) $\left|\frac{2+\sqrt{4-y^2}}{y}\right| x=\sqrt{4-y^2}+2\ln$ ، حيث $x>0$ $(y=2\ ,\ y=1)$

الإجابات

١) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$

٢) $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$

٣) $\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{1+e^2}-1)(\sqrt{2}+1)}{e}$

٤) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

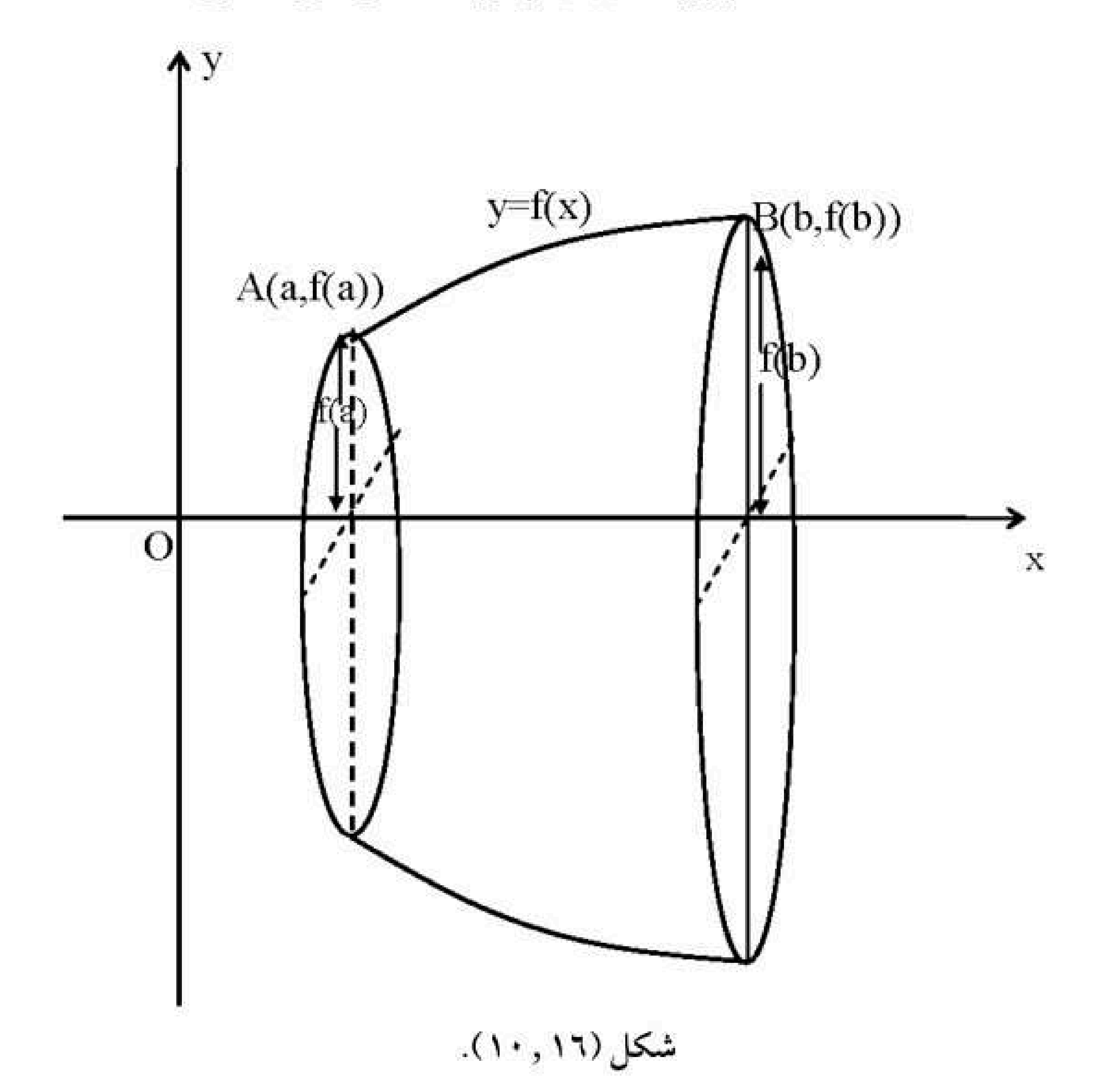
٥) $\ln(e+\sqrt{e^2-1})$

٦) $\ln(2+\sqrt{3})$

٧) $\frac{1}{4}(e^2+1)$

٨) $2\ln 2$

(١٠ , ١٦) الحجوم الدورانية بطريقة الأقراص الدائرية



شكل (١٠ , ١٦).

إذا كانت f متصلة على الفترة [a,b] وكانت f(x)≥0، فإن: الحجم الناتج من دوران المنطقة الواقعة تحت القوس $\overset{\frown}{AB}$ والذي مبدؤه A(a,f(a)) ونهايته B(b,f(b)) وفوق القطعة [a,b] عند دورانها حول المحور x شكل (١٦ , ١٠)، يساوي:

$$V=\int_a^b \pi(f(x))^2dx=\int_a^b \pi y^2dx$$

مثــال (٥٦ , ١٠)

أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة الواقعة تحت القطعة [0,A] وفوق القطعة [0,a]، عند دورانها حول المحور x، علما أن: A=(a,b).

الحــــل

الحجم الحاصل هو مخروط دوراني، رأسه O وطول نصف قطر قاعدته b وطول ارتفاعه a.

معادلة المستقيم OA، هي:

$\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$، ومنه $y=\frac{b}{a}x$

شكل (١٧ , ١٠).

فالحجم يساوي: $V=\pi\int_0^a y^2dx=\pi\int_0^a (\frac{b}{a})^2x^2dx$

$$=\frac{\pi b^2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{\pi b^2}{3a^2}a^3=\frac{\pi b^2a}{3}$$

$$=\frac{1}{3}(\pi b^2)a=\frac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{3}$$

ومنه

$$\text{حجم المخروط الدوراني} = \frac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{3}$$

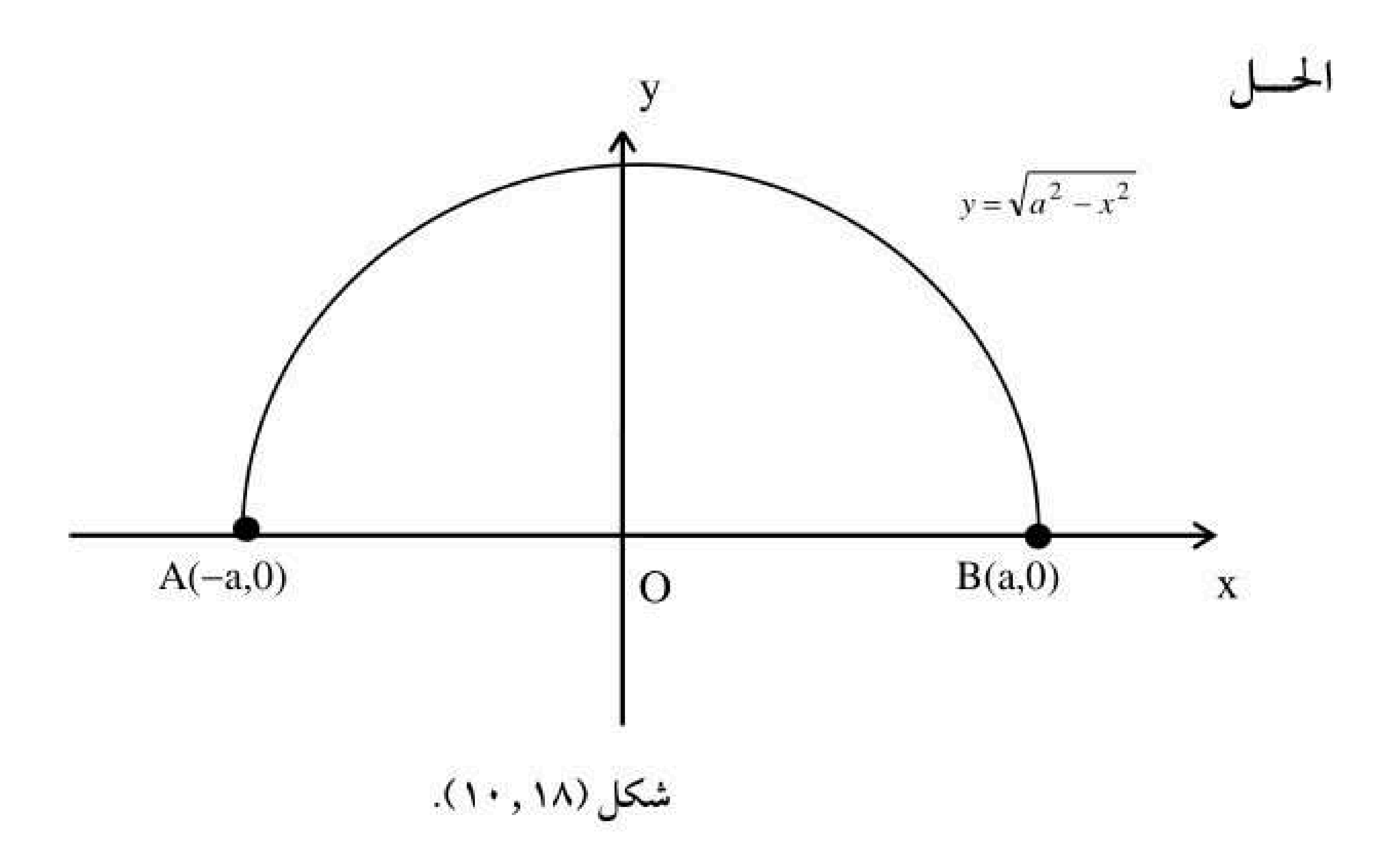
مثــال (١٠, ٥٧)

أوجد الحجم الناتج من دوران نصف الدائرة:

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

عند دورانها حول المحور x.

الحــل



شكل (١٠, ١٨).

لاحــظ أن نقطــتي تقاطع نصف الدائرة مع المحور x، هما: B(a,0) و A(−a,0) فالحجم يساوي:

$$V=\pi\int_{-a}^{a} y^2 dx=\pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}(a^2-x^2)dx$$

(لأن دالة التكامل دالة زوجية)

$$= 2\pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = 2\pi(a^3 - \frac{a^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi a^3$$

ومنه:

حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi a^3$ ، حيث a طول نصف قطر الكرة.

ملحوظة (١٣ , ١٠)

إذا دارت المنطقة المحصورة بين القوس $\overset{\frown}{AB}$ و القطعة [a,b] والمستقيمين y=a و y=b، حول المحور y ، شكل (١٩ , ١٠) فإن الحجم الناتج من دورانها يعطى بالصيغة:

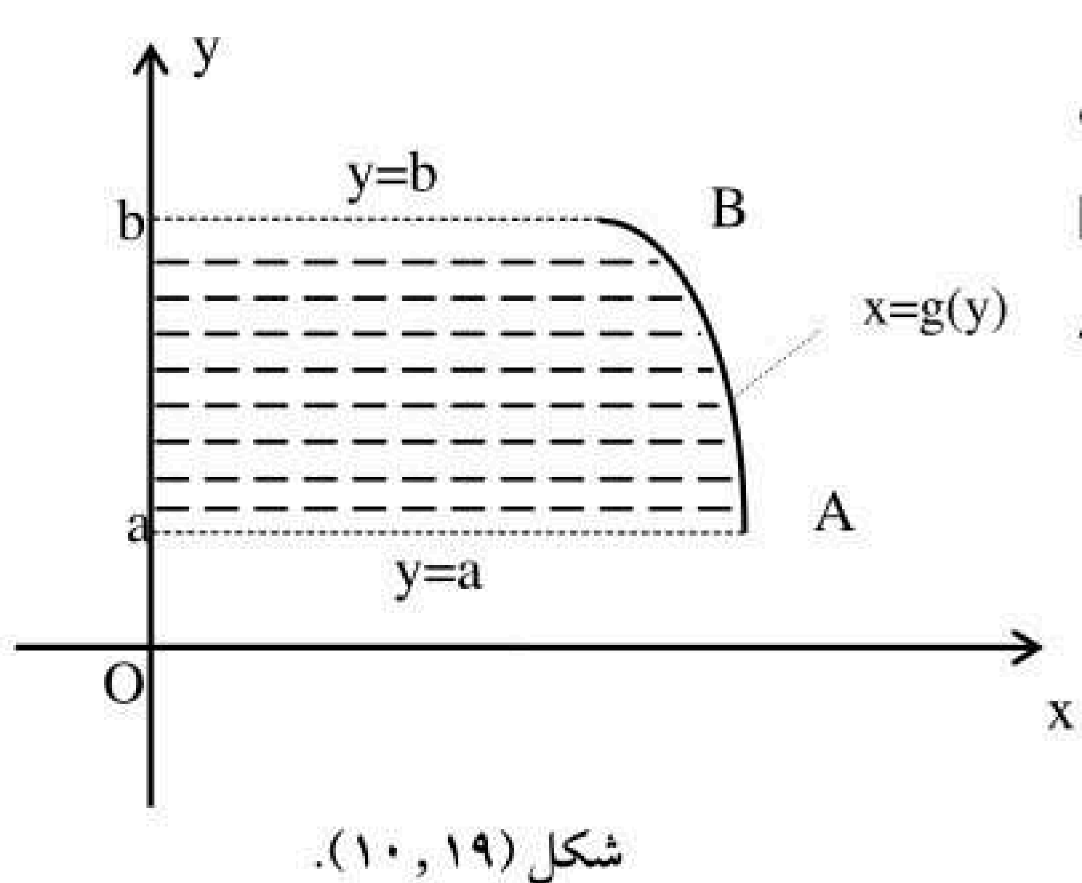
$$V = \int_a^b \pi(g(y))^2 dy = \int_a^b \pi x^2 dy$$

(g دالة متصلة على الفترة [a,b] ، $g(y) \ge 0$).

مثــال (٥٨ , ١٠)

أوجد حجم جذع المخروط الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين القطعة المستقيمة [A,B] والقطعة [0,H] والمستقيمين y=0 و y=h، عند دورانها حول المحورy، حيث:

A(R,0)، B(r,h) . (r<R).



شكل (١٩ , ١٠).

الحــــل

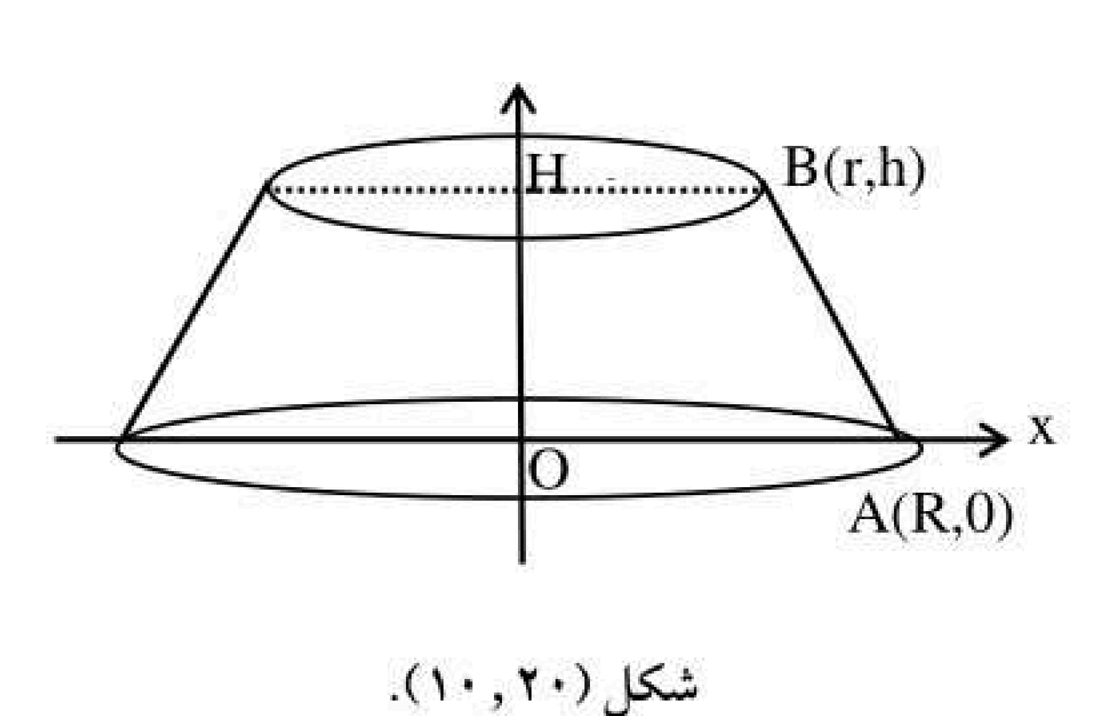
معادلة المستقيم AB:

$$\frac{y-0}{x-R} = \frac{h}{r-R}$$

ومنه:

$$\Leftarrow x - R = \frac{r-R}{h}y$$

$$x = R + \frac{r-R}{h}y$$



شكل (٢٠ , ١٠).

الحجم يساوي:

$$V = \int_0^h \pi x^2 dy = \pi \int_0^h (R + \frac{r-R}{h} y)^2 dy$$
$$= \frac{\pi h}{r-R} \int_0^h (R + \frac{r-R}{h} y)^2 (\frac{r-R}{h} dy)$$
$$= \frac{\pi h}{3(r-R)} \left[(R + \frac{r-R}{h} y)^3 \right]_0^h = \frac{\pi h}{3(r-R)} (r^3 - R^3)$$

إذن، حجم جذع المخروط يساوي:

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + Rr + R^2)}$$

R طول نصف قطر القاعدة الكبرى،

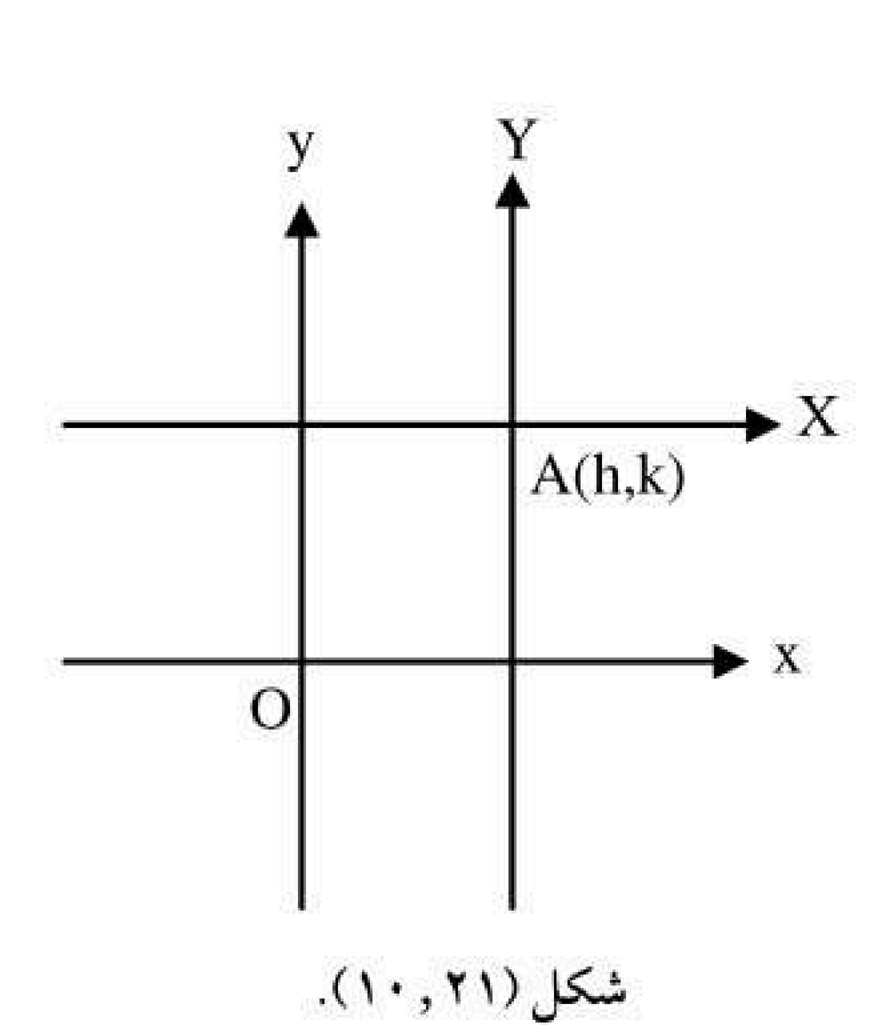
r طول نصف قطر القاعدة الصغرى،

h ارتفاع جذع المخروط.

ملحوظة (١٤ ,١٠)

(أ) إذا سحبنا المحورين الإحداثيين إلى النقطة $A(h,k)$، فإن صيغتي الانسحاب اللتين تربطان الإحداثيين (x,y) بالإحداثيين (X,Y) هما:

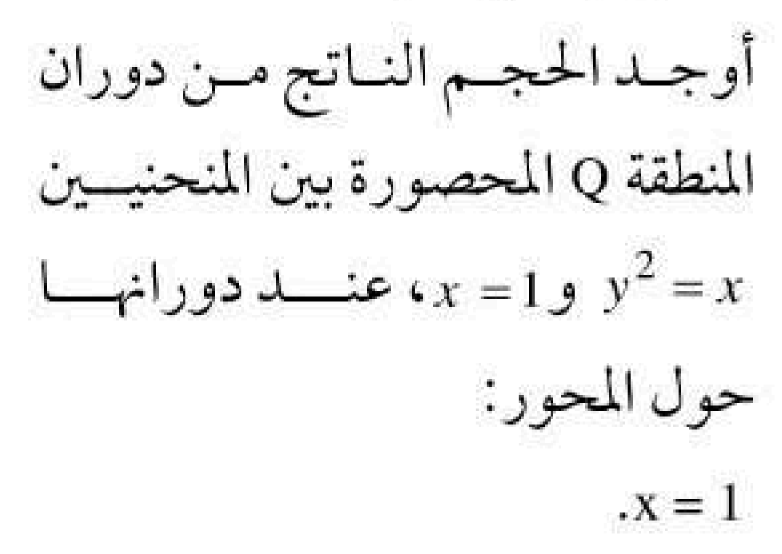
$$x = h + X$$
$$y = k + Y$$



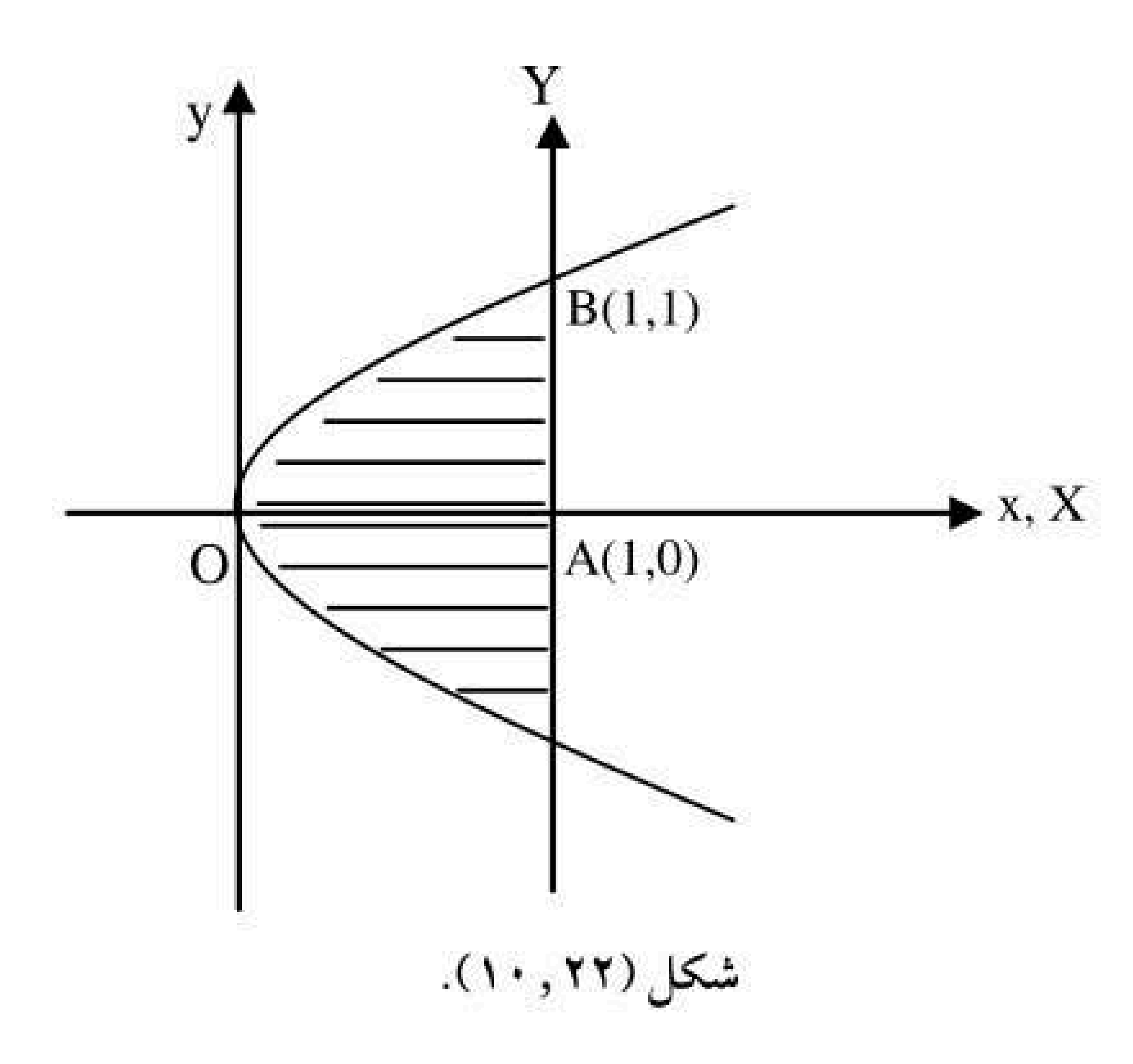
شكل (٢١ ,١٠).



مثـــال (١٠,٥٩)



أوجـد الحجـم النـاتج مـن دوران المنطقة Q المحصورة بين المنحنيـــين $y^2 = x$ و $x = 1$، عنـــد دورانهـــا حول المحور: $x = 1$.



شكل (١٠,٢٢).

الحــل

لنسحب المحورين الإحداثيين إلى النقطة A(1,0).

صيغتا الانسحاب: $x = 1 + X \quad , \quad y = Y$

معادلة القطع المكافئ: $y^2 = x$ بالنسبة للمحورين X,Y هي:

$$g(Y) = X = Y^2 - 1 \Leftarrow Y^2 = 1 + X$$

الحجم الناتج من دوران المنطقة المظللة حول المحورY يساوي مثلي الحجم الناتج من دوران النصف العلوي من هذه المنطقة ويساوي:

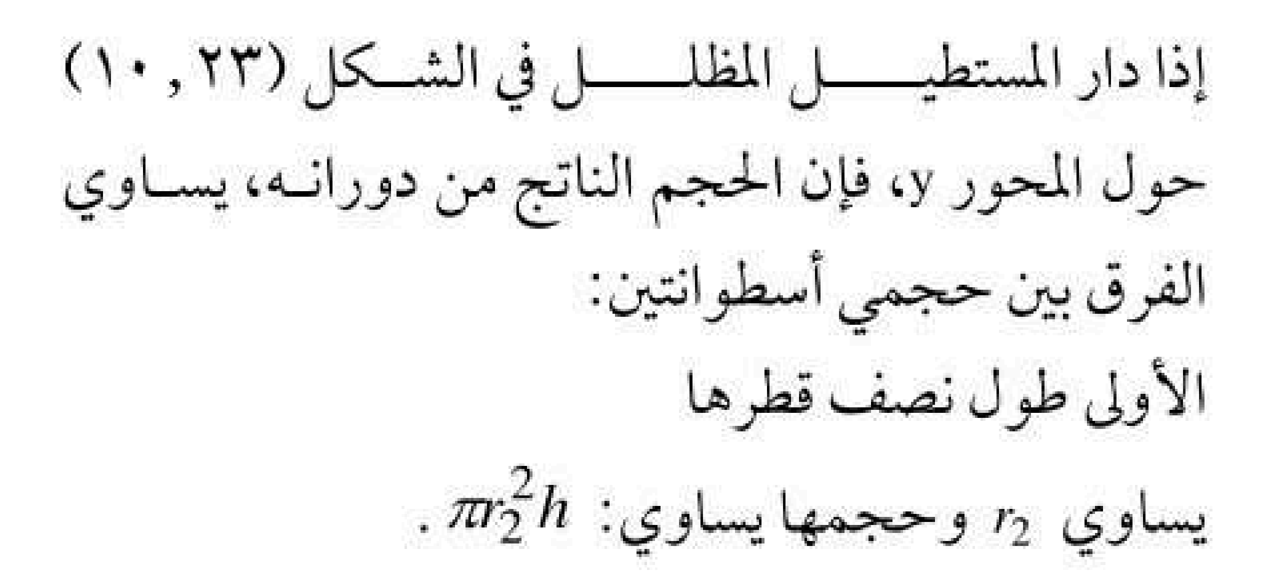
$$2\pi\int_0^1 (g(Y))^2 dY = 2\pi\int_0^1 (Y^2 - 1)^2 dY = 2\pi\int_0^1 (Y^4 - 2Y^2 + 1) dY$$

$$= 2\pi\left(\frac{Y^5}{5} - \frac{2Y^3}{3} + Y\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{8\pi}{15}\cdot 2 = \frac{16\pi}{15}$$

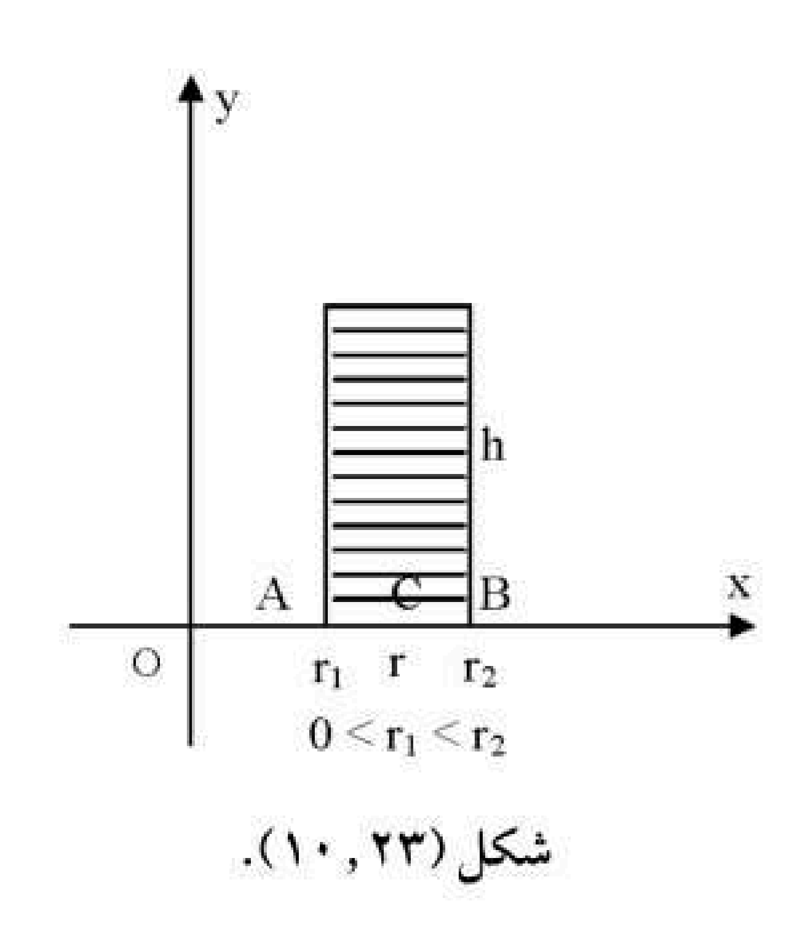
بصورة أخرى: إذا اعتبرنا p(x,y) نقطة من نقاط القطع المعطى، فإن نصف قطر الدائرة التي ترسمها هذه النقطة عند دورانها حول المستقيم: x=1 (الموازي للمحور y)، يساوي: $r = 1 - x = 1 - y^2$، بالتالي فإن الحجم المطلوب يساوي:

$$V = 2\int_0^1 \pi r^2 dy = 2\int_0^1 \pi(1 - y^2)^2 dy$$

(١٠ , ١٧) الحجوم بطريقة الشرائح الأسطوانية
The Volumes by Cylindrical Shells



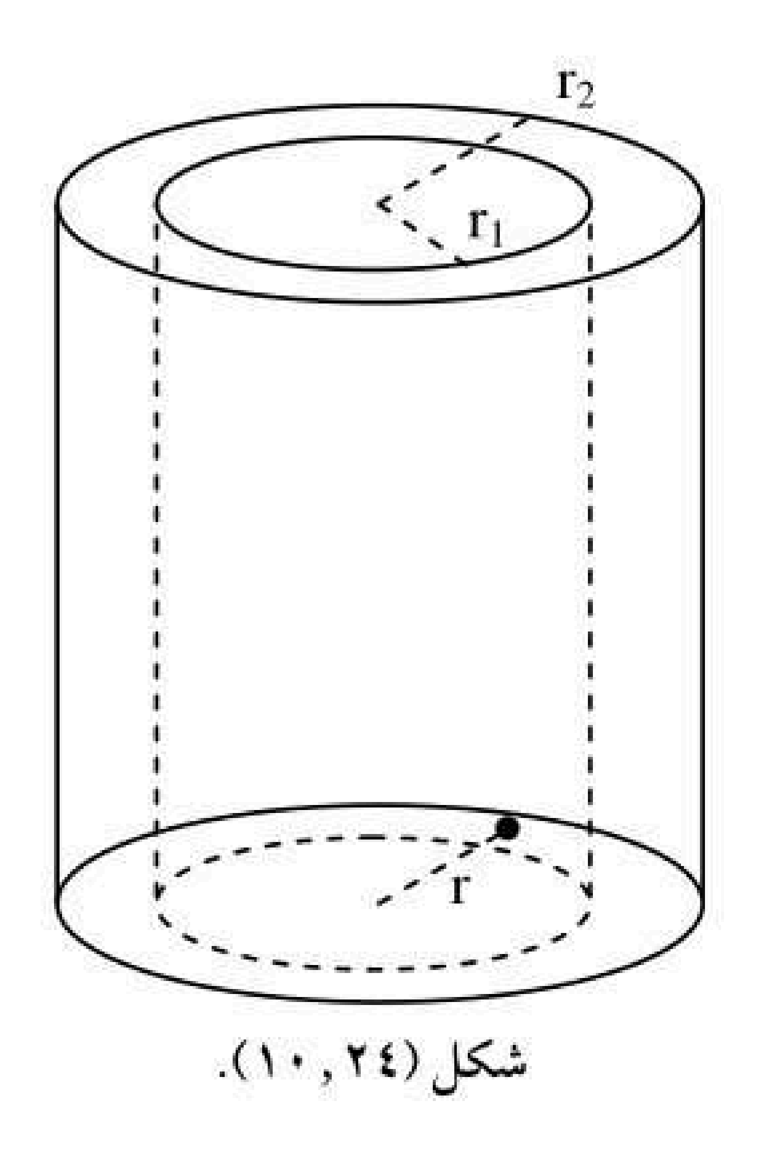
إذا دار المستطيل المظلل في الشكل (١٠ , ٢٣) حول المحور y، فإن الحجم الناتج من دورانه، يساوي الفرق بين حجمي أسطوانتين:
الأولى طول نصف قطرها
يساوي r_2 وحجمها يساوي: $\pi r_2^2 h$.



شكل (١٠ , ٢٣).

والثانية طول نصف قطرها يساوي r_1 وحجمها
يساوي: $\pi r_1^2 h$.

(h الارتفاع المشترك للأسطوانتين)



شكل (١٠ , ٢٤).

إذن حجم هذه الشريحة الأسطوانية يساوي:

$$\pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi h(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)$$

من الملاحظ أن الإحداثي السيني للنقطة
C منتصف القاعدة [A,B] يساوي: $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$. بالتالي

فإن حجم الشريحة الأسطوانية يساوي:

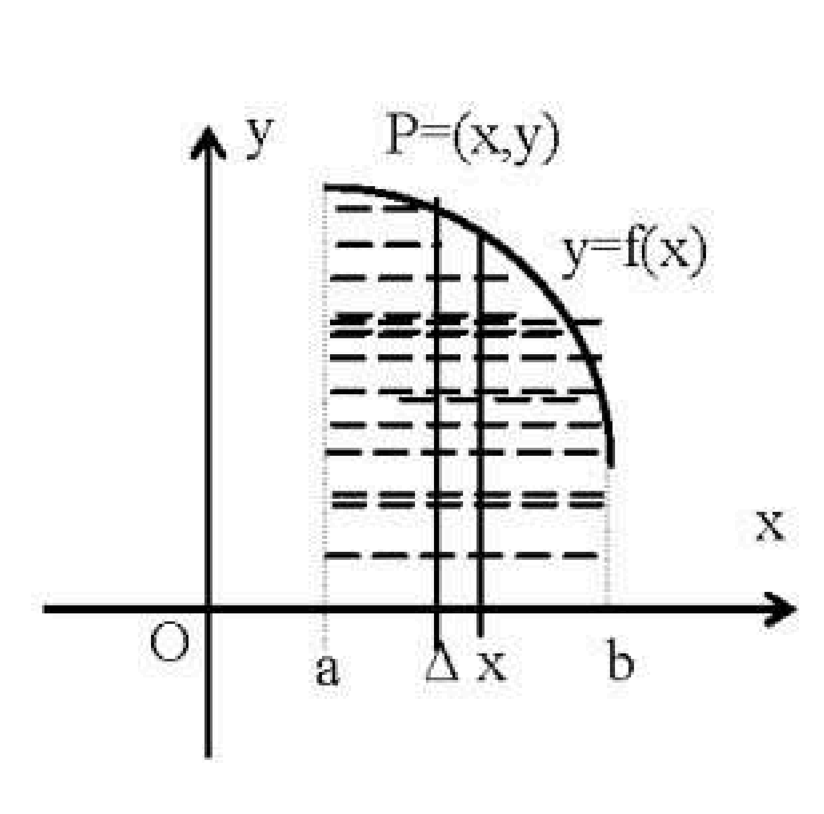
$$\boxed{2\pi h r \Delta r}$$

(Δr سمك الشريحة الأسطوانية، r المتوسط الحسابي لنصفي قطري الأسطوانتين الداخلية والخارجية، h ارتفاع الشريحة).

لتكن f دالة متصلة على الفترة [a,b]، حيث: $a\geq 0$، $f(x)\geq 0$.

الحجم الناتج من دوران المنطقة المظللة في الشكل (١٠, ٢٥)، حول المحور y، يعطى بالصيغة:

$$V=\int_a^b 2\pi x f(x)dx=\int_a^b 2\pi xy dx$$



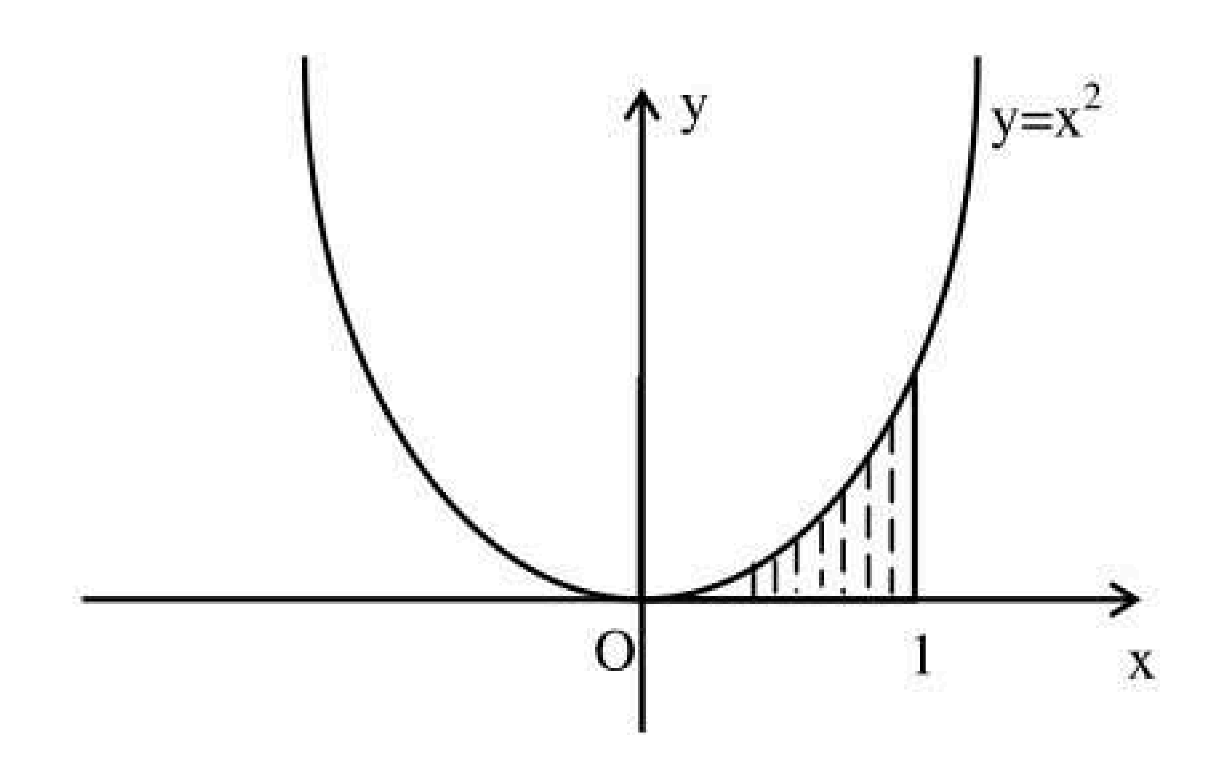
شكل (١٠, ٢٥).

تسمى هذه الطريقة بطريقة الشرائح الأسطوانية لإيجاد الحجم.

($f(x)$ ارتفاع الشريحة ، x بعد النقطة P عن محور الدوران.

مثـال (١٠, ٦٠)

أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المظللة في الشكل (١٠, ٢٦)، حول المحور y بطريقة الشرائح الأسطوانية.



شكل (١٠, ٢٦).

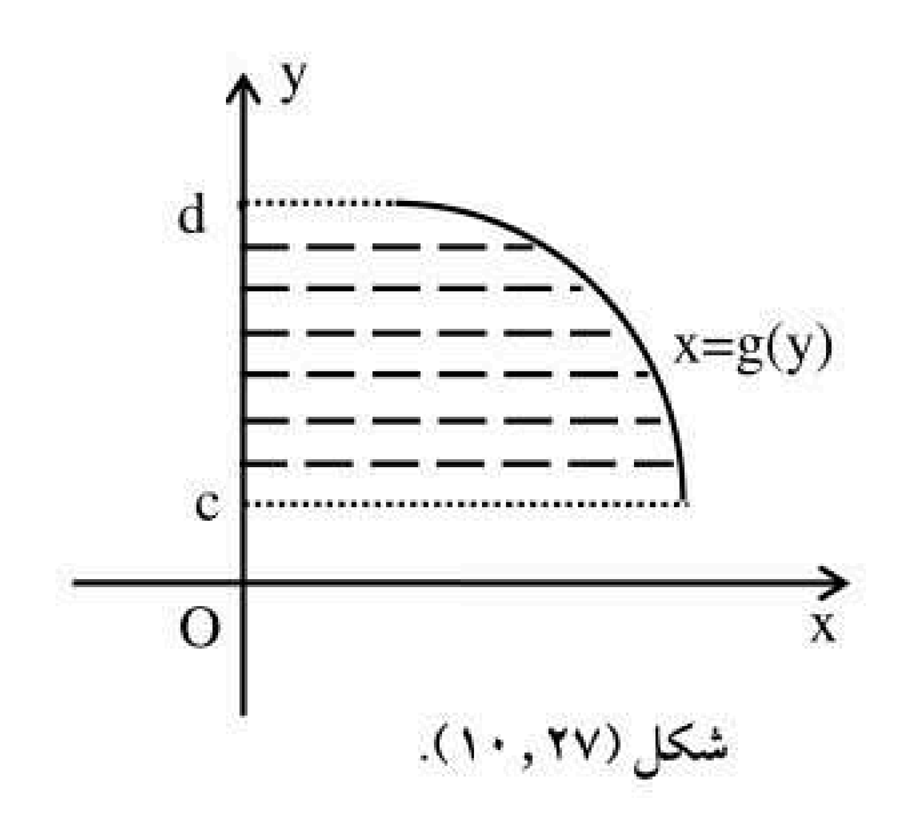
الحـــل

$$V=\int_0^1 2\pi x x^2 dx$$
$$=\left[\frac{2\pi x^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

ملحوظة (١٥ , ١٠)

لتكن g دالة متصلة على الفترة [c,d]، حيث: $c\geq 0$، $g(y)\geq 0$.

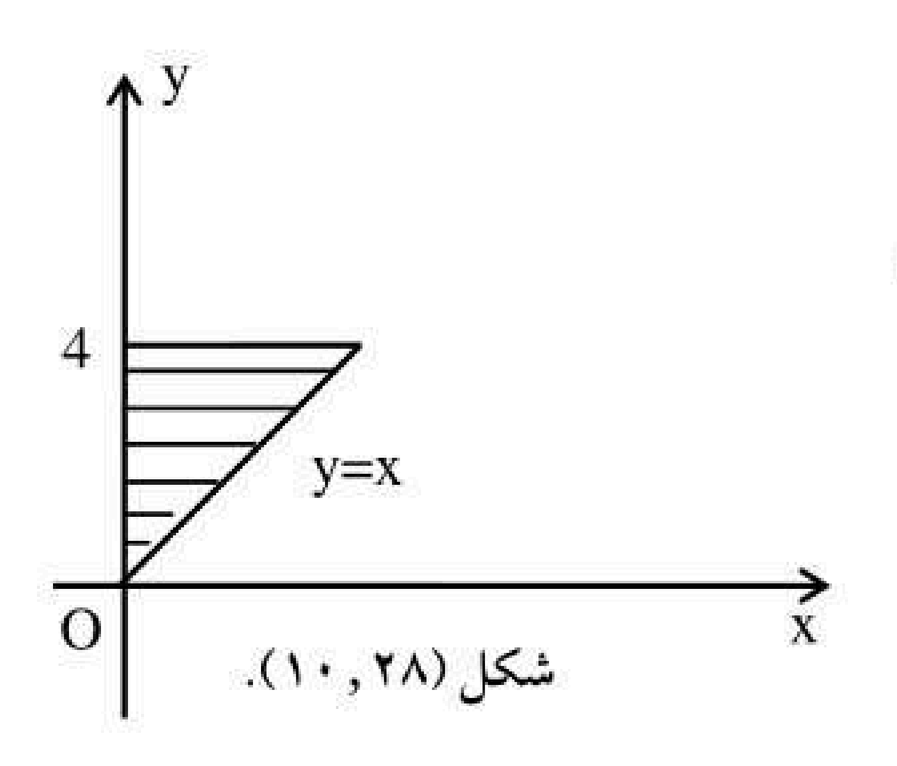
الحجم الناتج من دوران المنطقة المظللة في الشكل (٢٧ , ١٠) حول المحور x بطريقة الشرائح الاسطوانية، يعطى بالصيغة: $V=\int_c^d 2\pi y g(y)dy=\int_c^d 2\pi y x dy$



شكل (٢٧ , ١٠).

مثـال (٦١ , ١٠)

أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المظللة في الشكل (٢٨ , ١٠)، حول المحور x بطريقة الشرائح الأسطوانية.



شكل (٢٨ , ١٠).

الحـــل

الحجم يساوي:

$$\int_0^4 2\pi y\, y dy=\left[\frac{2\pi y^3}{3}\right]_0^4=\frac{2\pi}{3}(4)^3$$
$$=\frac{128}{3}\pi$$

تمارين (٨,١٠)

١) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ: $y = 2x - x^2$ والمحور x، عند دورانها حول المحور x.

٢) أوجد حجم مجسم القطع الناقص المتولد من دوران القطع الناقص: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$، حول المحور x.

٣) أوجد الحجم الناتج من دوران قوس المنحني: $y = \sin^2 x$ المحدود بنقطة الأصل والنقطة: $A(\pi,0)$ عند دورانه حول المحور x.

٤) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمحور x والمستقيم x=1 والمنحني: $y^2 = x^3$ ، عند دورانها حول المحور x مرة وحول المحور y مرة أخرى.

٥) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة اللانهائية المحدودة بالمحورين الإحداثيين $(x \geq 0)$ والمنحني: $y = e^{-x}$ ، عند دورانها حول:

(أ)المحور x (ب) المحور y

٦) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ: $y^2 = 8x$ والمستقيم: x=2، عند دورانها حول:

(أ)المحور y (ب) المحور x = 2

٧) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحني: $y^2 = 2x$ والمستقيم: $x = \frac{1}{2}$ ، عند دورانها حول المستقيم: $y = -1$.

٨) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة التي يحدها الجزء المغلق من المنحني: $(x-4)y^2 = x(x-3)$ ، عند دورانها حول المحور x.

الإجابات

١) $\frac{16\pi}{15}$ ٢) $\frac{4}{3}\pi ab^2$ ٣) $\frac{3}{8}\pi^2$

٤) حول x : $\frac{\pi}{4}$ ، حول y : $\frac{4}{7}\pi$

٥) حول x : $\frac{\pi}{2}$ ، حول y : 2π

٦) حول y : $\frac{128\pi}{5}$ ، حول $x = 2$: $\frac{256\pi}{15}$

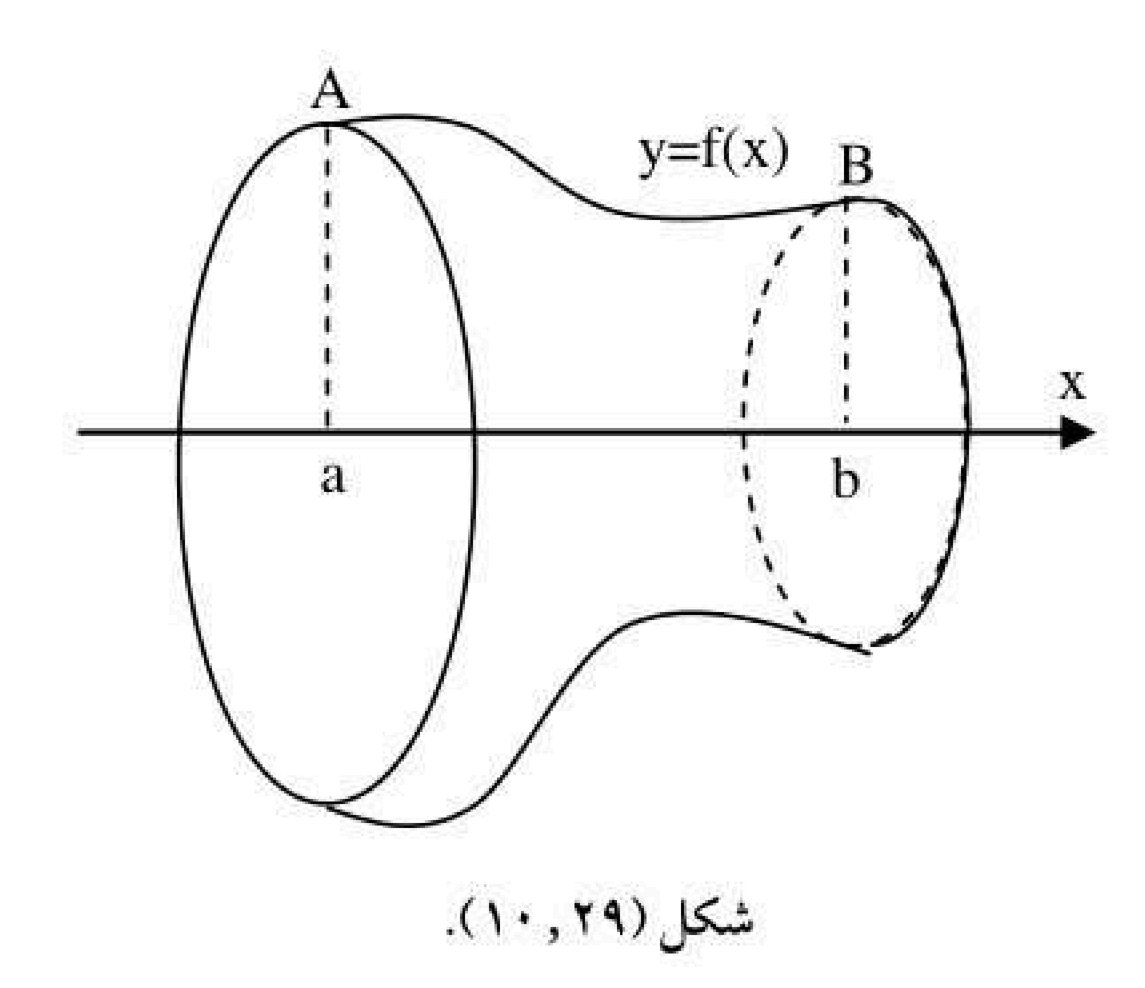
٧) $\frac{4}{3}\pi$ ٨) $\frac{\pi}{2}(15 - 16\ln 2)$

(١٨ , ١٠) مساحة سطح دوراني
Area of a Surface of Revolution

لتكن f دالة متصلة وغير سالبة معرفة على الفترة [a,b] ومشتقتها متصلة على هذه الفترة شكل (٢٩ , ١٠).

مساحة السطح الناتج عن دوران قوس المنحني $y=f(x)$ المحصور بين النقطتين A,B حول المحور x شكل (٢٩ , ١٠)، يساوي:

$$S=\int_a^b 2\pi y ds$$ أو $$S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx$$



شكل (٢٩ , ١٠).

وذلك بملاحظة أن: $ds=\sqrt{1+y'^2}\ dx$ (تفاضل طول القوس)

مــثال (٦٢ , ١٠)

أوجد مساحة السطح الناتج عن دوران القطعـة المسـتقيمة [O,A] حـول المحـور x، حيـث: $A=(a,b)$.

الحـــل

السطح الناتج هو مخروط دوراني، مساحته تساوي:

$$S=\int_0^a 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

معادلة المستقيم OA، هي: $y=\frac{b}{a}x$

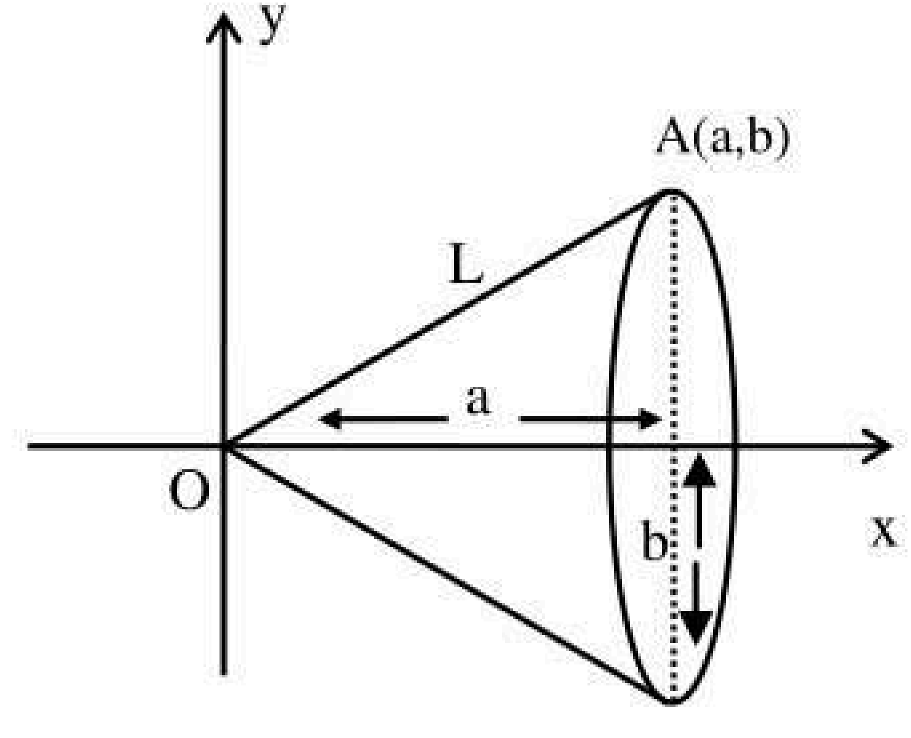
إذن:

$$S=\int_0^a 2\pi(\frac{b}{a}x)\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}\,dx$$

$$=\frac{2\pi b\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}\int_0^a x dx$$

$$=\frac{2\pi b\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}\cdot\frac{a^2}{2}=\pi b\sqrt{a^2+b^2}$$

وبملاحظة أن: $|OA|=\sqrt{a^2+b^2}$



شكل (١٠,٣٠).

فإن سطح المخروط الذي طول نصف قطر قاعدته b وطول حرفه الجانبي L ، هو:

$$\boxed{S=\pi\, b L}$$

ملحوظة (١٠,١٦)

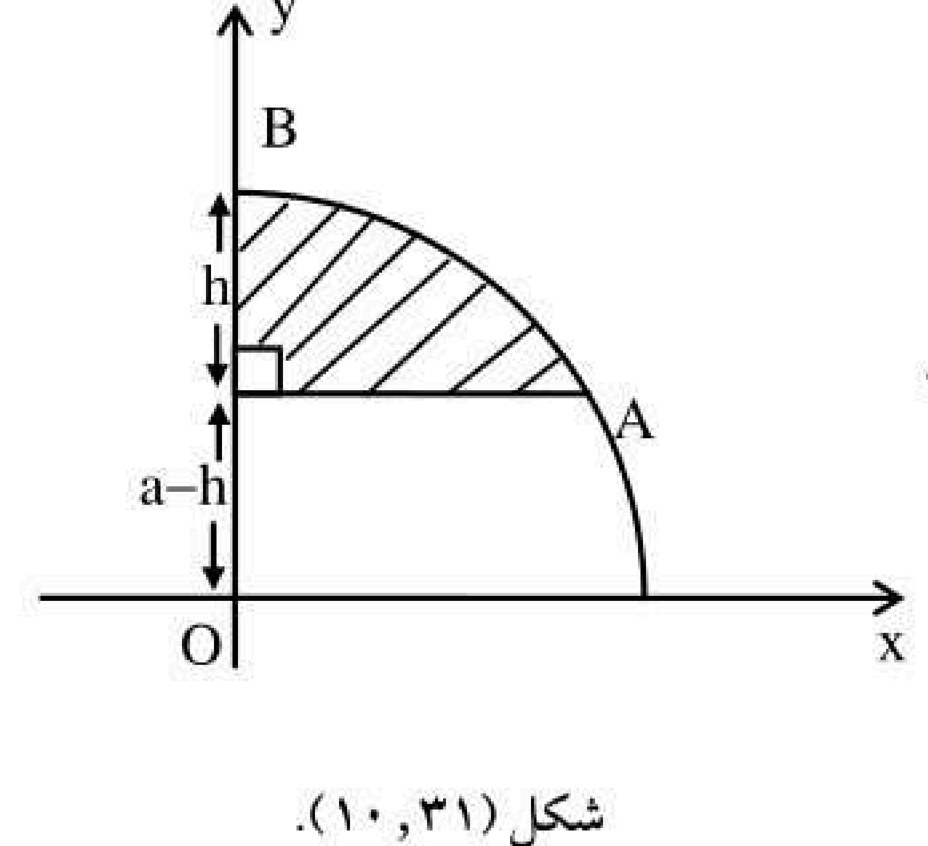
إذا دار قوس المنحني: x=g(y) الذي بدايته: A(g(c),c) ونهايته: B(g(d),d) حول المحور y، فإن مساحة السطح الدوراني الناتج تعطى بالصيغة:

$$S=\int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$$

حيث g دالة قابلة للاشتقاق على الفترة [c,d] ومشتقتها متصلة على هذه الفترة، وتحقق الشرط: $g(y)\geq 0$

مثـال (١٠,٦٣)

أوجد مساحة القبة الكروية التي ارتفاعها h والناتجة عن دوران $\overset{\frown}{AB}$ قوس نصف الدائرة: $x=\sqrt{a^2-y^2}$ حول المحور y (شكل (١٠,٣١).



شكل (١٠,٣١).

الحـــل

إذا كان طول ارتفـاع القبـة يسـاوي h فـإن الإحـداثي الصادي للنقطة A، هو: a − h.

مساحة القبة تساوي:

$$S = \int_{a-h}^{a} 2\pi\sqrt{a^2 - y^2}\sqrt{1+\frac{y^2}{a^2-y^2}}\,dy$$

$$= \int_{a-h}^{a} 2\pi\sqrt{a^2 - y^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy$$

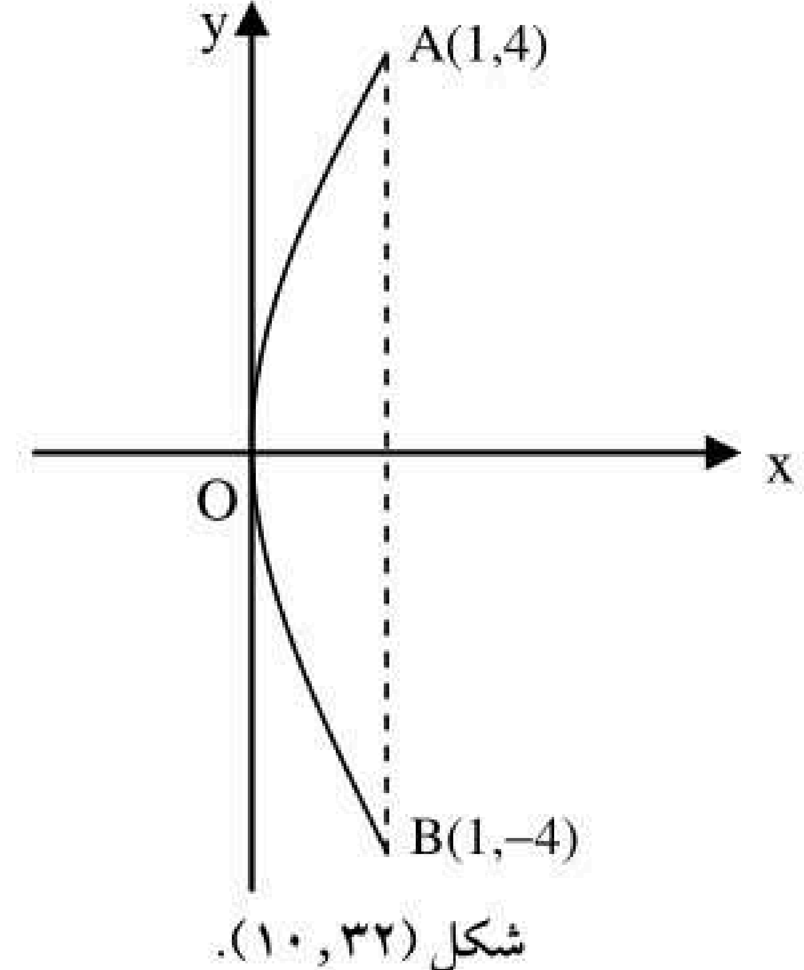
$$= 2\pi a\left[y\right]_{a-h}^{a} = 2\pi ah$$

مساحة القبة الكروية الذي طول ارتفاعها h يساوي:

$$\boxed{S = 2\pi ah}$$

تمارين (١٠,٩)

١) ما هي مساحة المرآة الناتجة عن دوران القوس المكافئي $\overset{\frown}{AOB}$، شكل (١٠,٣٢)، عند دورانه حول المحور x.



شكل (١٠,٣٢).

٢) أوجد مساحة السطح الناتج عن دوران قوس المنحنـي: y=sinx المحـدود بنقطـة الأصـل والنقطة $(\pi,0)$ عند دورانه حول المحور x.

٣) أوجد مساحة السطح الناتج من دوران قوس المنحني: y=tanx المحصور بين النقطتين الموافقتين x=0، $x=\frac{\pi}{4}$ ، عند دورانه حول المحور x.

٤) أوجد مساحة السطح الناتج من دوران قوس المنحني: $y=e^{-x}$ المحدود بالنقطتين الموافقتين x=0 ، $x=\infty$ ،عند دورانه حول المحور x.

٥) أوجد مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران قوس المنحني: $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ المحصور بين النقطتين الموافقتين y=1 ،y=e عند دورانه حول المحور x.

٦) أوجد مساحة السطح الناتج عن دوران الدائرة: $x^2+(y-2)^2=1$ عند دورانها حول المحور x.

٧) أوجد مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران القطع الناقص: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ، عند دورانه:

(أ) حول المحور x (ب) حول المحور y

الإجابات

١) $\frac{16}{3}\pi\left(5\sqrt{5}-8\right)$

٢) $2\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$

٣) $\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\pi\ln\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{5}+1}$

٤) $\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

٥) $\frac{\pi}{3}(e-1)(e^2+e+4)$

٦) $8\pi^2$: ضع y على الشكل: $y=2\pm\sqrt{1-x^2}$.

بأخذ الإشارة الموجبة نحصل على السطح الخارجي للحلقة.

وبأخذ الإشارة السالبة نحصل على السطح الداخلي للحلقة.

٧) حول x : $32\pi+\frac{200\pi}{3}\sin^{-1}\frac{3}{5}$ حول y : $50\pi+\frac{80\pi}{3}\ln 4$

(١٩ , ١٠) أمثلة عامة

General Examples

مثـــال (٦٤ , ١٠)

بدون الاستعانة بالرسم، أوجد المساحة المحدودة، بالمنحنيين:

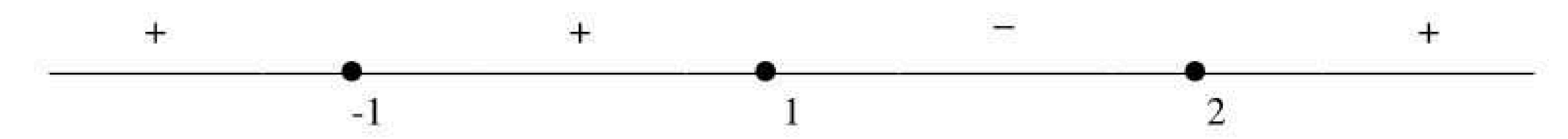
$$f(x)=(x^2-1)(x-2) \ \text{،}\ g(x)=(x^2-1)(x^2-4)$$

الحـــل

من الواضح أن: f و g دالتان متصلتان على IR . لندرس إشارة المقدار:

$$g(x)-f(x)=(x^2-1)(x-2)(x+1)$$
$$=(x-1)(x-2)(x+1)^2$$

فنجد الإشارة كما هو موضح في الشكل التالي:

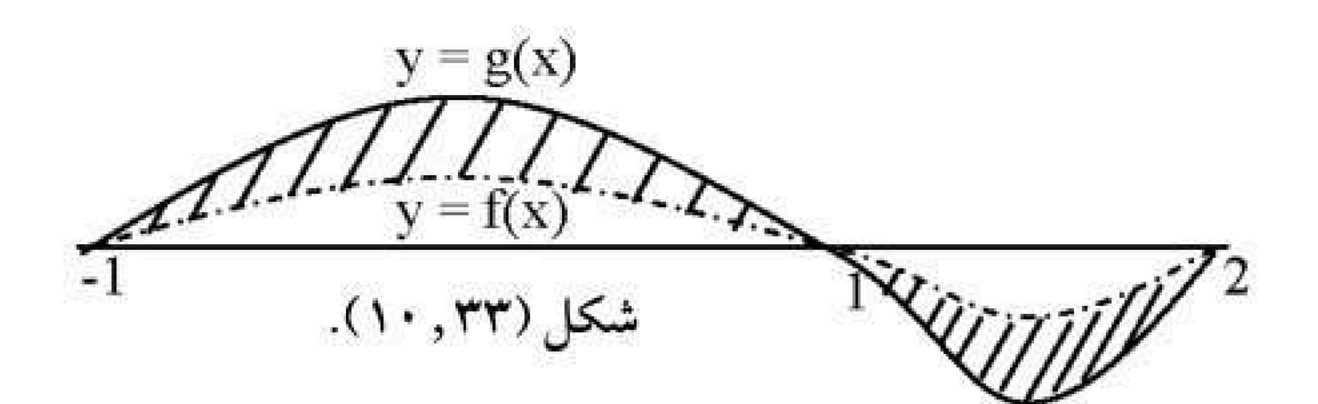


(باستثنـــاء الجــذور: 1,1,2 ، فإن الإشـــارة ما بـــين الجذرين 1,2 سالبـــة وموجبة ما عدا ذلك)

فالمنطقة المحدودة بين المنحنيين بشكل تقريبي، كما هو موضح في الشكل:

$g(x)\geq f(x)$ على الفترة [.1,2]

$g(x)\leq f(x)$ على الفترة [1,2]



شكل (٣٣ , ١٠).

فالمساحة تساوي:

$$\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))dx+\int_{1}^{2}(f(x)-g(x))dx=$$

$$\int_{-1}^{1}[(x^4-5x^2+4)-(x^3-2x^2-x+2)]dx+$$

$$\int_{1}^{2}[(x^3-2x^2-x+2)-(x^4-5x^2+4)]dx=$$

$$\int_{-1}^{1}(x^4-3x^2-x^3+x+2)dx+\int_{1}^{2}(-x^4+x^3+3x^2-x-2)dx=$$

$$\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\left(-\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_{1}^{2}=\frac{69}{20}$$

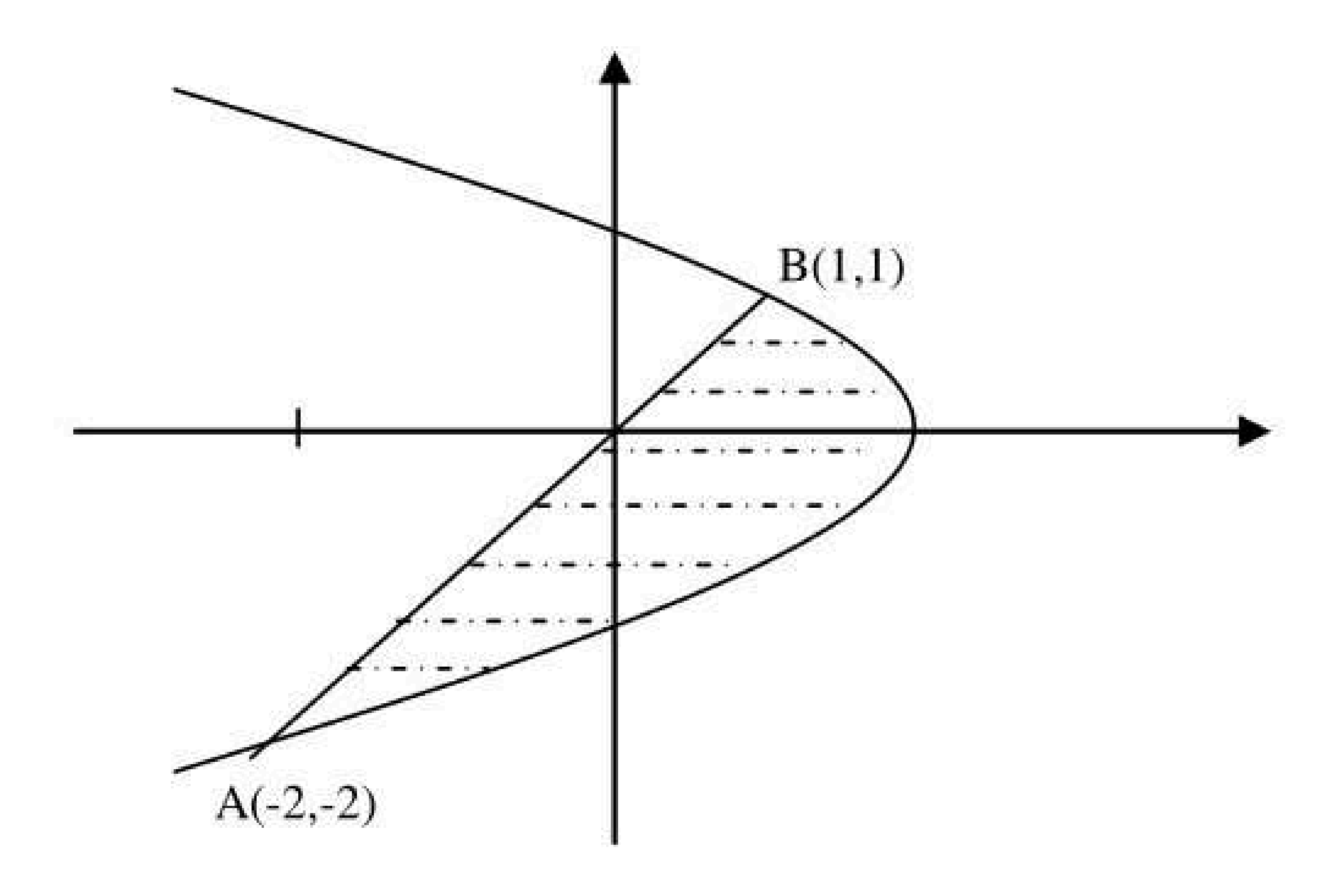
مثـــال (١٠,٦٥)

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحني: $x=2-y^2$ والمستقيم: $y = x$.

الحـــل

المساحة تساوي:

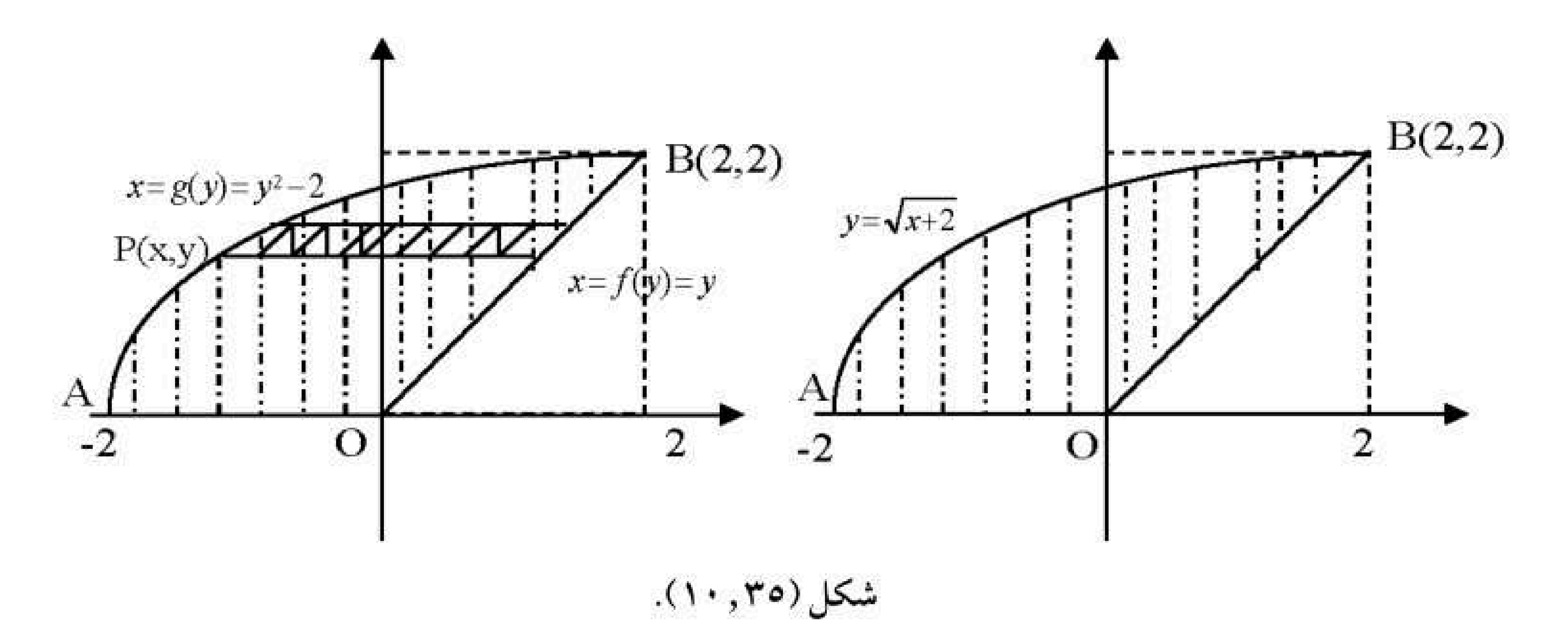
$$\int_{-2}^{1}[g(y)-f(y)]dy=\int_{-2}^{1}[(2-y^2)-y]dy=\left(2y-\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$



شكل (١٠,٣٤).

مثـــال (١٠,٦٦)

أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحـدودة بـالمنحني: $y=\sqrt{x+2}$ والمسـتقيمين: y=0 و y=x، عند دورانها حول المحور x.



شكل (١٠,٣٥).

الحــل

أ) الحجم يساوي: حجم المنطقة الناتجة من دوران القوس $\overset{\frown}{AB}$ حول المحـور x مطروحـا منـه الحجم الناتج من دوران القطعة [O,B] حول نفس المحـور. لإيجـاد إحـداثيي النقطـة B نقطـة التقاطع بين المنحني: $y=\sqrt{x+2}$ والمستقيم: y=x . نساوي بين قيمتي y، فنجد:

$$x \geq 0 \ , \ \sqrt{x+2}=x \Rightarrow x+2=x^2 \ \text{(بتربيع الطرفين)} \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow$$

$$(x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x=2 \ \text{(لأن: } x\geq 0\text{)}$$

١) حجم المنطقة الناتجة من دوران $\overset{\frown}{AB}$ حول المحور x، هو:

$$V_1=\pi\int_{-2}^{2}(f(x))^2dx=\pi\int_{-2}^{2}(x+2)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-2}^{2}=8\pi$$

٢) الحجم الناتج من دوران القطعة [O,B] حول المحور x، هو:

$$V_2=\pi\int_{0}^{2}x^2dx=\frac{\pi x^3}{3}\Bigg|_{0}^{2}=\frac{8\pi}{3}$$

الحجم المطلوب، يساوي:

$$V=V_1-V_2=8\pi-\frac{8\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}$$

ب) طريقة أخرى باستخدام الشرائح الاسطوانية:

$$V=2\pi\int_{0}^{2}y\,(f(y)-g(y))dy$$

$$V = 2\pi \int_0^2 y\,(y - (y^2 - 2))dy$$

($(f(y) - g(y))$ طول الشريحة، y بعد الشريحة عن محور الدوران)

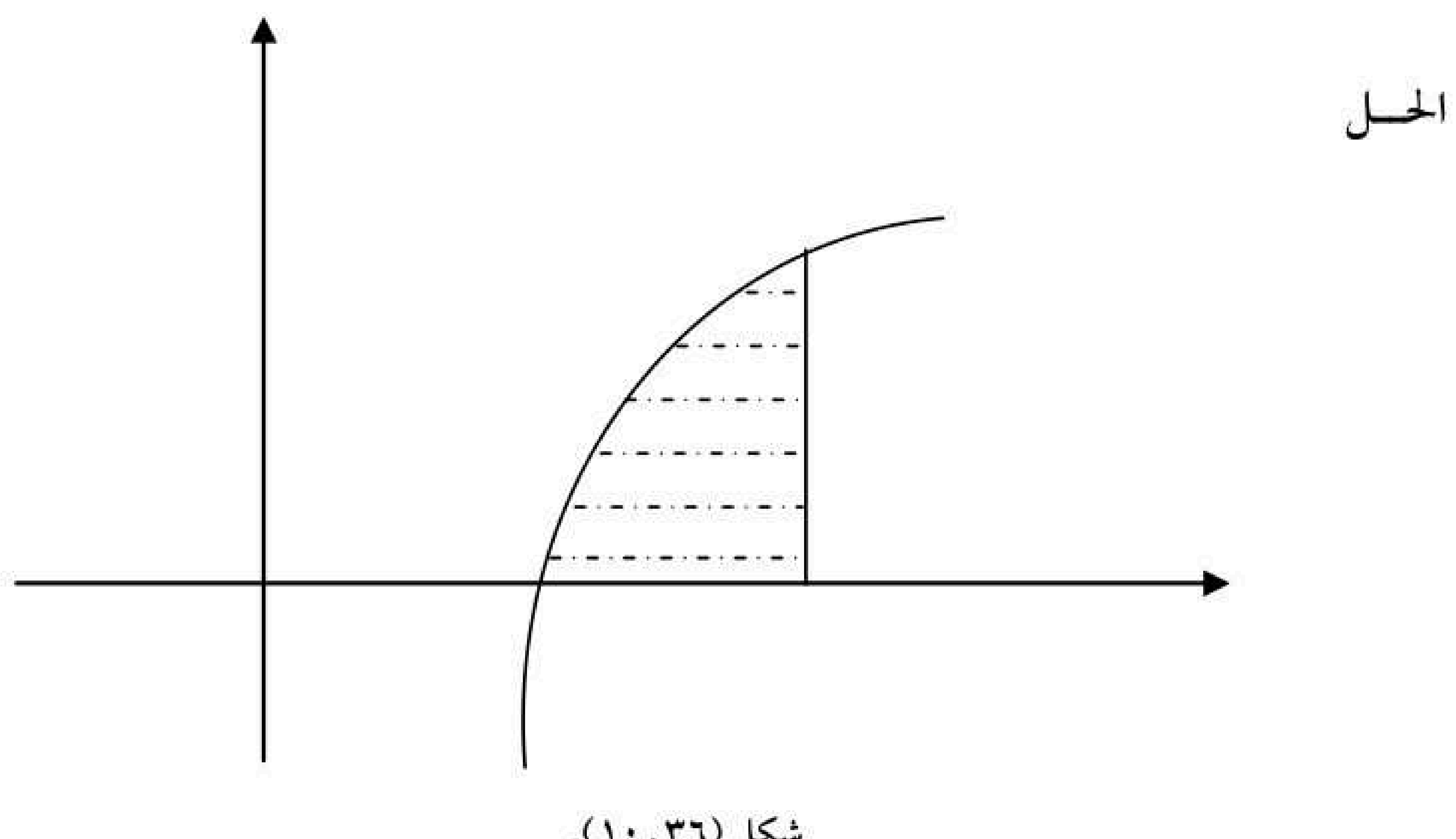
$$= 2\pi \int_0^2 (y^2 - y^3 + 2y)dy = 2\pi\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + y^2\right)\Big|_0^2$$

$$= 2\pi\left(\frac{8}{3} - 4 + 4\right) = \frac{16}{3}\pi$$

مثـــال (١٠,٦٧)

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحني: $y=\ln x$ والمستقيمين: $y=0$ و $x=2$، عند دورانها حول المحور y.

الحـــل



شكل (١٠,٣٦).

بطريقة الشرائح الأسطوانية:

$$V = \pi \int_1^2 2\pi\, xy dx = \int_1^2 2\pi x \ln x\, dx = 2\pi\left(\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

(وضعنا $dV = \frac{1}{x}dx \Leftarrow V = \ln x \;\;,\;\; u = \frac{x^2}{2} \Leftarrow du = xdx$
وكاملنا بالتجزيء)

$$= 2\pi\left(2\ln 2 - \frac{x^2}{4}\Bigg|_1^2\right) = 2\pi\left(2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4}\Bigg|_1^2\right) = 4\pi\ln 2 - \frac{3}{2}\pi$$

مثـــال (٦٨ , ١٠)

أوجد مساحة السطح الناتج عن دوران قوس المنحني: $y = \sqrt[3]{3x}$ المحـدود بنقطـة الأصـل والنقطة: $A\left(\frac{8}{3}, 2\right)$ عند دورانه حول المحور y.

الحـــل

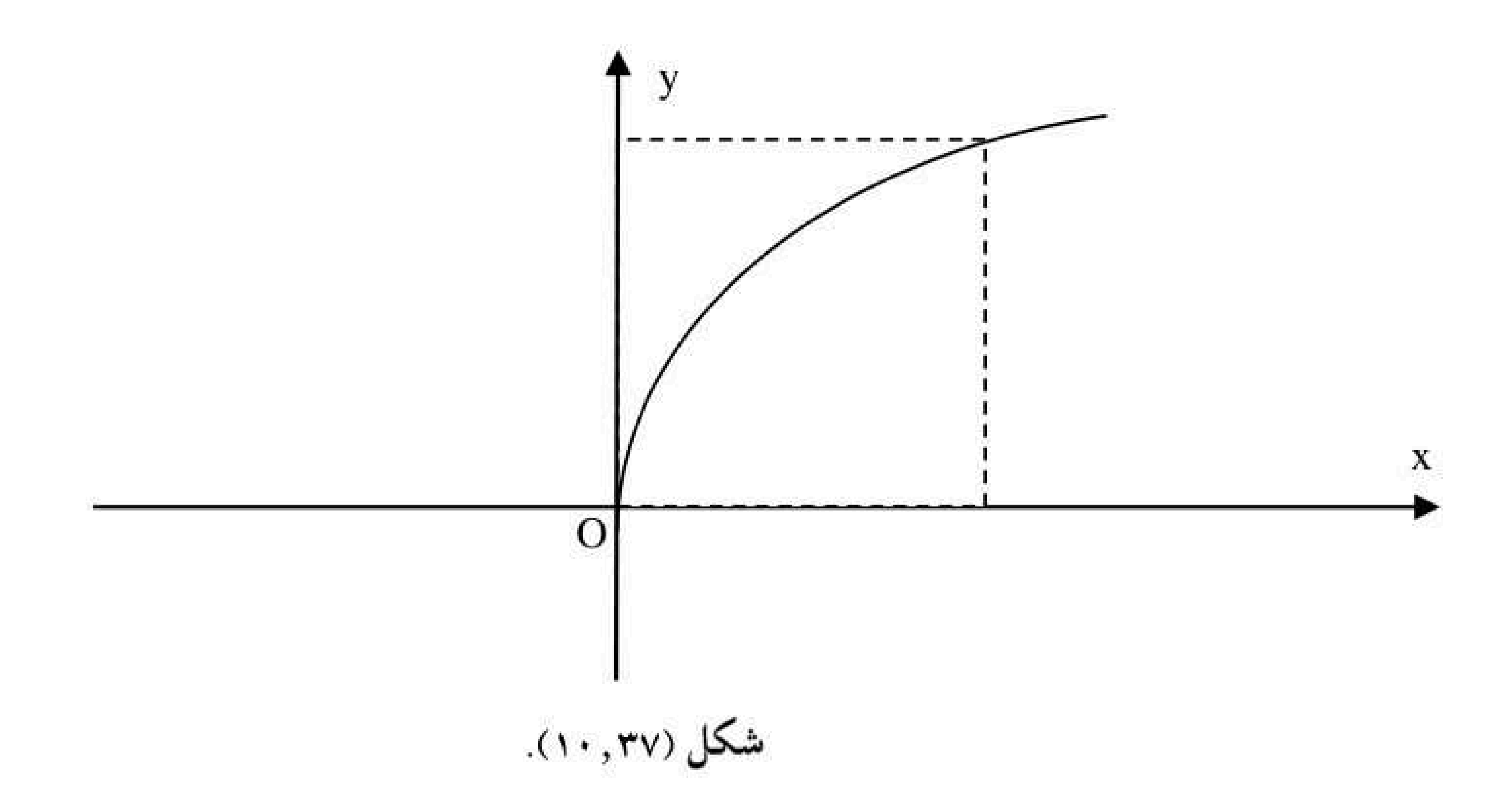
$$\frac{dx}{dy} = y^2 \Leftarrow x = \frac{y^3}{3} \Leftarrow y = \sqrt[3]{3x}$$

بالتالي، فإن مساحة السطح تساوي:

$$S = 2\pi\int_0^2 x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\;dy$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^2 y^3\sqrt{1+y^4}\;dy$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4}\int_0^2 \sqrt{1+y^4}\,(4y^3dy) = \frac{\pi}{6}\frac{(1+y^4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 = \frac{\pi}{9}\left((17)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$



شكل (١٠,٣٧).

مثـــال (١٠,٦٩)

أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمستقيمين: $y = 2x$ ، $x = 1$ ومحـور السـينات، عنـد دورانها حول المستقيم: $x = 5$.

الحـــل

(طريقة الشرائح الأسطوانية)

الحـــل

محور الدوران، هو المستقيم:
$x = 5$ الموازي للمحور y،
بالتالي فإن:

A(1,2)
2
P
5−x
B
O
1
5
x=5
محور الدوران

شكل (١٠,٣٨).

(أ) ارتفاع الشريحة يساوي: y.

(ب) سمك الشريحة الأسطوانية يساوي: Δx .

(ج) طول نصف القطر الوسطي لاسطوانتي الشـــريحة يساوي بعد النقطة p(x,y) عن محور الدوران، ويساوي: 5 − x.

(د) حجم الشريحة الأسطوانية التقريبي، هو: $2\pi y(5-x)\Delta x$.

(هـ) الحجم المطلوب يساوي:

$$V = 2\pi\int_0^1 y(5-x)dx = 2\pi\int_0^1 2x(5-x)dx = 4\pi\left(\frac{5x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{26\pi}{3}$$

مثـال (١٠,٧٠)

أوجـد الحجم الناتـج من دوران المنطقـة المحدودة بالمنحـني: $y = 4x^2$ والمستقيم y = 4 ومحور الصادات، عند دورانها حول المستقيم: y = − 3.

الحـل

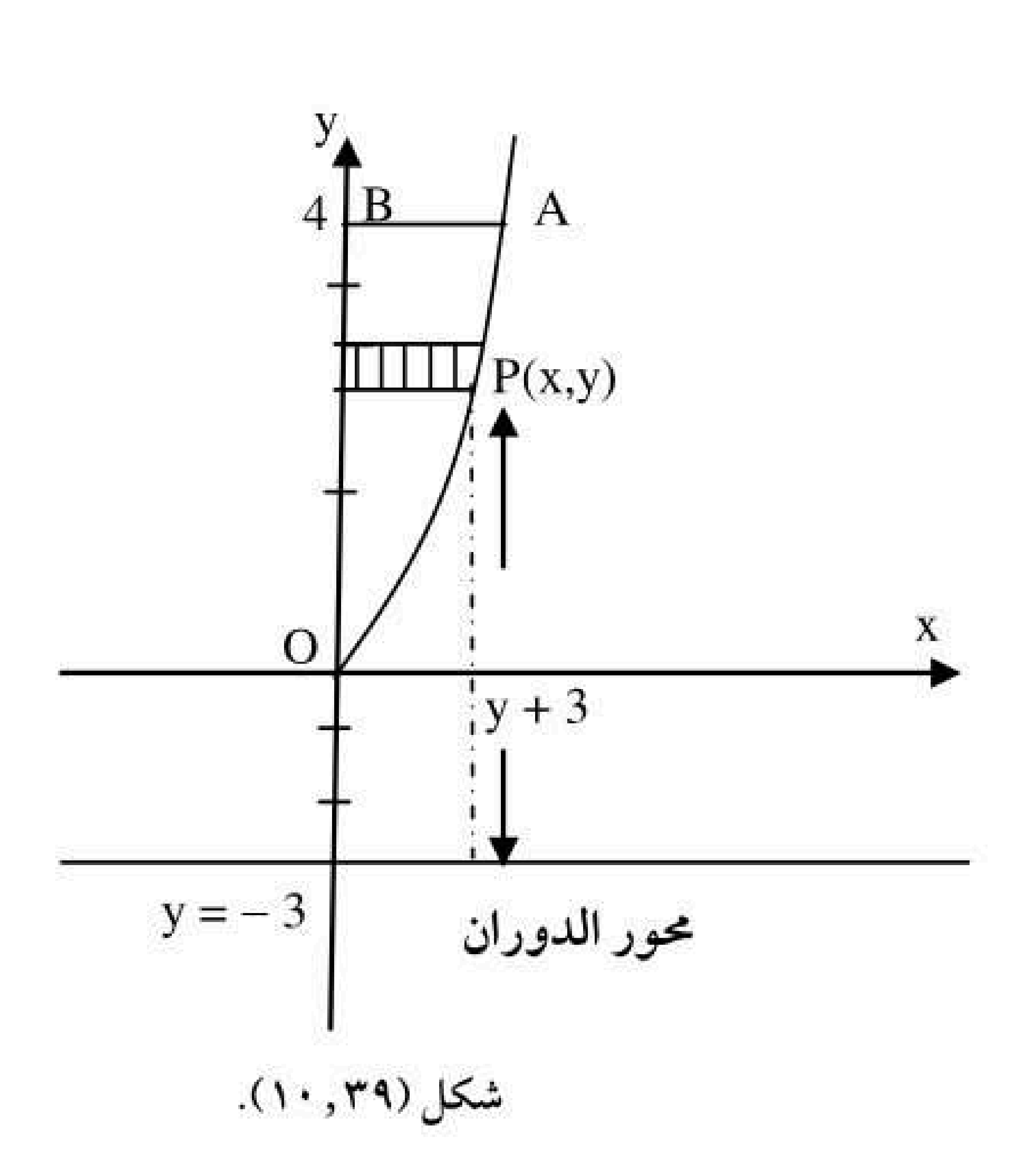
(طريقة الشرائح الأسطوانية)

محور الدوران، هو المستقيم:

y = − 3 الموازي للمحور x، بالتالي فإن:

(أ) ارتفاع الشريحة يساوي: x

(ب) سمكها يساوي: Δy .



شكل (١٠,٣٩).

(ج) طول نصف القطر الوسطي لأسطوانتي

الشريحة يساوي بعد النقطة P(x,y) عن محور الدوران، ويساوي y+3.

(د) حجم الشريحة الأسطوانية التقريبي، هو: $2\pi x\,(y+3)\Delta y$

(هـ) الحجم المطلوب، يساوي:

$$\int_0^4 2\pi x(y+3)dy = \int_0^4 2\pi\left(\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}\right)(y+3)dy = \int_0^4 \pi\left(y^{\frac{3}{2}}+3y^{\frac{1}{2}}\right)dy$$

$$= \pi\left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}+2y^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^4 = \pi\left[\frac{2}{5}(2)^5+2(2)^3\right] = \frac{\pi(2)^4}{5}(4+5) = \frac{144\pi}{5}$$

الفصل الحادي عشر

القطـوع المخروطيـة
CONIC SECTIONS

(١ , ١) القطع المكافئ
The Parabola

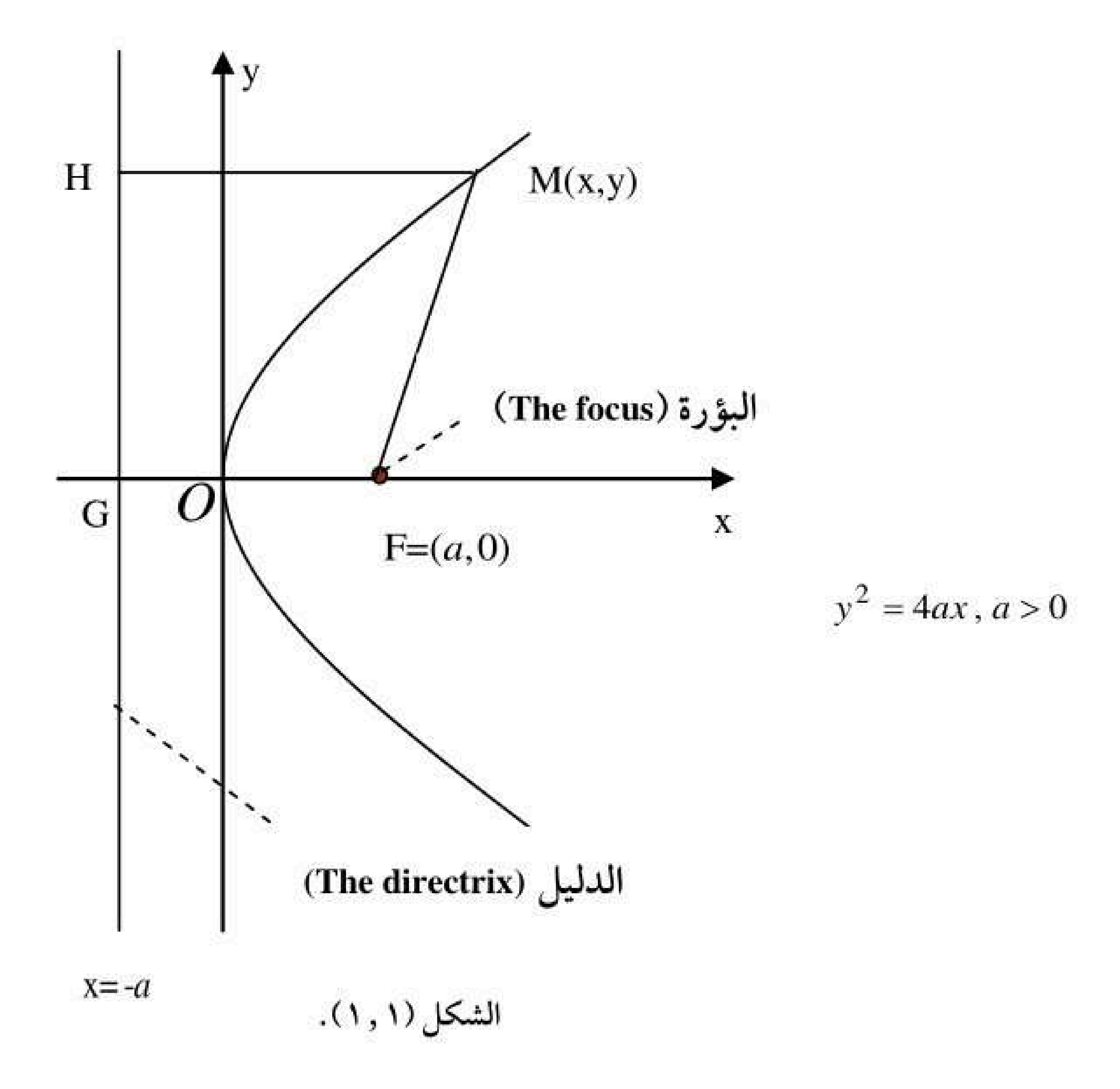
تعريف (١ , ١١)
القطع المكافئ: هو مجموعة النقاط M في المستوى، والتي بعـد كـل منهـا عـن نقطـة ثابتـة F في هـذا المستوى يساوي بعدها عن مستقيم ثابت، شكل (١ , ١١).

نسمي النقطة الثابتة F بالبؤرة (The Foucus) والمستقيم الثابت بالدليل. لـيكن G مسـقط F على الدليل(Directrix)، وليكن $2a$ طول القطعة [FG].

لنختر المحاور الإحداثية بحيث ينطبق المحور السيني على GF وينطبق المحور الصـادي عـلى العمود المنصف للقطعة [FG] شكل (١ , ١١).

لنحدد إحداثيات النقطتين: F,M كما يلي:

$$F = (a,0),\ M = (x,y)$$



$y^2 = 4ax \, , \, a > 0$

الشكل (١ ,١).

معادلة القطع المكافئ (The equation of the parabola)

من الملاحظ في الشكل (١ ,١١) ، أن:

$$\begin{Bmatrix} |FM|^2 = (a-x)^2 + y^2 \\ |HM| = x + a \end{Bmatrix} \qquad (١١ ,١)$$

حيث H مسقط M على الدليل. وأن معادلة الدليل هي: $x = -a$

لاحظ أيضا (حسب تعريف القطع) أن:

$$|FM| = |HM| \Longrightarrow |FM|^2 = |HM|^2 \qquad (١١ ,٢)$$

بالتعويض من (١ ,١١) في (٢ ,١١) نحصل على المساواة:

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

ومنه: $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$ أو:

(١١,٣)

$$y^2 = 4ax \ , \ a > 0$$

وهذه معادلة القطع المكافئ بشكله القياسي.

بيان القطع المكافئ (المنحني البياني)

التماثل :من المعادلة (٣ , ١١) يتضح أن القطع المكافئ متماثل بالنسبة للمحور السيني.

المجال والمدى :نجد من (٣ , ١١):

(١١,٤)

$$y = \pm 2\sqrt{a}\sqrt{x}$$

فمجال القطع هو الفترة: $[0,\infty)$

ويظهر من المعادلة (٤ , ١١)، أن مداه هو: IR

دراسة تغيرات المنحنى

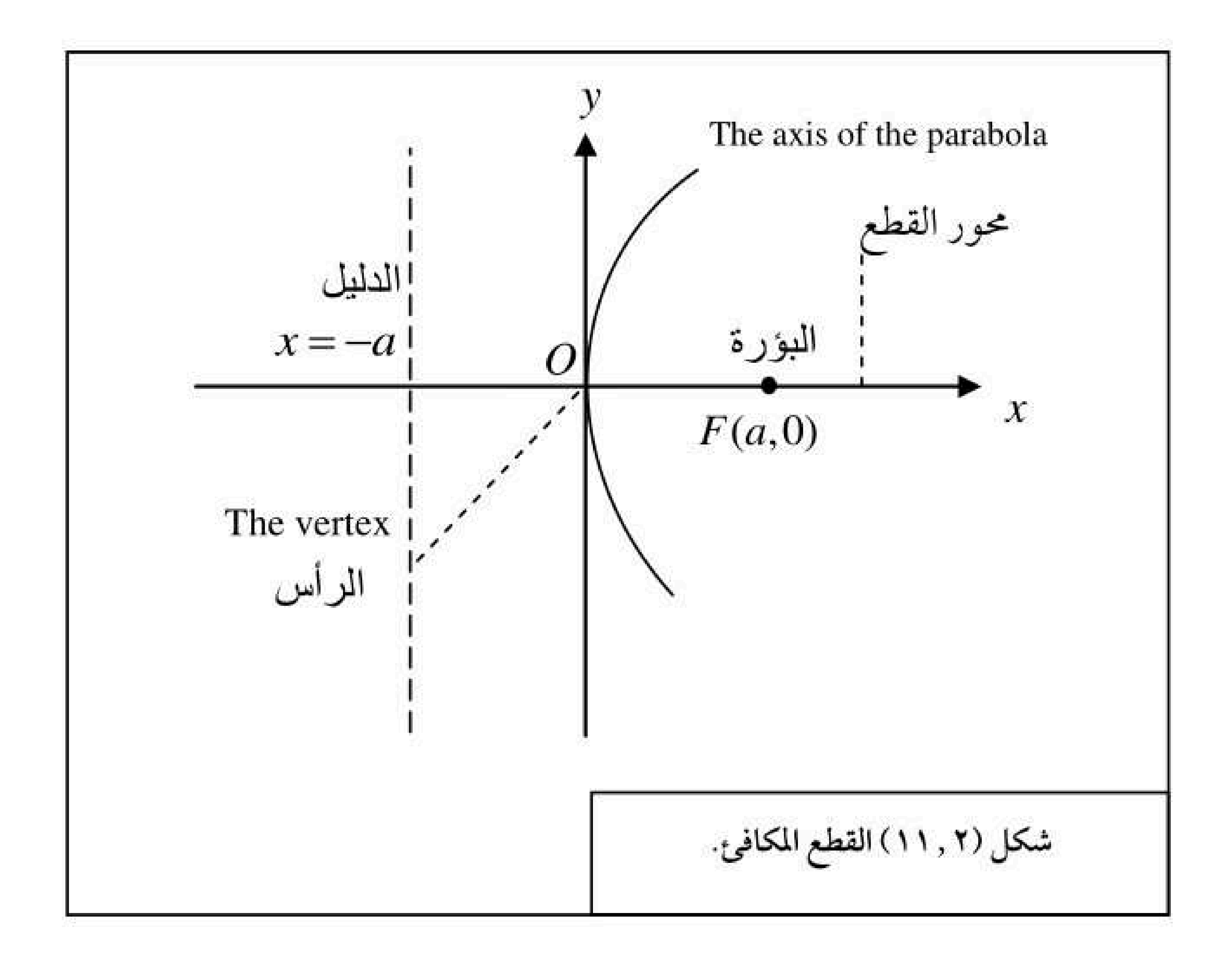
من المعادلة (٤ , ١١)، نجد أن القسم الواقع في الربع الأول تمثله المعادلة:

(١١,٥)

$$y = 2\sqrt{a}\sqrt{x}$$

وهذه دالة متصلة على الفترة: $[0,\infty)$. يقطع هذا الجزء المحور السيني عند نقطة الأصل والتي نسميها رأس القطع. يمكن الاستدلال من المشتقة الأولى والمشتقة الثانية للدالة الممثلة في المعادلة (٥ , ١١) أن الدالة متزايدة على مجالها ومحدبة على الفترة $(0,\infty)$.

برسم هذا الجزء، ثم بإجراء التماثل حول المحور السيني نحصل على بيان القطع، شكل (٢ , ١١). لاحظ أن المحور الصادي يمس القطع عند رأسه.



شكل (٢ , ١١) القطع المكافئ.

الأشكال الأخرى للقطع المكافئ

لو أعدنا الحسابات نفسها، لكن باختيار F على الجهة السالبة للمحور السيني تارة وتارة أخرى على جهتي المحور الصادي لوجدنا معادلات مشابهة لما وجدناه في المعادلة (٣ , ١١). بشكل عام، المعادلة:

$$y^2 = 4ax \ , \ a>0$$

تمثل قطعا مكافئا رأسه نقطة الأصل، متماثلا بالنسبة للمحور السيني فتحته الى الجهة اليمنى شكل (٣ , ١١) (أ).

لاحظ أن: $F = (a,0)$ وأن معادلة الدليل هي: $x = - a$. والمعادلة:

$$y^2 = -4ax \ , \ a>0$$

تمثل قطعا مكافئا رأسه نقطة الأصل، متماثلا بالنسبة للمحور السيني فتحته إلى الجهة اليسرى شكل (٣ , ١١) (ب). لاحظ أن: $F= (-a,0)$ وأن معادلة الدليل هي: $x = a$.

والمعادلة:

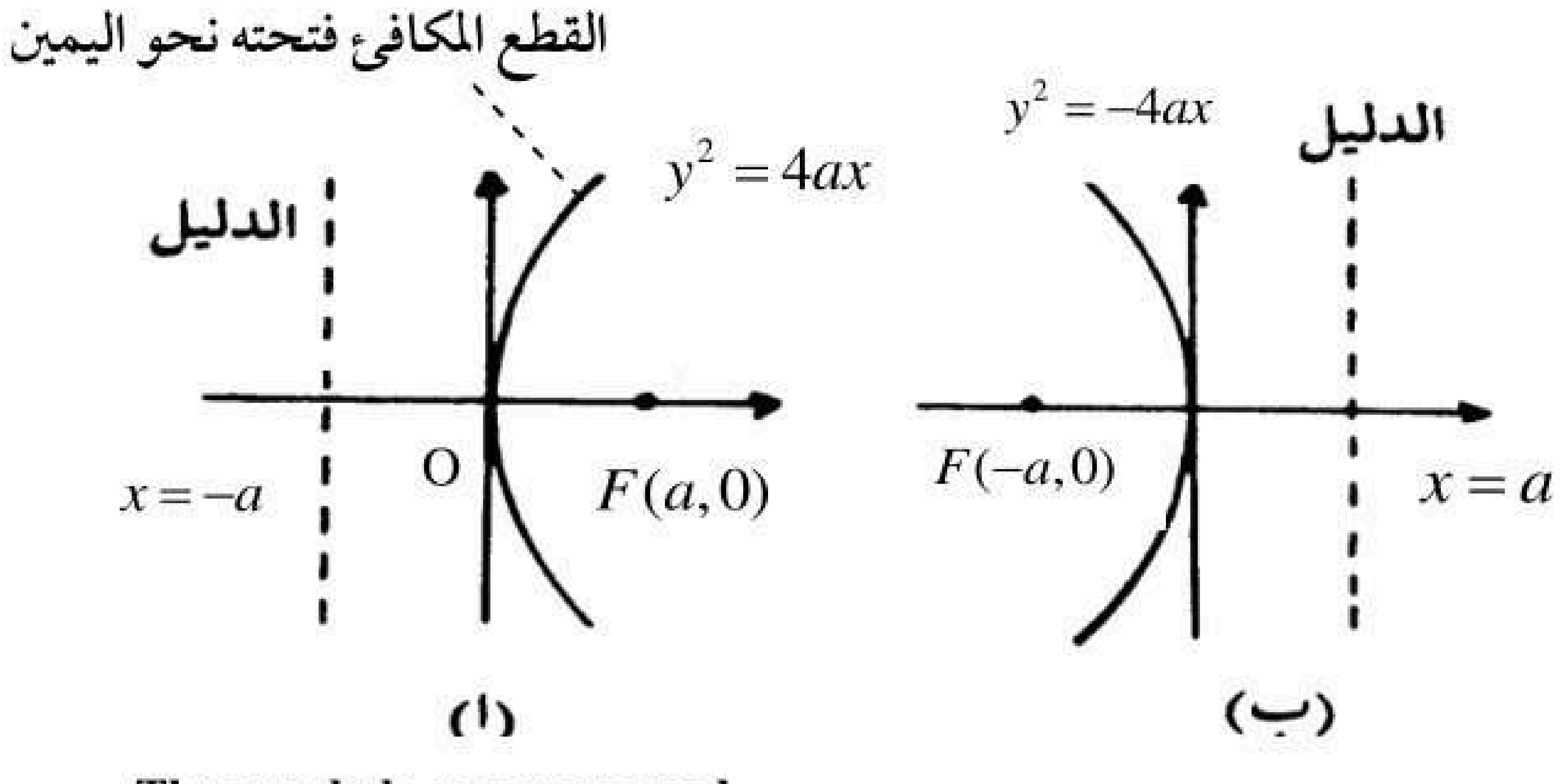
$$x^2 = 4ay \ , \ a>0$$

تمثل قطعـــا مكافئا رأســـه نقطة الأصل، متماثلا بالنسبة للمحور الصادي فتحتـه إلى الجهـــة العليـا شكـــل (٣ , ١١) (جـ). لاحظ أن: $F=(0, a)$ وأن معادلة الدليل هي: $y=-a$.
والمعادلة:

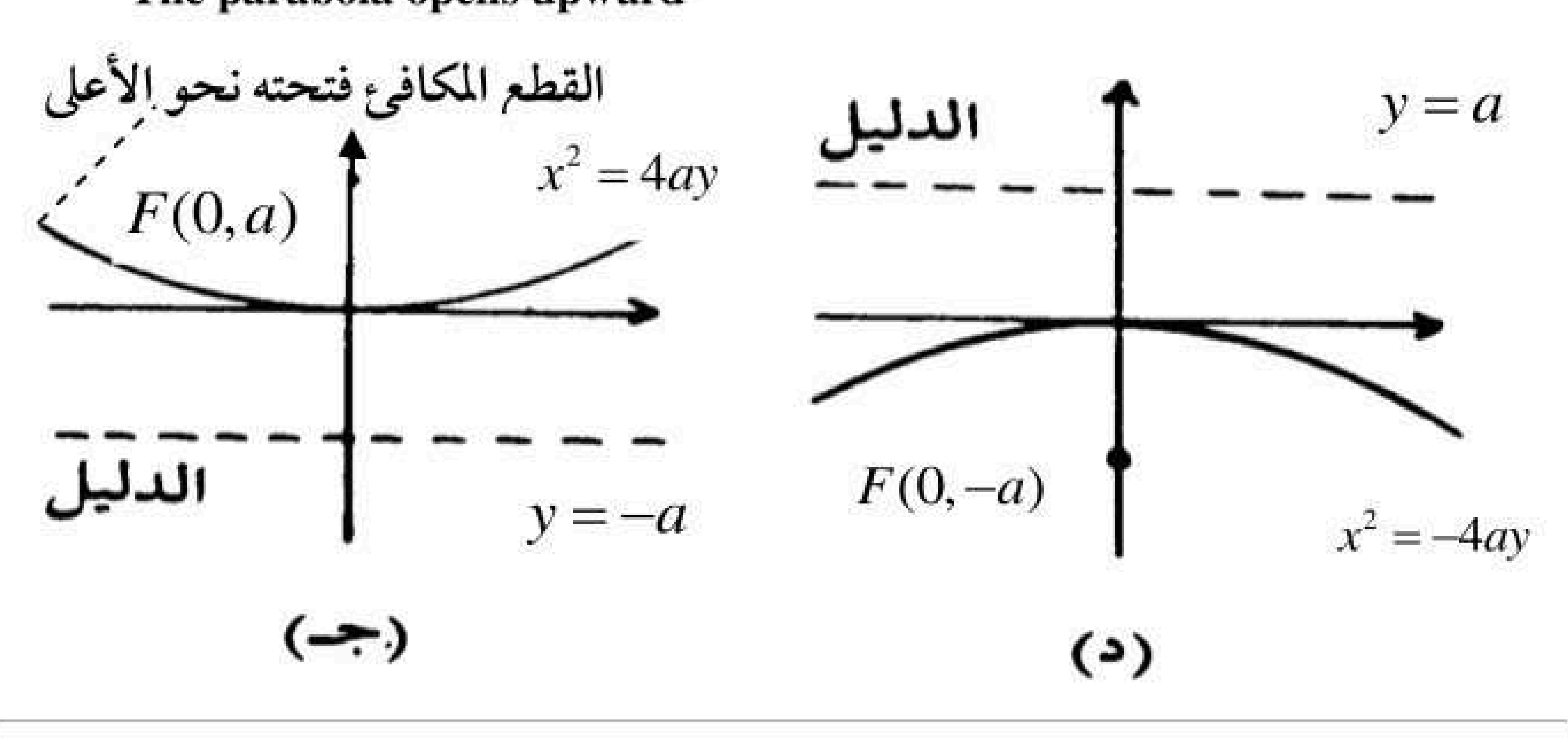
$$\boxed{x^2 = -4ay\ ,\ a>0}$$

تمثل قطـــعا مكافئـــا رأسه نقطة الأصل، متماثلا بالنسبة للمحور الصادي فتحته إلى الجهـــة السـفلى شكـــل (٣ , ١١) (د). لاحظ أن: $F=(0,-a)$ وأن معادلة الدليل هي: $y = a$.

The parabola opens to the right



The parabola opens upward



شكل (٣ , ١١).

مثـــال (١ , ١١)

حدد عناصر كل من القطوع التالية:

١) $y^2 = -6x$ ٣) $y^2 = 3x$

٢) $x^2 = 4y$ ٤) $x^2 = -2y$

الحــــل

١) القطع متماثل بالنسبة للمحور السيني، فتحته الى الجهة اليسرى ورأسه نقطة الأصل. بؤرته ودليله: $4a = 6 \Leftarrow a = \frac{3}{2}$

إذن: $F = (-a,0) = (-\frac{3}{2},0)$ ، ومعادلة دليله: $x = a = \frac{3}{2}$

يشبه شكل (٣ , ١١) (ب).

٢) القطع متماثل بالنسبة للمحور الصادي، فتحته نحو الأعلى ورأسه نقطة الأصل. بؤرته ودليله: $4a=4 \Leftarrow a=1$

إذن: $F = (0,a) = (0,1)$ ومعادلة دليله: $y = -a = -1$ -

يشبه شكل (٣ , ١١) (جـ).

٣) القطع متماثل بالنسبة للمحور السيني، فتحتـه الى الجهـة اليمنـى ورأسـه نقطـة الأصـل. بؤرتـه ودليله: $4a = 3 \Leftarrow a = \frac{3}{4}$

إذن: $F = (a,0) = (\frac{3}{4},0)$ ، ومعادلة دليله: $x = -a = -\frac{3}{4}$

يشبه شكل (٣ , ١١) (أ).

٤) القطع متماثل بالنسبة للمحور الصادي، وفتحته نحو الجهة السفلى ورأسـه نقطـة الأصـل. بؤرته ودليله: $4a = 2 \Leftarrow a = \frac{1}{2}$

إذن: $F = (0,-a) = (0,-\frac{1}{2})$ ، ومعادلة دليله: $y = a = \frac{1}{2}$

يشبه شكل (٣ , ١١) (د).

ملحوظـــة (١ , ١١)

إن النقطة M في المستوى يعبر عنها بالصورة:

M(x,y) أو M=(x,y) يعني أن: M=(x,y)⇔M(x,y) وهذا ما نستخدمه فيما يلي.

(٢ , ١١) القطع الناقص

The Ellipse

تعريف (٢ , ١١)

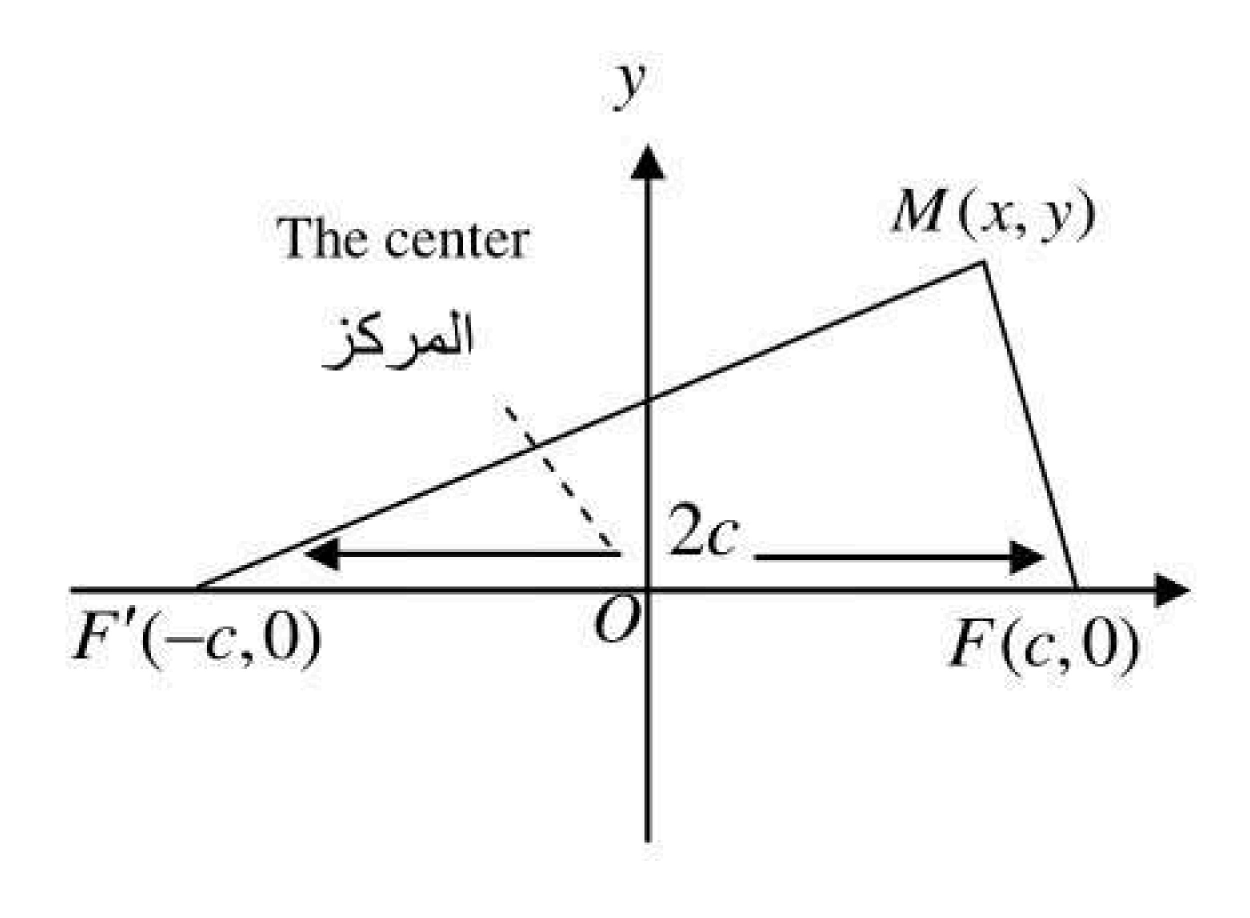
القطع الناقص: هو مجموعة النقاط M في المستوي، والتي مجموع بعدي كل منها عن نقطتـين ثـابتتين F′,F في هذا المستوي يساوي بعدا ثابتا مقداره 2a ، شكل (٤ , ١١).

من التعريف نجد أن:

$$|F'M| + |FM| = 2a\ ,\ a > 0 \qquad (١١ , ٦)$$

تسمى النقطتان F′,F **بالبؤرتين**، والمستقيم F′F **بالخط البؤري**، وطول القطعة [F′F] **بالبعـد البؤري**، لنرمز لهذا البعد الثابت

بالرمز 2c ، فنجد: $|F'F| = 2c\ ,\ c > 0$



شكل (٤ , ١١).

لنختر المحاور الإحداثية بحيث ينطبق المحور السيني على الخط البـؤري، وينطبـق المحـور الصـادي على العمود المنصف للقطعة [F′ F].

لنحدد إحداثيات النقاط F′,F,M كما يلي:

$$F'(-c,0)\ ,\ F(c,0)\ ,\ M(x,y)$$

من الملاحظ في المثلث F'MF أن:

$$|F'M| + |FM| = 2a > 2c \Leftrightarrow a > c \quad (١١,٧)$$

(مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث).

معادلة القطع الناقص (The equation of an ellipse)

من الملاحظ في الشكل (١١,٤) أن:

$$\begin{Bmatrix} |F'M|^2 = (x+c)^2 + y^2 \\ |FM|^2 = (c-x)^2 + y^2 \end{Bmatrix} \quad (١١,٨)$$

بالطرح نجد:

$$|F'M|^2 - |FM|^2 = 4xc \quad (١١,٩)$$

ومنه:

$$(|F'M| + |FM|)\,(|F'M| - |FM|) = 4xc \quad (١١,١٠)$$

وبالتعويض من (١١,٦) في المساواة السابقة نحصل على المساواة:

$$2a\,(|F'M| - |FM|) = 4xc \quad (١١,١١)$$

أو:

$$|F'M| - |FM| = \frac{2xc}{a} \quad (١١,١٢)$$

لكن من المعادلة (١١,٦): $|F'M| + |FM| = 2a$

بجمع المعادلتين السابقتين وطرحهما والتقسيم على 2 نحصل على المعادلتين:

$$\begin{cases} |F'M| = a + \dfrac{cx}{a} \\ |FM| = a - \dfrac{c}{a}x \end{cases} \quad (١١,١٣)$$

من المعادلة (١١,٨) و (١١,١٣)، نجد أن:

$$\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = (x+c)^2 + y^2 \quad (١١,١٤)$$

وبالفك والاختصار نحصل على المساواة:

$$x^2(a^2 - c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (١١,١٥)$$

وبالتقسيم على $a^2(a^2-c^2)$ نحصل على المساواة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \qquad (١١,١٦)$$

وحسب (١١,٧)، فإن: $a^2-c^2>0$

وهذا يسمح لنا أن نضع:

$$a^2-c^2=b^2 \Leftrightarrow a^2-b^2=c^2 \ , a>b>0 \qquad (١١,١٧)$$

ومنه نستطيع إيجاد c إذا علمنا a,b. أو إيجاد b إذا علمنا a, c.

بالتعويض من (١٧, ١١) في المعادلة (١٦, ١١)، نحصل على المساواة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (١١,١٨)$$

لاحظ في الشكل القياسي السابق للقطع أن $a>b$، وأن البؤرتين تقعان على المحور السيني.

بيان القطع الناقص (المنحني البياني)

التماثل

يتضح من المعادلة (١٨, ١١) أن القطع متماثل بالنسبة للمحور السيني والصادي. بالتالي هو متماثل بالنسبة لنقطة الأصل. إذن، يكفي رسم الجزء الواقع في الربع الأول ثم بإجراء التماثلات المطلوبة نحصل على القطع بأكمله.

المجال والمدى: من المعادلة (١٨, ١١) نستنتج أن:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad (١١,١٩)$$

فمجال القطع هو الفترة: $[-a,a]$

وبحساب x بدلالة y نجد أن مداه هو: $[-b,b]$

التناقص والتحدب

من المعادلة (١٩, ١١)، نجد أن القسم الواقع في الربع الأول يمثل بالمعادلة:

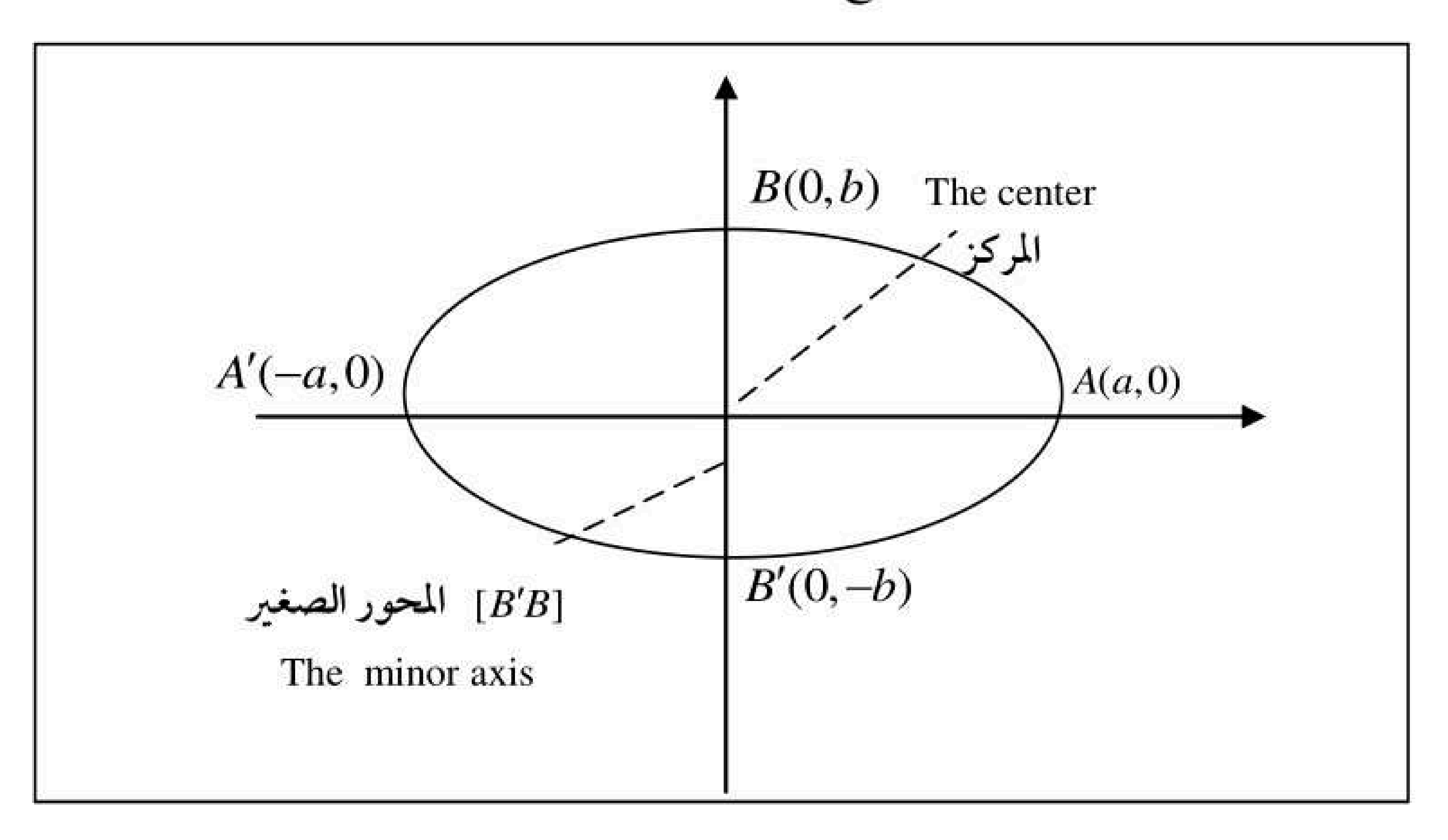
$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, a\ge x\ge 0 \qquad (١١,٢٠)$$

وهذه دالة متصلة على الفترة: $[0,a]$

يقطع هذا الجزء المحورين الإحداثيين عند النقطتين:

A = (a , 0) , B = (0 , b)

يمكن الاستدلال من المشتقة الأولى للدالة الممثلة في (٢٠ , ١١) أنها متناقصة على مجالها. كما يمكن الاستدلال من المشتقة الثانية أن الدالة محدبة على الفترة $(0,a)$. برسم هذا الجزء ثم بإجراء التماثلات الممكنة نحصل على بيان القطع شكل (٥ , ١١).



شكل (٥ , ١١). القطع الناقص.

لاحظ أن القطع يمس المستقيمات الأربعة:

x = a , x = -a , y = b , y = -b ، وأن x=a مستقيم مماس عمودي (Vertical tangent line) للقطع، بالمثل x= − a .

نسمي النقطتين A',A **برأسي القطع**(Vertices)، كما نسمي القطعة [A'A] **بالمحور الكبير** (The major axis) **للقطع**. لاحظ أن البؤرتين تقعان دوما على المحور الكبير للقطع الناقص.

الأشكال الأخرى للقطع الناقص

لو أعدنا الحسابات نفسها لكن باختيار F',F على المحور الصادي لوجدنا المعادلة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, b>a$$

بشكل عام، المعادلة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

تمثل قطعا ناقصا بؤرتاه على المحور السيني إذا كان a>b، وتتعين c بالمعادلة: $c=\sqrt{a^2-b^2}$ [شكل (٦ , ١١) مثال (٢ , ١١)].

تمثل قطعا ناقصا بؤرتاه على المحور الصادي إذا كان a<b، وتتعين c بالمعادلة: $c=\sqrt{b^2-a^2}$ [شكل (٧ , ١١) مثال (٣ , ١١)].

مثـــال (٢ , ١١)

ارسم القطع الناقص: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ محددا جميع عناصره.

الحـــل

من الملاحظ أن: $a^2=25 \Leftrightarrow a=5$

$b^2=16 \Leftrightarrow b=4$

$c^2=a^2-b^2=9 \Leftrightarrow c=3$

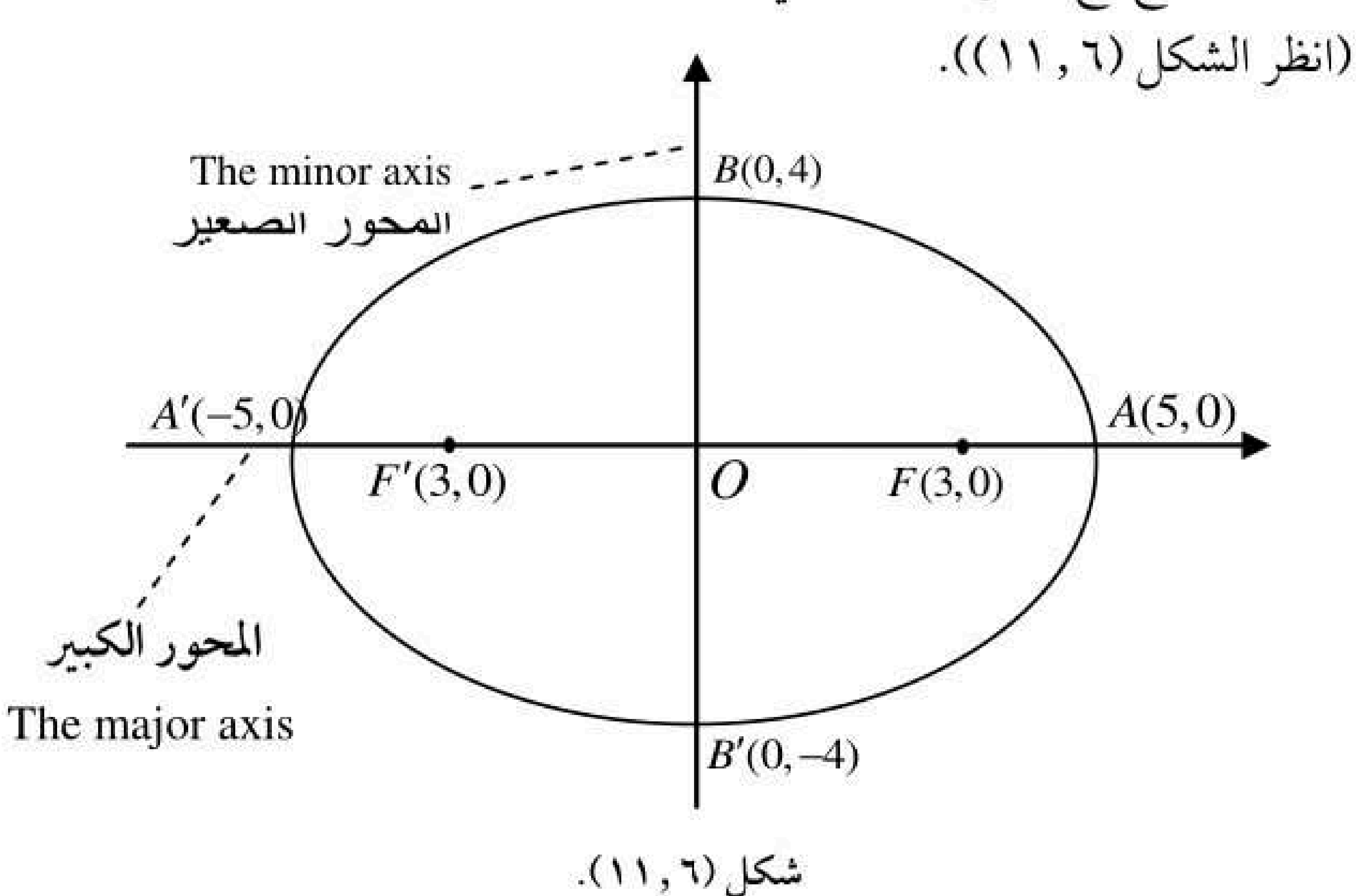
لاحظ أن البؤرتين تقعان على المحور السيني: a>b.

بؤرتا القطع: $F'=(-3,0)\ ,\ F=(3,0)$

رأسا القطع: $A'=(-5,0)\ ,\ A=(5,0)$

نقطتا التقاطع مع المحور الصـــادي: $B'=(0,-4)\ ,\ B=(0,4)$

(انظر الشكل (٦ , ١١)).



شكل (٦ , ١١).

مثـــال (٣,٣)

ارسم القطع الناقص: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ محددا جميع عناصره.

من الملاحظ أن: $a^2=9 \Leftrightarrow a=3$

$$b^2=25 \Leftrightarrow b=5$$
$$c^2=a^2-b^2=16 \Leftrightarrow c=4$$

لاحظ أن a<b، وأن البؤرتين تقعان على المحور الصادي.

بؤرتا القطع(the foci): $F'=(0,-4)$, $F=(0,4)$

طرفا المحور الكبير(رأسا القطع):

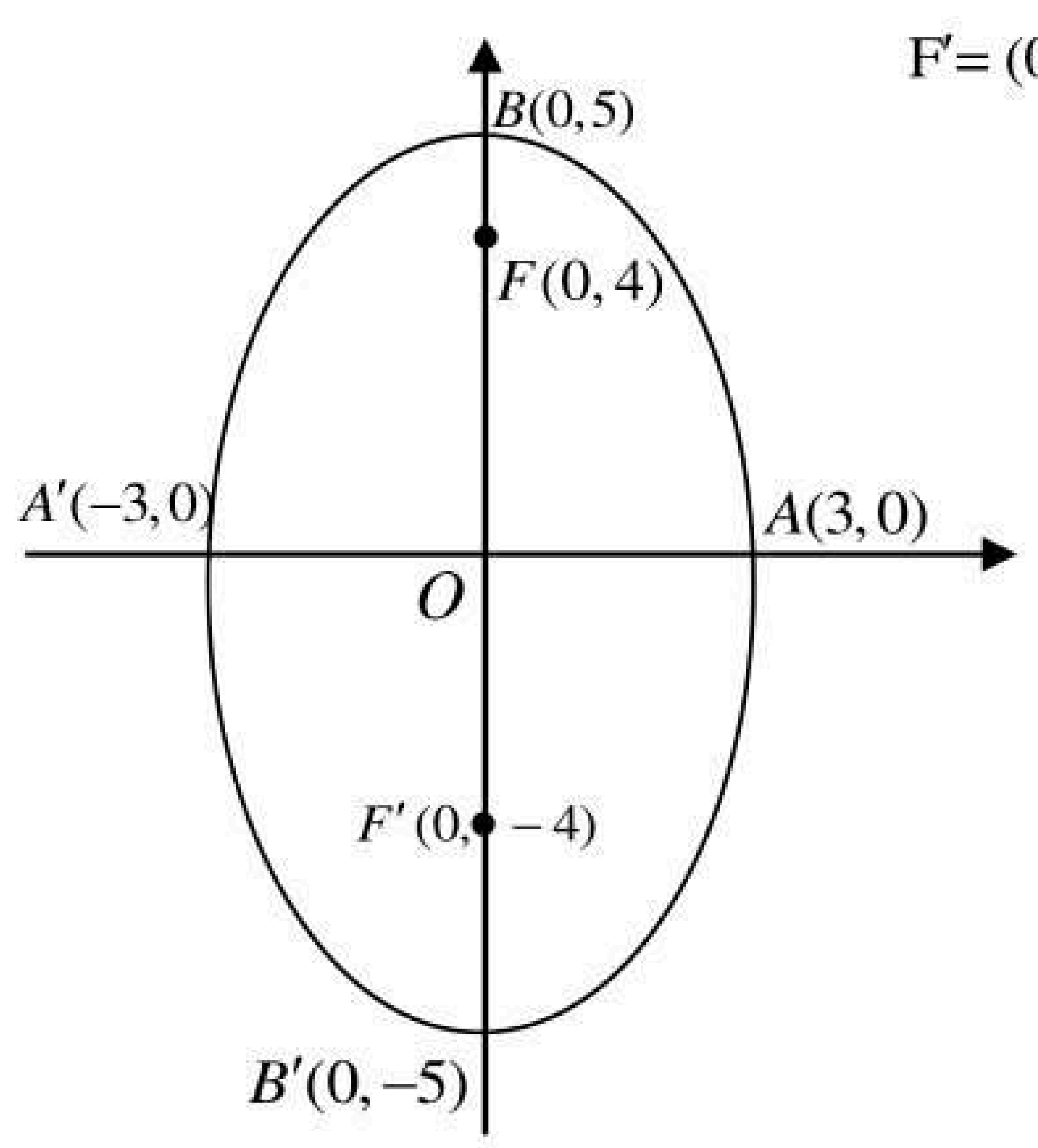
$B'=(0,-5)$, $B=(0,5)$

طرفا المحور الصغير

: (the endpoints of the minor axis)

$A'=(-3,0)$, $A=(3,0)$

(انظر الشكل (٧,١١)).



شكل (٧,١١).

(٣,١١) القطع الزائد
The Hyperbola

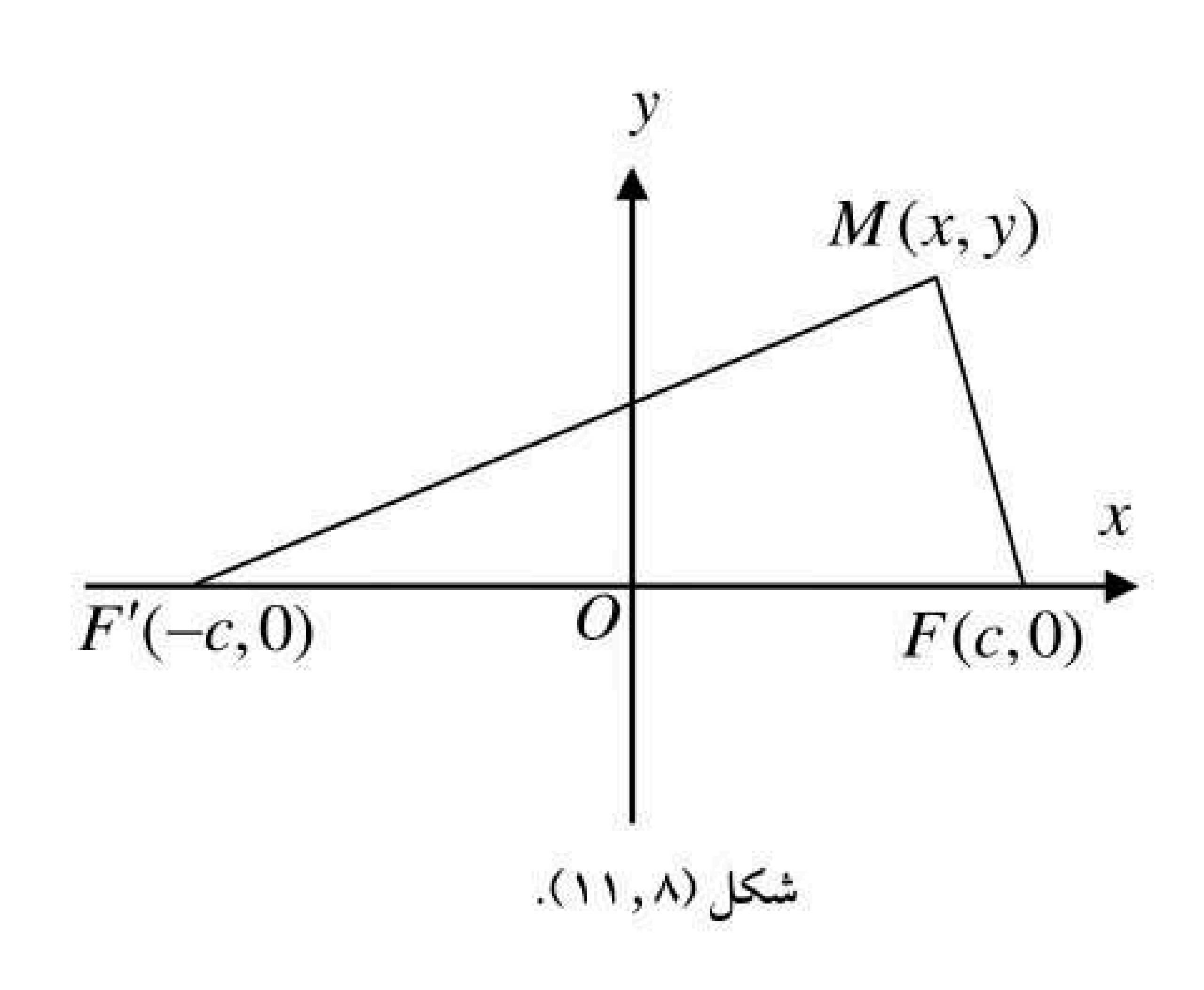
تعريف (٣,١١)

القطع الزائد: هو مجموعة النقاط M في المستوي، والتي الفرق بين بعدي كل منها عن نقطتين ثـابتتين F′,F في هذا المستوي يساوي بعدا ثابتا مقداره 2a ، انظر الشكل (٨,١١).

من التعريف نجد أن:

$$||F'M|-|FM||=2a \Leftrightarrow |F'M|-|FM|=\pm 2a\ ,\ a>0 \qquad (١١,٢١)$$

هذا الفرق موجب من أجـل نقـاط القطـع المحققـة للشـــرط x>0، سالب مـن أجـل النقـاط المحققـة للشرط x<0
انظر الشكل (٨ , ١١).



شكل (٨ , ١١).

لاحظ في المثلث F′MF أن:

$$||F'M| - |FM|| = 2a < 2c \Leftrightarrow a < c \qquad (١١ , ٢٢)$$

(القيمة المطلقة للفرق بين طولي أي ضلعين في مثلث أصغر من طول الضلع الثالث).

معادلة القطع الزائد (the equation of the hyperbola)

بالأسلوب نفسه المتبع في القطع الناقص نحصل على المعادلة:

$$(|F'M| + |FM|)\,(|F'M| - |FM|) = 4xc \qquad (١١ , ٢٣)$$

وبالتعويض من (٢١ , ١١) نجد:

$$\pm 2a(|F'M| + |FM|) = 4xc \qquad (١١ , ٢٤)$$

أو:

$$|F'M| + |FM| = \pm \frac{2xc}{a} \qquad (١١ , ٢٥)$$

لكن من المعادلة (٢١ , ١١): $|F'M| - |FM| = \pm 2a$

بجمع المعادلتين (٢١ , ١١)، (٢٥ , ١١) والتقسيم على 2 نحصل على المساواة:

$$|F'M| = \pm\left(a + \frac{cx}{a}\right) \qquad (١١ , ٢٦)$$

وبالتعويض عن قيمة |F'M| من المعادلة (٨ , ١١) نجد:

$$(a+\frac{cx}{a})^2 = (x+c)^2 + y^2$$

ومنها نجد حسبما سبق ذكره في القطع الناقص:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1} \qquad (١١ , ٢٧)$$

ومن المعادلة (٢٢ , ١١)، فإن: $a^2-c^2<0$

وهذا يسمح لنا أن نضع:

$$\boxed{a^2-c^2 = -b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2} \qquad (١١ , ٢٨)$$

ومنه نستطيع إيجاد c إذا علمنا a,b، أو b إذا علمنا a,c.

بالاستفادة من (٢٨ , ١١) فإن المعادلة (٢٧ , ١١) تصبح على الشكل:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (١١ , ٢٩)$$

لاحظ أن البؤرتين (the foci) تقعان على المحور السيني.

بيان القطع الزائد (المنحني البياني)

التماثل

يتضح من المعادلة (٢٩ , ١١) أن القطع متماثل بالنسبة للمحور السيني والصادي أيضا، وبالتالي فهو متماثل بالنسبة لنقطة الأصل. إذن، يكفي رسم الجزء الواقع في الربع الأول ثم بإجراء التماثلات المطلوبة نحصل على القطع بأكمله.

المجال والمدى: من المعادلة (٢٩ , ١١) نستنتج أن:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \qquad (١١ , ٣٠)$$

فمجال القطع هو الفترة: $IR - (-a,a)$

وبحساب x بدلالة y نجد أن مداه هو: IR

التزايد والتحدب

من المعادلة (٣٠ , ١١)، نجد أن معادلة جزء القطع الواقع في الربع الأول هي:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,, x\ge a \qquad (١١ , ٣١)$$

وهذه دالة متصلة على الفترة: $[a,\infty)$.

يقطع هذا الجزء المحور السيني في النقطة $A=(a,0)$

يمكن الاستدلال من المشتقة الأولى والثانية على أن الدالة الممثلة في (١١,٣١) متزايدة عـلى مجالهـا. ومحدبة على الفترة (a,∞) .

المستقيمات المقاربة للقطع

يقبل القطع الممثل في المعادلة (١١,٢٩) المستقيمين المقاربين:

$$\text{(the asymptotes)} \quad y = \pm\frac{b}{a}x$$

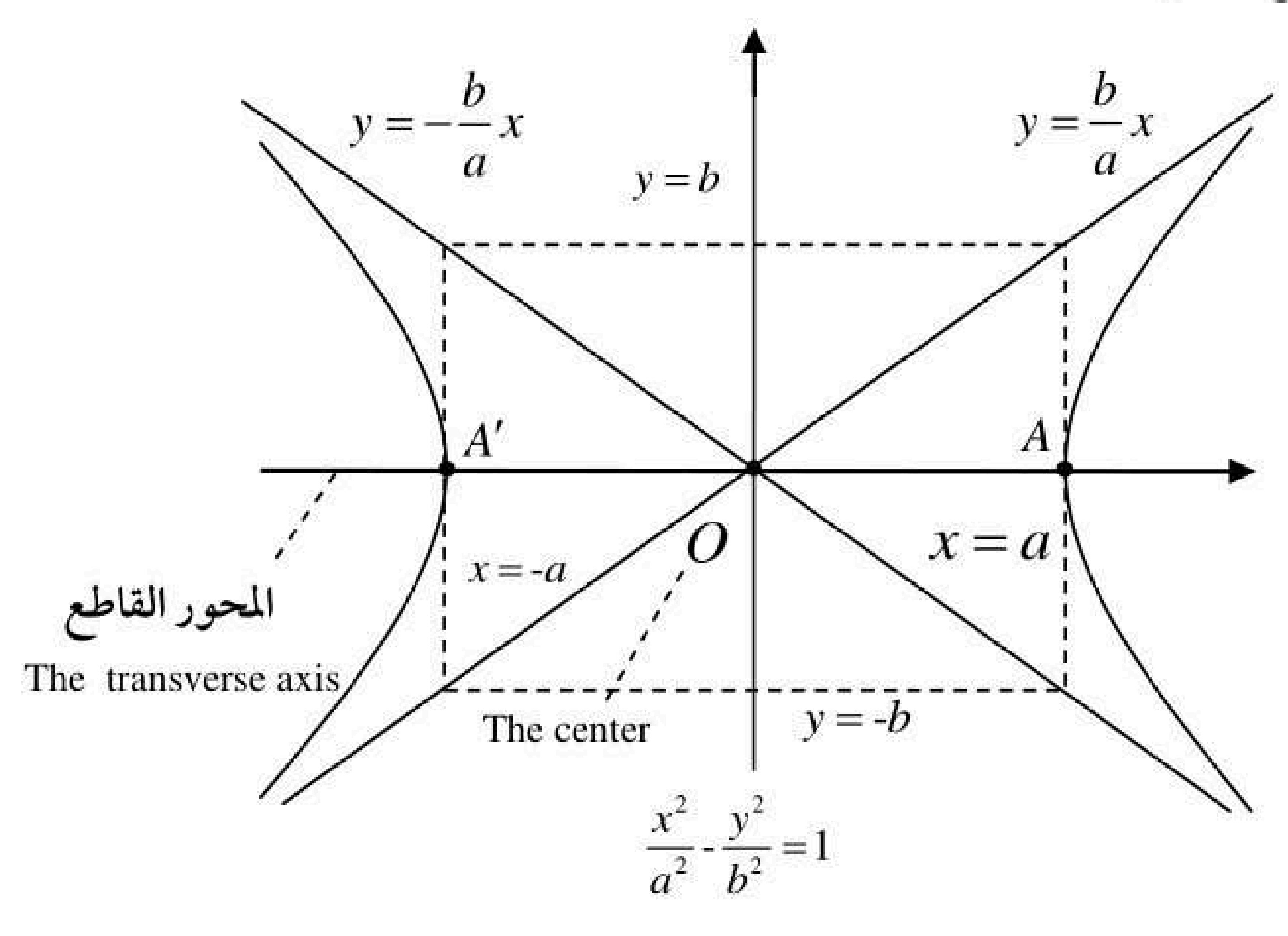
رسم القطع

نرسم المستقيمين المقاربين، وذلك برسم المستطيل المحدد بالمستقيمات:

$$y = -b, y = b, x = -a, x = a$$

ثم نرسم قطري المستطيل مع ملاحظة أن استقامتي المستقيمين المقاربين هي استقامتا قطـري المستطيل نفسيهما.

نرسم بعد ذلك جزء القطع الواقع في الربع الأول، ثم نجري التماثلات المطلوبة فنحصل على القطع، شكل (١١,٩).



شكل (١١,٩). القطع الزائد.

لاحظ أن القطع يمس المستقيمين $x = a, x = -a$ عند النقطتين A′,A. نسمي هاتين النقطتين برأسي القطع. لاحظ أيضا أن القطع لا يقطع المحور الصادي مطلقا.

الأشكال الأخرى للقطع الزائد

لو أعدنا الحسابات نفسها ولكن باختيار F′, F على المحور الصادي لوجدنا المعادلة:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

ولحصلنا على المستقيمين المقاربين: $y=\pm\frac{b}{a}x$

بشكل عام، المعادلة:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1}$$

تمثل قطعا زائدا بؤرتاه على المحور السيني إذا أخذنا الإشارة الموجبة للطرف الأيمن، شكل (١١, ٩).

تمثل قطعا زائدا بؤرتاه على المحور الصادي إذا أخذنا الإشارة السالبة للطرف الأيمن، شكل (١١, ١٠) مثال (١١, ٤)).

وتتعين c في كلتا الحالتين بالمعادلة: $c=\sqrt{a^2+b^2}$

مثـــال (١١, ٤)

ارسم القطع الزائد: $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$ محددا جميع عناصره.

الحـــل

من الملاحظ أن معادلة القطع تكتب على الشكل:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$$

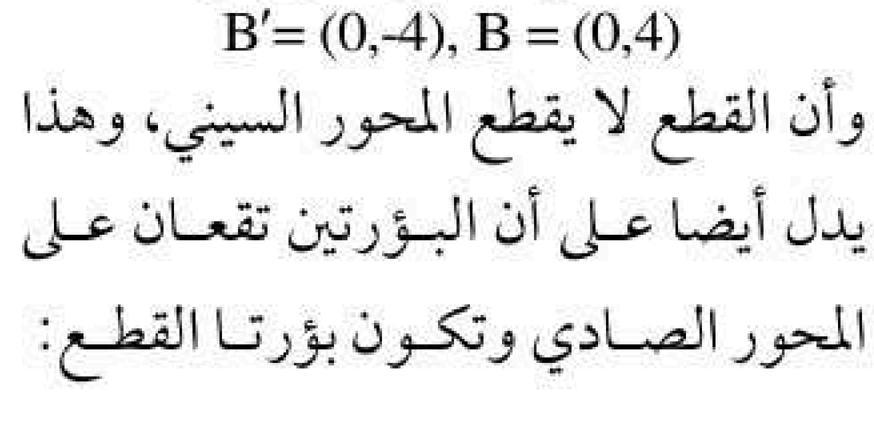
وهذا يدل على أن بؤرتي القطع تقعان على المحور الصادي.

من جهة أخرى:

$$a^2=9\Leftrightarrow a=3$$
$$b^2=16\Leftrightarrow b=4$$
$$c^2=16+9\Leftrightarrow c=5$$

لاحظ أن نقطتي تقاطع القطع مع المحور الصادي (رأسا القطع) هما:

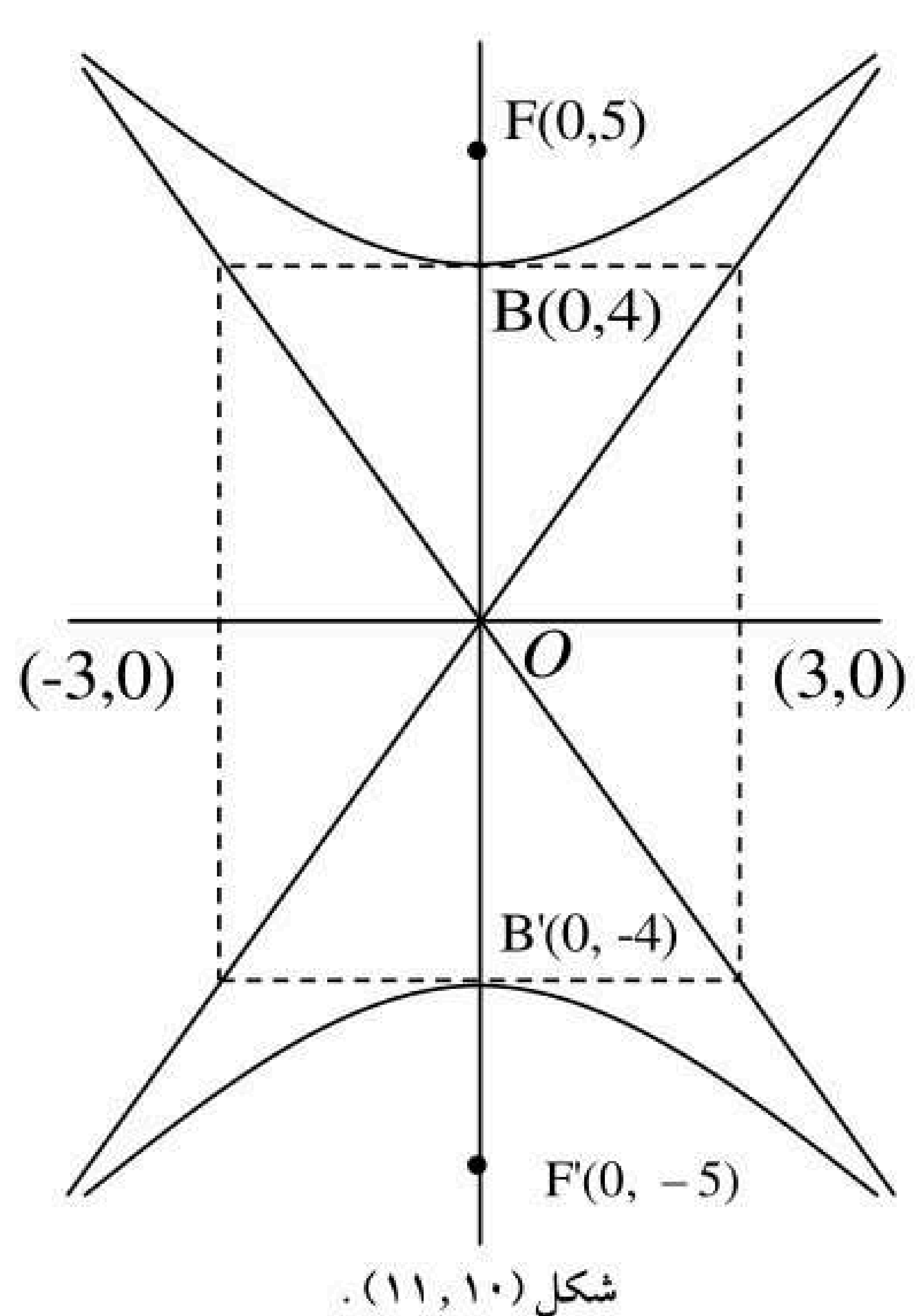
$$B' = (0,-4),\ B = (0,4)$$



وأن القطع لا يقطع المحور السيني، وهذا يدل أيضا عـلى أن البـؤرتين تقعـان عـلى المحور الصـادي وتكـون بؤرتـا القطـع:

$$F' = (0,-5),\ F = (0,5)$$

المستقيمان المقاربان: لنستبدل في معادلة القطع وفي طرفها الثاني الواحد بالصفر فنجد: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 0$



شكل (١٠ , ١١).

ومنه نجد:

$$\boxed{y = \pm \frac{4}{3} x}$$ معادلتي المستقيمين المقاربين.

بالتالي يظهر في الشكل (١٠ , ١١) بيان هذا القطع.

مثـــــــال (٥ , ١١)

ارسم القطع الزائد: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ محددا جميع عناصره.

الحـــــل

من الملاحظ أن:

$$a = 4 \Leftarrow a^2 = 16$$
$$b = 3 \Leftarrow b^2 = 9$$
$$c = 5 \Leftarrow c^2 = 16 + 9$$

لاحظ أن نقطتي تقاطع القطع مع المحور السيني (رأسا القطع)

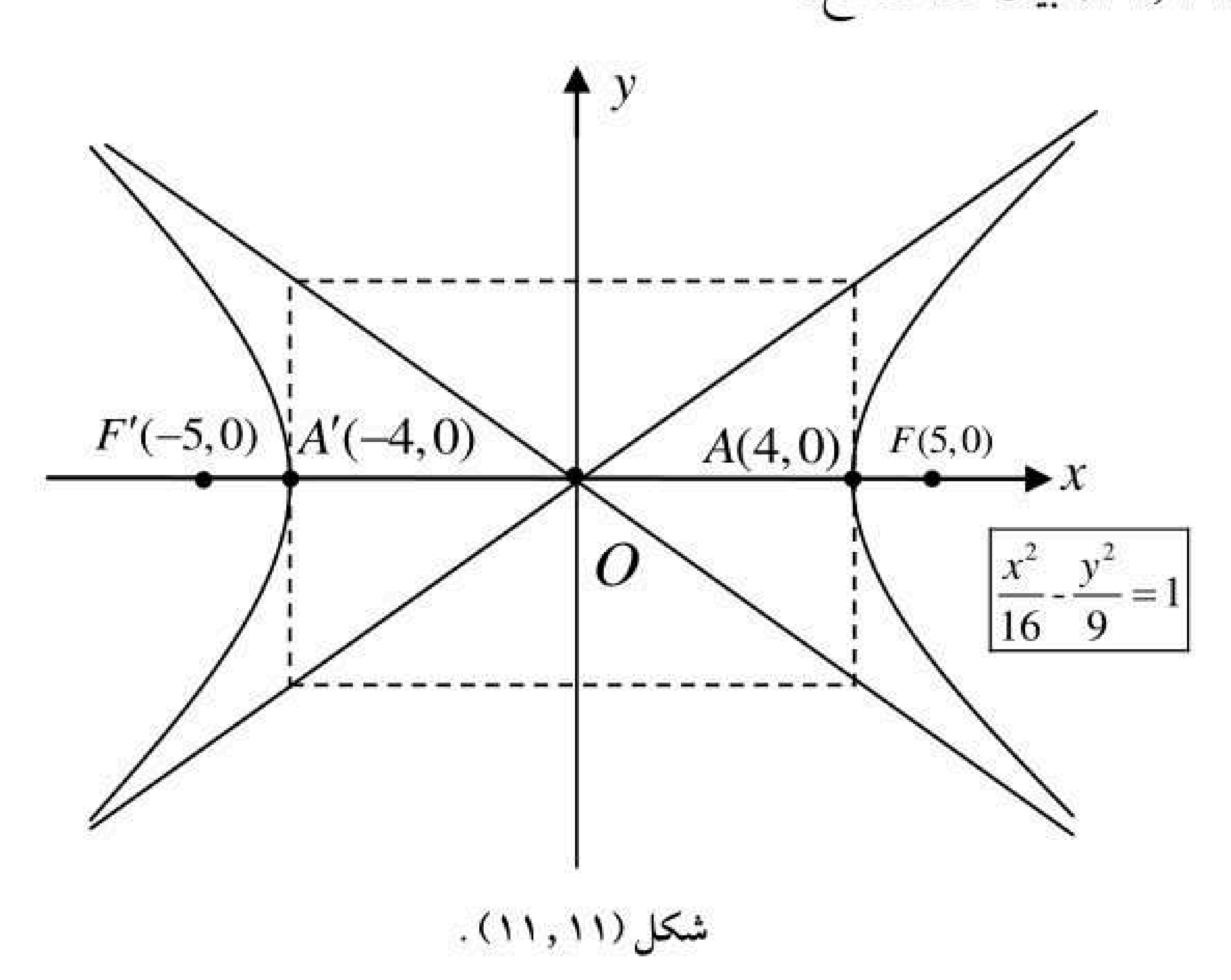
(the vertices) هما: $A' = (-4,0),\ A = (4,0)$

وأن القطع لا يقطع المحور الصادي، وهذا يدل على أن البؤرتين تقعان على المحور السيني.

بؤرتا القطع(the foci): $F' = (-5,0),\ F = (5,0)$

المستقيمان المقاربان: $y = \pm\frac{3}{4}x \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0$

لاحظ أنه يمكن إيجاد معادلتي المستقيمين المقاربين باستبدال في معادلة القطع وفي طرفها الثاني الواحد بالصفر. وبالتالي يظهر في الشكل (١١, ١١) بيان هذا القطع.



شكل (١١, ١١).

تمارين (١ , ١١)

في التمارين التالية، أوجد عناصر القطوع (البـؤر، الـرؤوس، الأدلـة، الخطـوط المقاربـة) ثـم ارسـم منحنياتها البيانية:

١) $x^2 = 4y$

٢) $y^2 = 6x$

٣) $x^2 = -8y$

٤) $y^2 = -6x$

٥) $9x^2 + 25y^2 = 225$

٦) $16x^2 + 9y^2 = 144$

٧) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

٨) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$

في التمارين التالية، أوجد معادلات القطوع المخروطيـة، والتـي رؤوسـها نقطـة الأصـل إن كانت مكافئة، ومراكزها نقطة الأصل إن كانت ناقصة أو زائدة، وذلك ضمن الشروط المبينة:

٩) قطع مكافئ بؤرته $F(0,4)$.

١٠) قطع مكافئ بؤرته $F(-5,0)$.

١١) قطع مكافئ بؤرته $F(0,-3)$.

١٢) قطع مكافئ بؤرته $F(6,0)$.

١٣) قطع مكافئ معادلة دليله $x = 5$.

١٤) قطع مكافئ معادلة دليله $y = -2$.

١٥) قطع ناقص بؤرتاه $F_2(-4,0)$ ، $F_1(4,0)$ ورأساه $V_2(-5,0)$ ، $V_1(5,0)$

١٦) قطع ناقص محوراه منطبقان على المحورين الإحداثيين، ويمر بالنقطتين $(1,3)$، $(2,4)$.

١٧) قطع ناقص بؤرتاه $F_2(-4,0)$ ، $F_1(4,0)$ ويمر بالنقطة $(3,\frac{12}{5})$

١٨) قطع ناقص محوره الأساسي المحور x (المحور الذي تقع عليه البؤرتان) وطوله 10 وطول محوره الآخر 6.

١٩) قطع زائد بؤرتاه $F_2(4,0)$ ، $F_1(-4,0)$ ويمر بالنقطة $(14,24)$.

٢٠) قطع زائد بؤرتاه $F_1(4,0)$، $F_2(0,-4)$ وأحد مستقيميه المقاربين $x=3y$.

٢١) قطع زائد محوره القاطع المحور x ويمر بالنقطتين $(2,1)$، $(4,3)$.

(١١,٤) الأشكال المختلفة
للقطوع المخروطية في حالتها الإنسحابية

أولا: القطع المكافئ

لنسحب محوري الإحداثيات x و y بحيث يبقيان موازيين لنفسيهما إلى النقطة $O'(h,K)$.

من الشكل(١١,١٢) نجد أن العلاقة بين (X,Y) إحداثيي نقطة M بالنسبة للمجموعة الإحداثية الجديدة وبين (x,y) إحداثيي النقطة نفسها بالنسبة للمجموعة الإحداثية الأصلية هي:

$$\begin{cases} x = h + X \\ y = K + Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - h \\ Y = y - K \end{cases}$$

القطع المكافئ: $$Y^2 = 4aX, a > 0 \qquad (١١,٣٢)$$

الذي رأسه $0'$ والمتماثل بالنسبة للمحور X تصبح معادلته بعد التعويض عن X,Y بما يساويهما في (١١,٣٢)، على الشكل:

$$(y-K)^2 = 4a(x-h), a>0$$

شكل (١١,١٢).

نعلم أن إحداثيي البؤرة ومعادلة الدليل للقطع بالنسبة للمحورين X و Y ، هي على الصورة:

$X = -a$ ، $F(a,0)$

وتصبح بالنسبة للمحورين X و Y ، على الشكل:

$x = -a + h$ ،$F(a + h, K)$

مثـــال (٦ , ١١)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (2,4) ودليله المستقيم $x = -1$

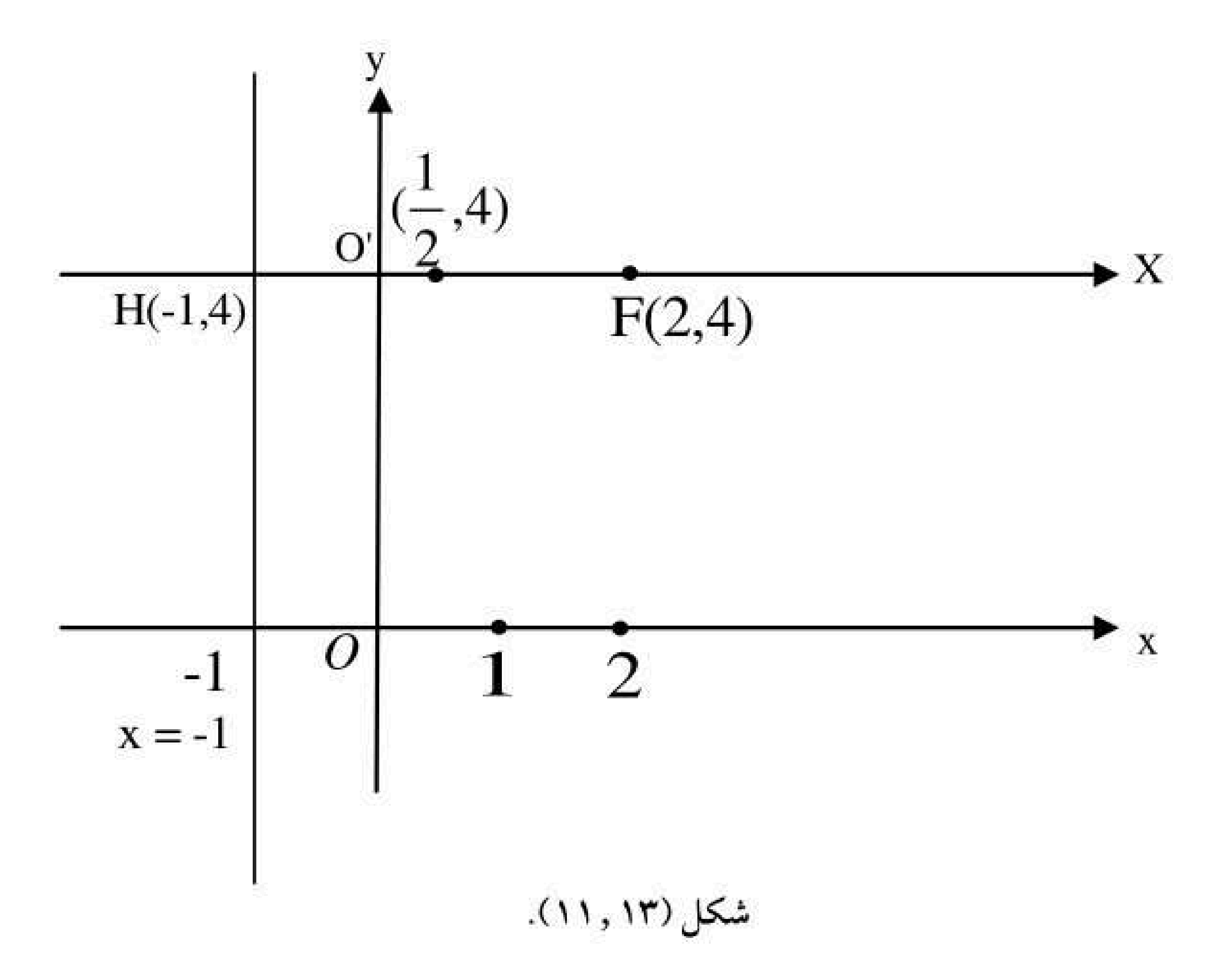
الحـــل

من الملاحظ أن النقطة $H(-1,4)$ تحدد مسقط F على الدليل، وحيث إن O' منتصف القطعة [HF] هو رأس القطع فإن:

$$(h, K) = \frac{(-1,4)+(2,4)}{2} = (\frac{1}{2}, 4)$$

لكن القطع متماثل بالنسبة للمحور X وفتحته كما يظهر في الشكل (١٣ , ١١) إلى الجهة اليمنى فهو من الشكل:

$$(y-K)^2 = 4a(x-h),\ a>0 \qquad (١١ , ٣٣)$$



شكل (١٣ , ١١).

نعلم أن البعد |HF| بين البؤرة والدليل يساوي 2a ويساوي 3 كما هو واضح من الشكل (١١ , ١٣)، إذن: $2a = 3 \Leftarrow a = \frac{3}{2}$

بالتعويض عن h,K,a بما يساويها في (١١ , ٣٣) نجد:

$$(y-4)^2 = 6(x - \frac{1}{2})$$

مثـــال (١١ , ٧)

أوجد معادلة المماس(the tangent line) والعمود على المماس (the normal line) عنـد النقطـة (1,-6) الواقعة على القطع: $y^2 + 6y = 4x - 4$

الحـــل

باشتقاق طرفي المعادلة السابقة بالنسبة للمتغير x، نجد:

$$2yy' + 6y' = 4$$

لكن m ميل المماس لمنحن عند نقطة منه يساوي قيمة المشـتقة 'y عنـد هـذه النقطـة. بـالتعويض عـن إحداثيي هذه النقطة في المعادلة السابقة نجد:

$$-12y' + 6y' = 4 \Leftrightarrow y' = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

ومنه: $m = -\frac{2}{3}$

معادلة المماس لمنحن عند نقطة (x_1, y_1) منه هي:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \Leftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

وبالتالي فإن معادلة المماس:

$$y + 6 = -\frac{2}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{16}{3}$$

ميل العمود على المماس وليكن 'm يعطى بالعلاقة:

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{3}{2}$$

فمعادلة العمود على المماس:

$$y + 6 = \frac{3}{2}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2}$$

بشكل عام، فإن معادلات القطوع المكافئة في حالتها الانسحابية وعناصرها تتحدد كما يلي:

جدول (١).

معادلة القطع	البؤرة	معادلة الدليل
$(y-K)^2 = 4a(x-h)$	$F(a+h,K)$	$x = -a+h$
$(y-K)^2 = -4a(x-h)$	$F(-a+h,K)$	$x = a+h$
$(x-h)^2 = 4a(y-K)$	$F(h,a+K)$	$y = -a+K$
$(x-h)^2 = -4a(y-K)$	$F(h, -a+K)$	$y = a+K$

(حيث $a>0$)

لاحظ لو بدلنا في الحالات الواردة في شكل (٣ , ١١) في أ، ب، جـ، د، عن كل من x،y بالقيمتين $x-h$، $y-K$ لحصلنا على المعادلات العامة في وضعها الانسحابي، وكذلك على إحداثيات البؤر ومعادلات الأدلة.

مثـــال (٨ , ١١)

حدد عناصر القطع التالي وارسمه، شكل (١٤ , ١١):

$$x^2 + y = 4x$$

الحـــل

تكتب المعادلة السابقة على الشكل:

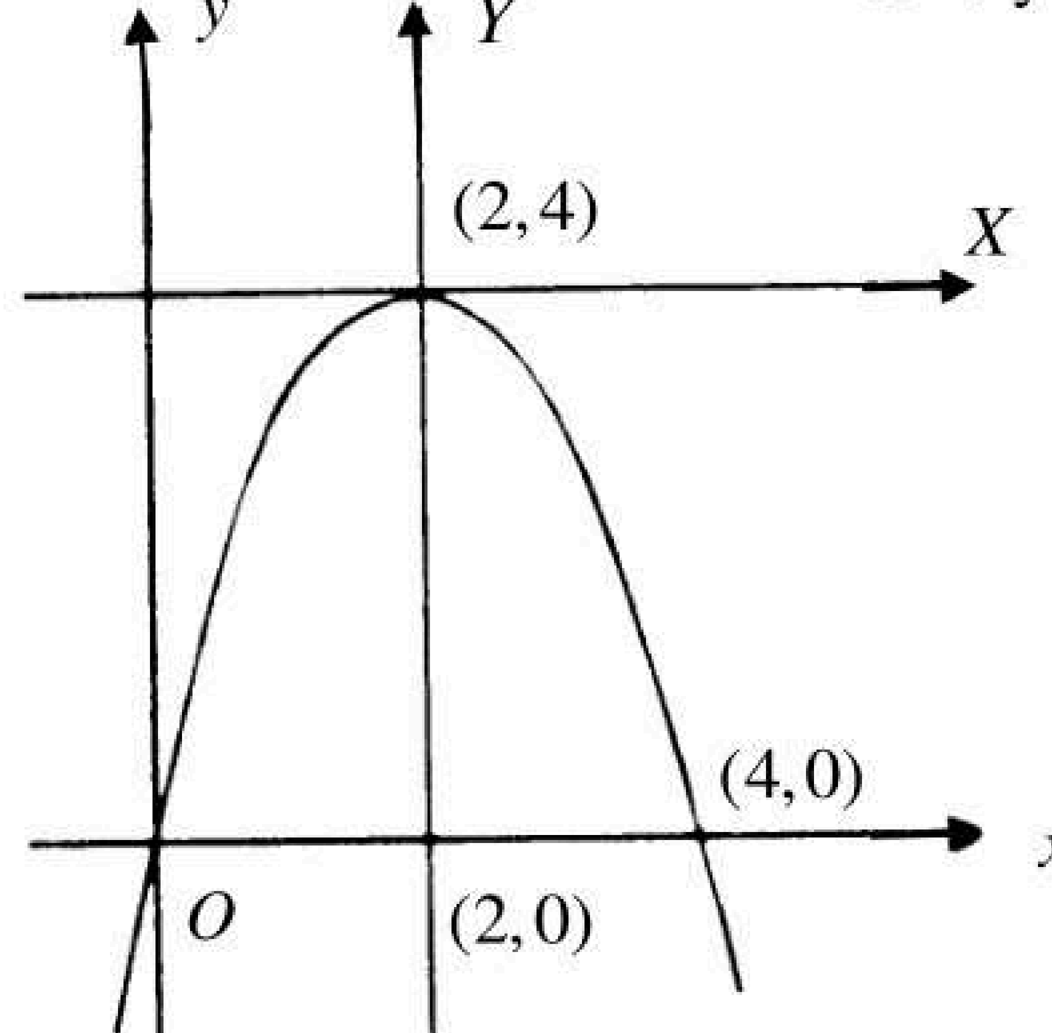
$$x^2 - 4x = -y$$

نضيف إلى طرفي المساواة مربع نصف معامل x فنجد:

$$x^2 - 4x + (2)^2 = -y + 4$$

لاحظ أن الطرف الأيسر أصبح مربعا تاما، بالتالي فإن المعادلة تكتب على الشكل:

$$(x-2)^2 = -(y-4)$$



شكل (١٤ , ١١).

بالمقارنة مع الحالة الأخيرة من الجدول السابق، نجد:

$$a = \frac{1}{4} \Leftarrow 4a = 1$$

بالتالي فإن رأس القطع: $(h,K) = (2,4)$

بؤرته: $F(h,-a+K) = (2,\frac{15}{4})$ ،

دليله: $y = a + K = \frac{17}{4}$

مثـــال (١١,٩)

أوجد رأس وبؤرة القطع الممثل بالمعادلة:

$$y^2 + 2y - 2x + 4 = 0$$

وكذلك أوجـد معادلـة دليلـه وارسـمه، شـكل (١١,١٥).

الحـــل

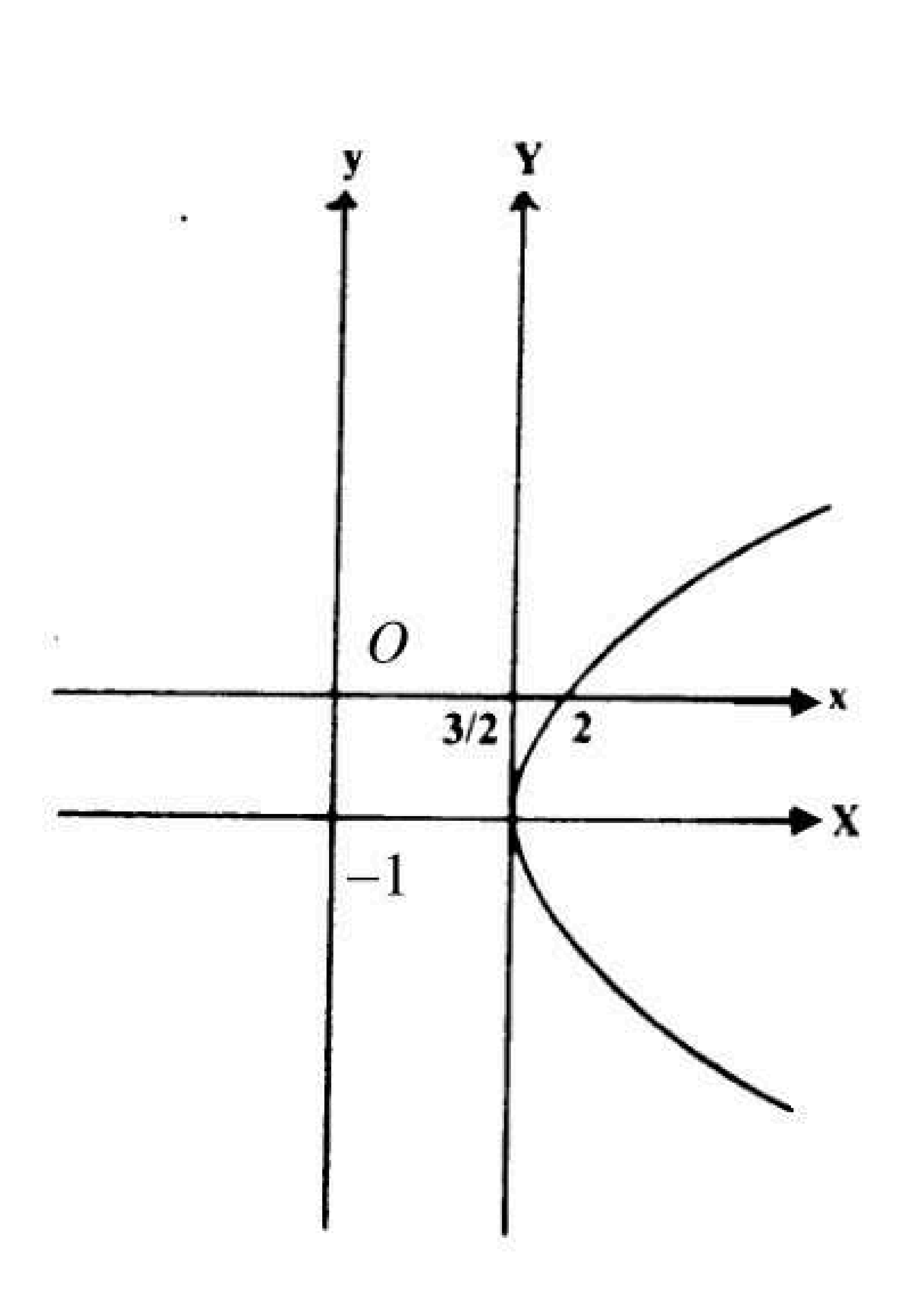
تكتب المعادلة السابقة على الشكل:

$$y^2 + 2y = +2x-4$$

نضيف إلى طرفي المساواة مربع نصـف معامـل y فنجد:

$$y^2 + 2y + (1)^2 = 2x-4+1 = 2x-3$$

لاحظ أن الطرف الأيسر أصبح مربعا تاما،



شكل (١١,١٥).

وبالتالي تكتب المعادلة على الشكل: $(y+1)^2 = 2(x - \frac{3}{2})$

بالمقارنة مع الحالة الأولى جدول (١) نجد على التوالي:

$$a = \frac{1}{2} \Leftarrow 4a = 2$$

رأس القطع: $(h,K) = (\frac{3}{2},-1)$

بؤرته: $F(a + h , K) = (2, -1)$

دليله: $x = -a + h = 1$

ثانيا: القطع الناقص

بأسلوب مشابه لما وجدناه في القطع المكافئ، فإن المعادلة:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

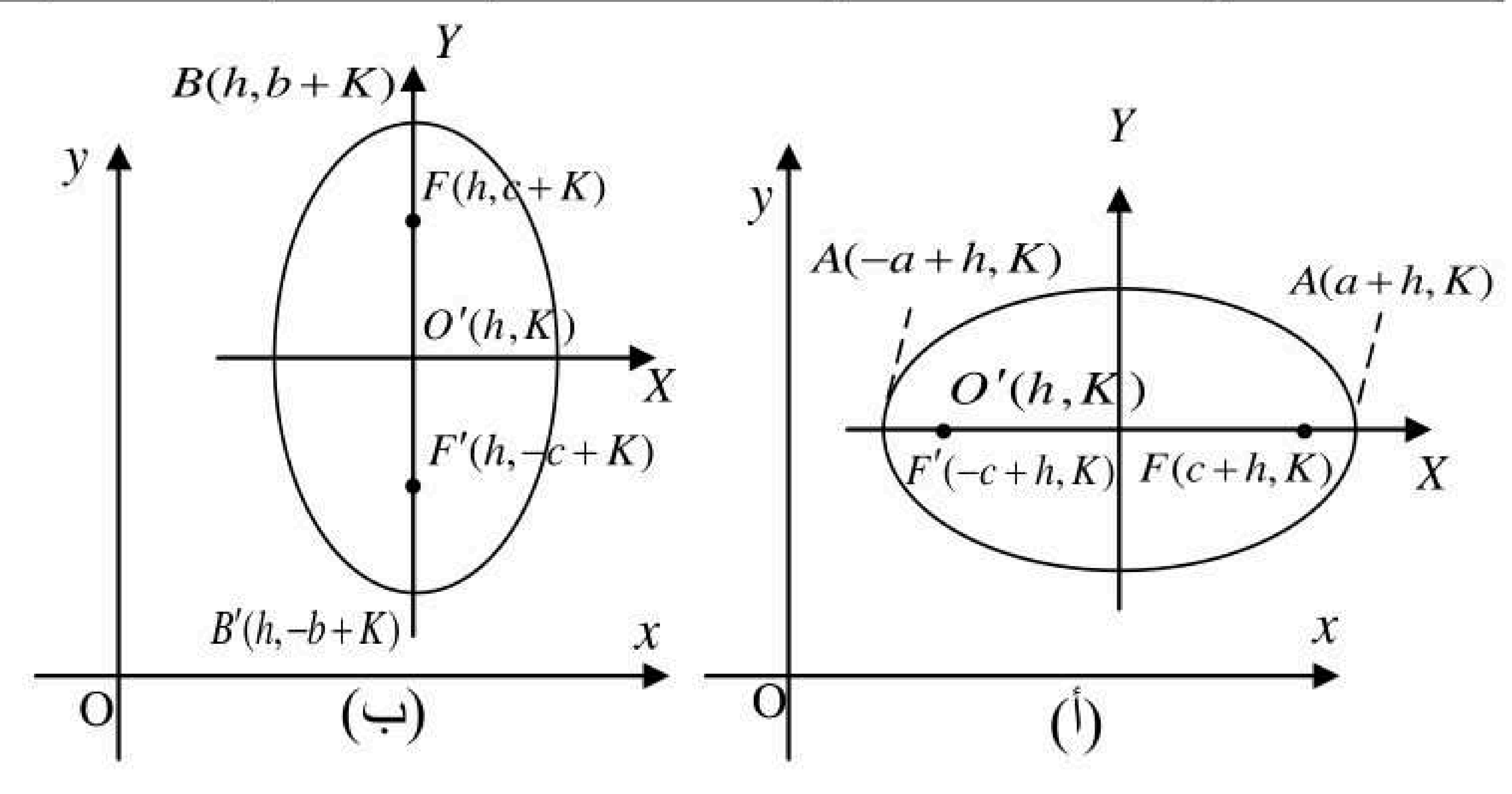
منسوبة إلى المحورين الإحداثيين X ، Y تمثل قطعا ناقصا مركزه $O'(h,K)$، ومعادلتـه منسـوبة إلى المحورين x ، y تكتب على الشكل:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-K)^2}{b^2}=1$$

بؤرتاه ورأساه، شكل (١٦ , ١١) تتحدد بالجدول التالي:

جدول (٢).

الحالة	البؤرتان F,F'	الرأسان	الشرط	c
أ	$(\pm c+h,K)$	$(\pm a+h,K)$	a>b	$\sqrt{a^2-b^2}$
ب	$(h , \pm c + K)$	$(h , \pm b +K)$	a<b	$\sqrt{b^2-a^2}$



شكل (١٦ , ١١).

مثال (١٠ , ١١)

حدد عناصر القطع التالي وارسمه، شكل (١٧ , ١١):

$$9x^2 + 25y^2 + 18x - 100y - 116 = 0$$

الحـــل

تكتب المعادلة السابقة على الشكل:

$$9(x^2 + 2x) + 25(y^2 - 4y) = 116$$

لنتمم إلى مربع تام كلا من المقدارين بين المعترضتين فنجد:

$$9(x^2+2x+(1)^2) + 25(y^2-4y+(2)^2) = 116+9+100$$

ومنه:

$$9(x+1)^2 + 25(y-2)^2 = 225$$

أو:

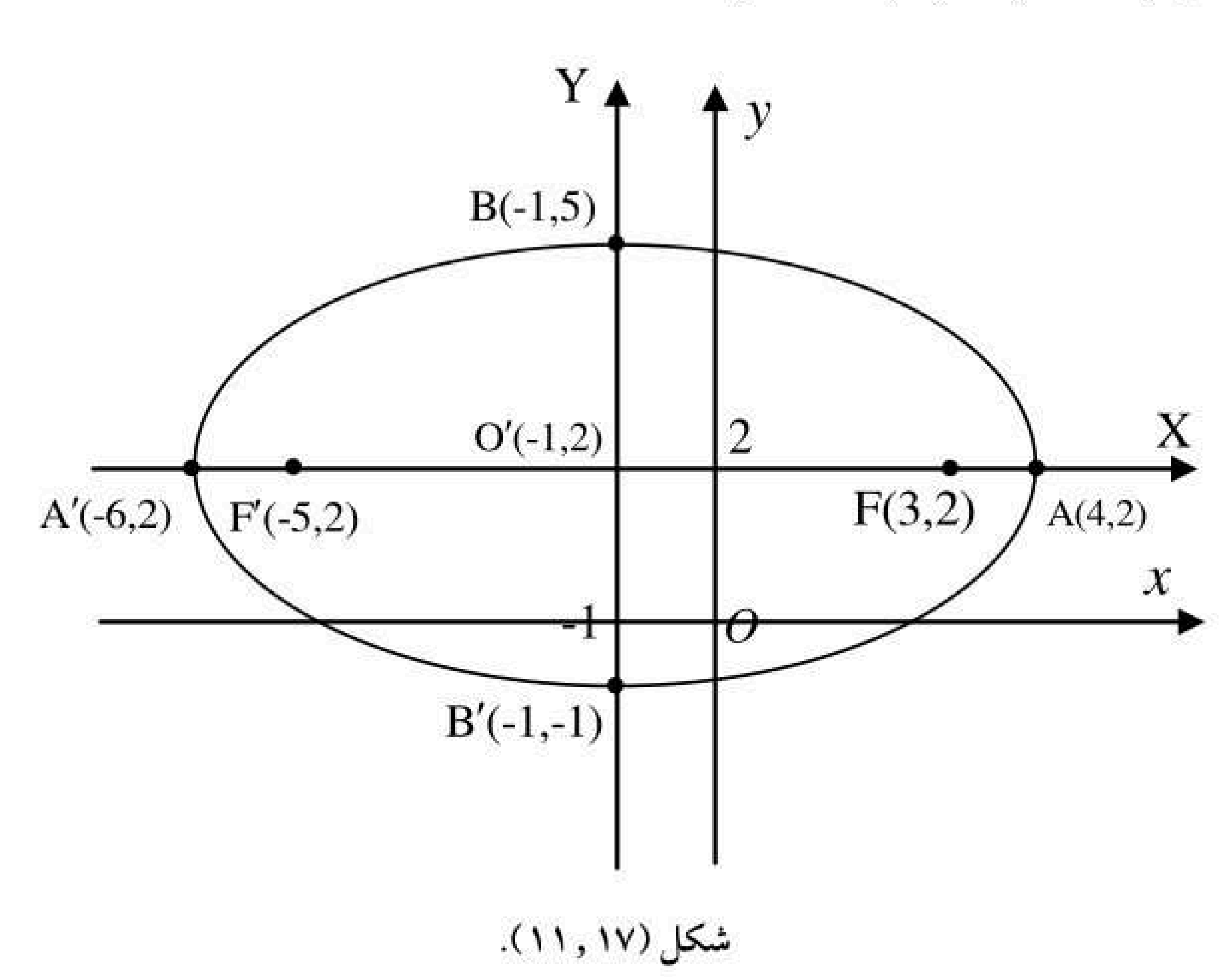
$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

وهذا قطع ناقص بؤرتاه على المحور O'X .

لاحظ أن: $a = 5, b = 3, c = \sqrt{25-9} = 4$ وأن: a>b

المركز: $(h,K) = (-1,2)$

البؤرتان: $(\pm c + h, K) = (\pm 4 - 1, 2)$



شكل (١٧ , ١١).

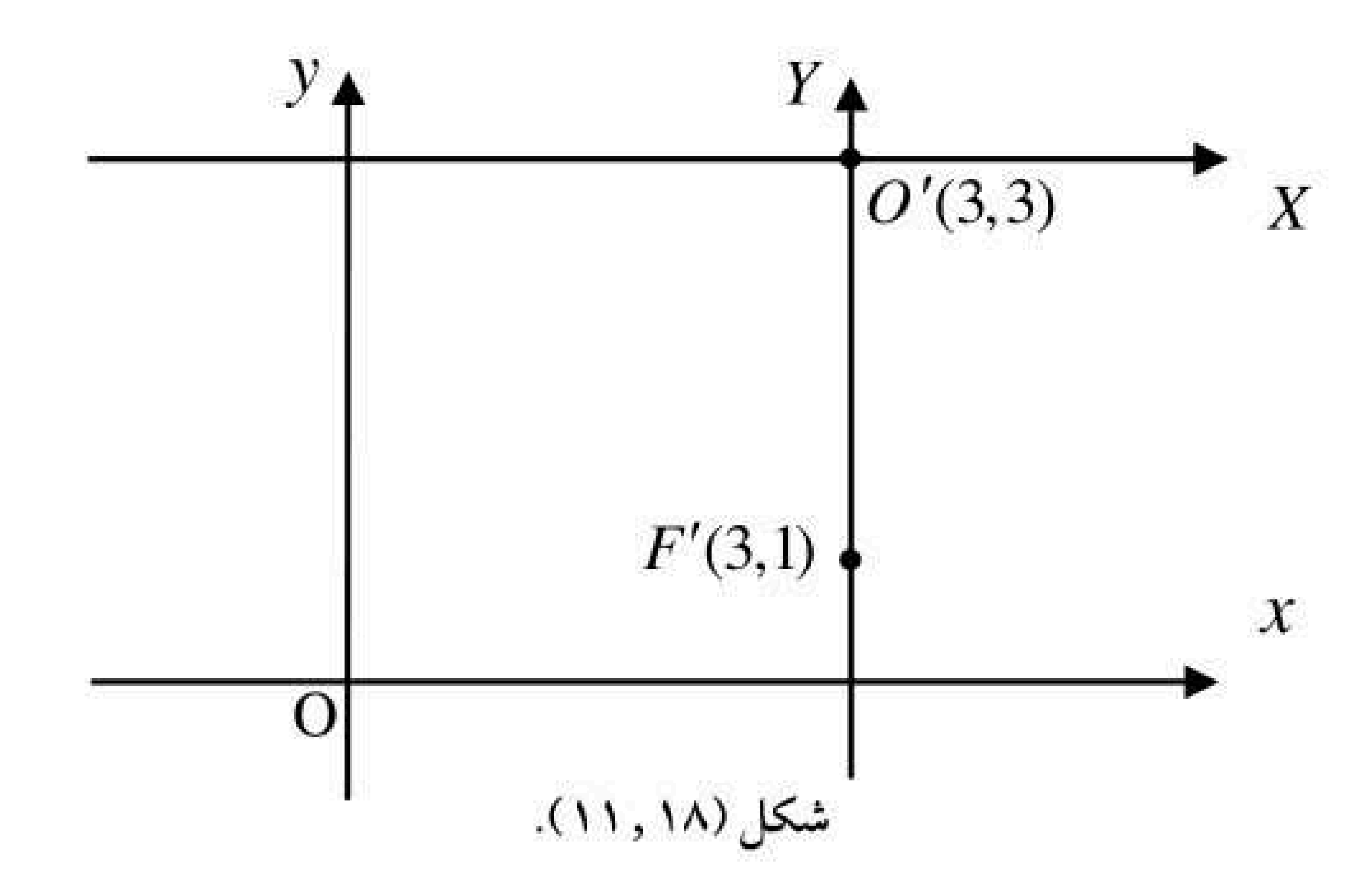
إذن: $F' = (-5,2),\ F = (3,2)$

رأسا القطع: $(\pm a+h, K) = (\pm 5-1, 2)$

إذن: $A' = (-6,2),\ A = (4,2)$

مثــال (١١ , ١١)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $O'(3,3)$ وإحدى بؤرتيـه النقطـة $F(3,1)$ وطـول محوره الأكبر يساوي 6، ثم أوجد معادلة المماس لهذا القطع عند النقطة $(3,0)$.



شكل (١٨ , ١١).

الحــــل

القطع بؤرتاه على المحور Y فهو من الشكل:

$$\frac{(x-3)^2}{a^2}+\frac{(y-3)^2}{b^2}=1$$

لاحظ أن: $2b = 6 \Leftrightarrow b = 3$ وأن: $|O'F'| = c = 2$

إذن: $c^2 = b^2 - a^2$ ومنه: $a=\sqrt{b^2-c^2}=\sqrt{5}$

معادلة القطع: $\frac{(x-3)^2}{5}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

من معادلة القطع نجد بالاشتقاق: $\frac{2(x-3)}{5}+\frac{2(y-3)}{9}y'=0$

ومنه نجد ميل المماس عند النقطة $(3,0)$ هو: $m=0$ ، بالتالي فإن معادلة المماس عند هذه النقطة هي: $y=0$.

ثالثا: القطع الزائد

بالأسلوب نفسه المتبع في القطع المكافئ والناقص، فإن المعادلة:

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=\pm 1 \qquad (١١,٣٤)$$

منسوبة إلى المحورين الإحداثيين X ، Y :

تمثل قطعا زائدا مركزه O' (h,K)، ومحوره القاطع X إذا أخذنا الإشارة الموجبة في الطرف الأيمن (شكل (١٩ , ١١) (أ)).

تمثل قطعا زائدا مركزه O' (h,K)، ومحوره القاطع Y إذا أخذنا الإشارة السالبة في الطرف الأيمن (شكل (١٩ , ١١) (ب)).

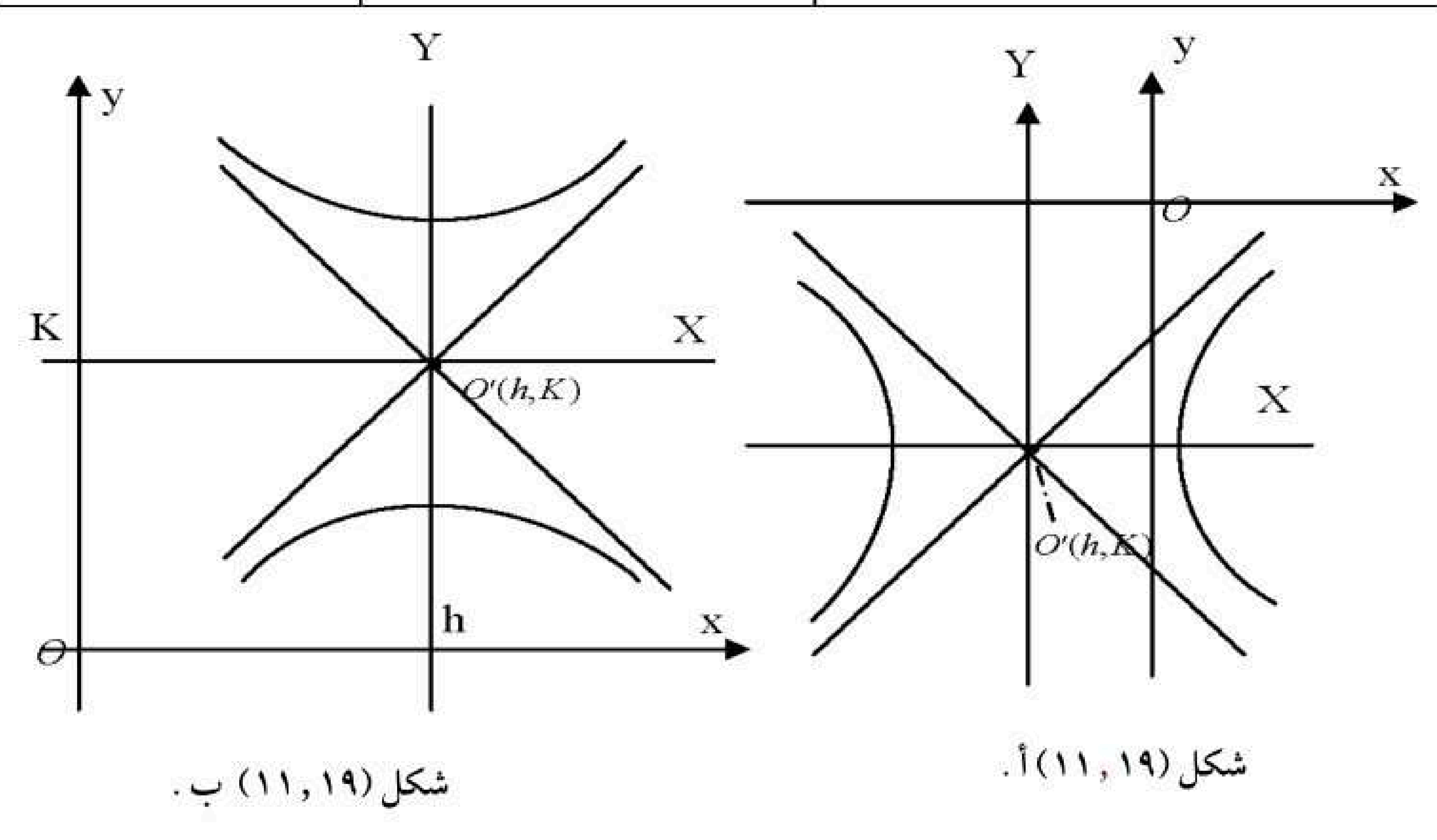
وفي كلتا الحالتين، فإن المعادلة (٣٤ , ١١) تكتب منسوبة إلى المحورين X ، Y على الشكل:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-K)^2}{b^2}=\pm 1 \qquad (١١,٣٥)$$

تتحدد البؤرتان والرأسان في كل حالة كما في الجدول الآتي:

جدول (٣)

المعادلة	البؤرتان F′,F	الرأسان
$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-K)^2}{b^2}=1$	$(\pm c+h,K)$	$(\pm a+h,K)$
$\frac{(y-K)^2}{b^2}-\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$	$(h\ ,\ \pm c+K)$	$(h,\pm b+K)$



شكل (١٩ , ١١) أ.

شكل (١٩ , ١١) ب.

وتتعين c في الحالتين معا كما يلي:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

وكذلك فإن معادلة الخطين المقاربين في كلتا الحالتين هي:

$$(y-K)=\pm\frac{b}{a}(x-h)$$

مثـــال (١٢, ١١)

حدد عناصر القطع التالي وارسمه:

$$9y^2-16x^2-18y-64x-199=0$$

الحـــل

تكتب المعادلة السابقة على الشكل:

$$9(y^2-2y)-16(x^2+4x)=199$$

لنتمم إلى مربع كامل كلا من المقدارين بين المعترضتين:

$$9(y^2-2y+(1)^2)-16(x^2+4x+(2)^2)=199+9-64$$

ومنه:

$$9(y-1)^2-16(x+2)^2=144$$

أو:

$$\frac{(y-1)^2}{16}-\frac{(x+2)^2}{9}=1$$

وهذا قطع زائد بؤرتاه على المحور 0'Y

لاحظ أن: $a=3\ ,\ b=4\ \ ،c=\sqrt{16+9}=5$

المركز: $(h,K)=(-2,1)$

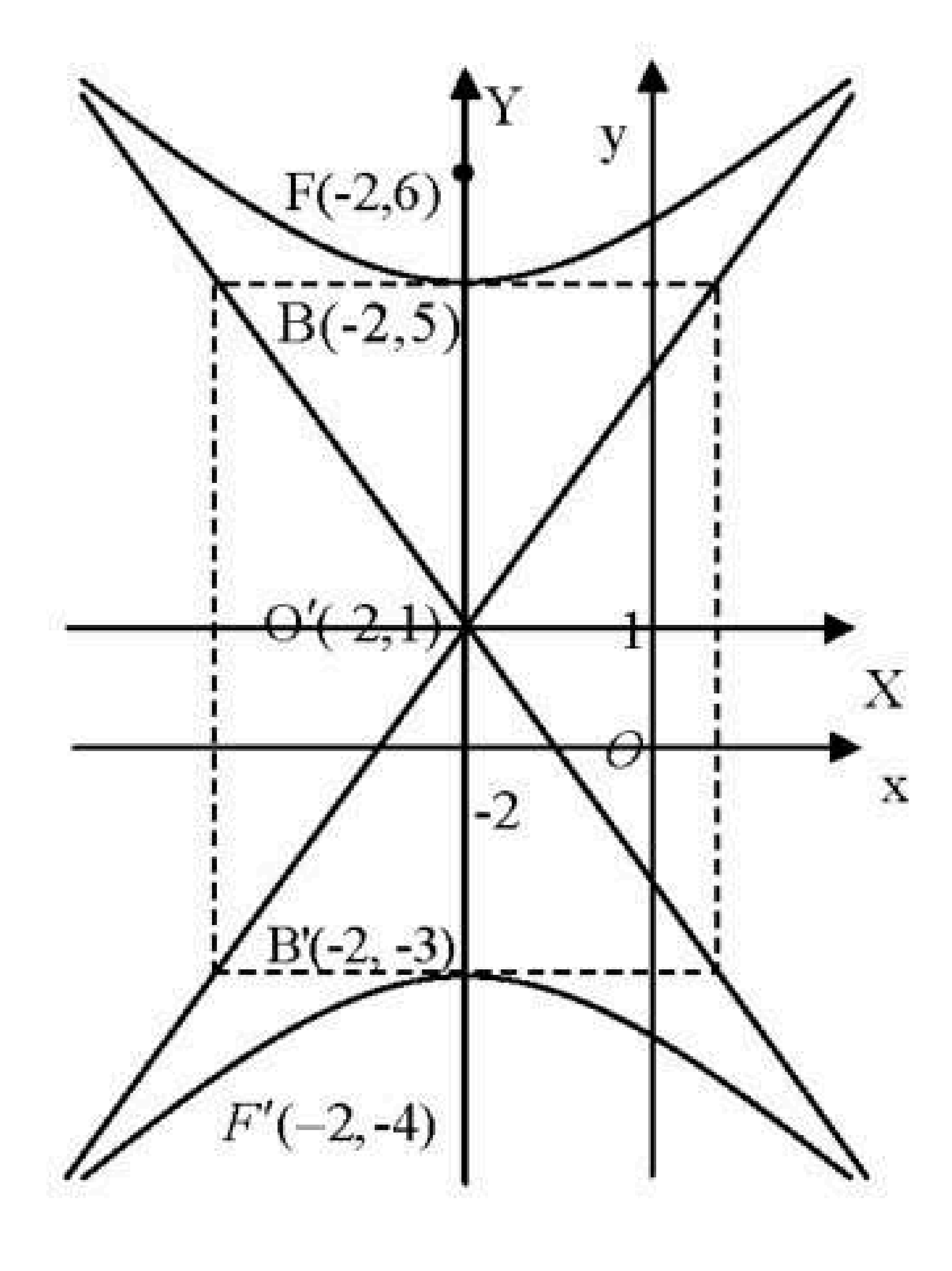
البؤرتان: $(h,\pm c+K)=(-2,\pm 5+1)$

إذن: $F'=(-2,-4),\ F=(-2,6)$

رأسا القطع: $(h,\pm b+K)=(-2,\pm 4+1)$

إذن: $B'=(-2,-3),\ B=(-2,5)$

المقاربان: $y-1=\pm\frac{4}{3}(x+2)$



شكل(١١,٢٠).

مثــال (١١,١٣)

عــين معادلــة القطــع الزائــد الــذي مركــزه (-1,4)، وإحــدى بؤرتيــه $(-1+\sqrt{13},4)$ ومســتقيماه المقاربان: $y-4=\pm\frac{3}{2}(x+1)$

الحــــل

يقع المركز والبؤرتان على المستقيم $y = 4$ الموازي للمحور $0x$

فمعادلة القطع هي من الشكل: $\frac{(x+1)^2}{a^2}-\frac{(y-4)^2}{b^2}=1$

مستقيماه المقاربان هما: $y-4=\pm\frac{b}{a}(x+1)$

إذن: $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$ (١١,٣٦)

لكن البعد بين البؤرة والمركز يساوي c، إذن:

$$c=\sqrt{13}=\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2+b^2=13 \qquad (١١,٣٧)$$

من المعادلتين (٣٦ ,١١)، (٣٧ ,١١) نجد أن: $a = 2, b = 3$

فمعادلة القطع هي: $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-4)^2}{9}=1$

تمارين (٢ ,١١)

في التمارين التالية، أوجد عناصر القطوع (المراكز، البؤر، الرؤوس، الأدلة، الخطوط المقاربة) ثم ارسم منحنياتها البيانية (إن وجدت).

١) $x^2-y^2+4x+4y-48=0$

٢) $x^2+5y^2+6x-40y-84=0$

٣) $x^2+2y^2+8y-8x-48=0$

٤) $x^2+6x+8y+1=0$

٥) $y^2+8x+6y+1=0$

٦) $3x^2+2y^2+6x-8y+5=0$

٧) $y^2-6x-4y+16=0$

٨) $2x^2-3y^2+8x+6y+17=0$

٩) $8x-y^2+8y=0$

١٠) $4x^2-9y^2-16x+18y-7=0$

١١) $x^2+2y^2-4y=0$

١٢) $4x^2-9y^2-16x+18y-29=0$

١٣) $4x+y^2+4y-4=0$

١٤) $x^2-y^2+6x+4y+5=0$

في التمارين التالية، أوجد معادلات القطوع المخروطية وذلك ضمن الشروط المبنية:

١٥) قطع مكافئ رأسه $(-1,2)$ ودليله $x=-3$.

١٦) قطع ناقص رأساه $(-5,2)$، $(3,2)$ وبؤرتاه $(-4,2)$، $(2,2)$.

١٧) قطع زائد رأساه $(-1,5)$، $(-1,-3)$ ويمر بالنقطة $(-3,-5)$.

١٨) قطع زائد مستقيماه المقاربان:

$$-3x+2y+1=0 \quad ، \quad 3x+2y+7=0$$

ويمر بالنقطة $(-5,1)$.

١٩) قطع مكافئ رأسه $(3,-2)$ وبؤرته $(3,4)$.

٢٠) قطع مكافئ بؤرته $F(-1,2)$ ودليله $x=8$.

٢١) قطع ناقص بؤرتاه $(-3,6)$، $(-3,2)$ وطول محوره الكبير 14.

٢٢) قطع زائد بؤرتاه $(3,-6)$، $(3,2)$ وطول محوره القاطع 4.

٢٣) قطع زائد بؤرتاه $(3,-4)$، $(-3,-6)$ وأحد رأسيه $(3,-3)$.

٢٤) قطع نقاطه تبعد عن النقطة (1,2 –) بعدها عن مستقيم $x = 4$.

٢٥) قطع نقاطه تبعد عن النقطة (2,1 –) بعده عن المستقيم $4x + 3y - 5 = 0$.

٢٦) قطع القيمة المطلقة للفرق بين بعدي أية نقطة منه عن النقطتين (7,0)، (1,0) يساوي 2.

٢٧) قطع مجموع بعدي أية نقطة منه عن النقطتين (1,2)، (1,3) يساوي 6.

٢٨) قطع ناقص طرفا محوره الأكبر: (0,3)، (3 – ,0) والبعد بين بورتيه يساوي 4.

٢٩) قطع ناقص نهايات محوريه النقاط:

(3,6)، (6,2)، (3, –2)، (0,2).

٣٠) قطع ناقــص معادلتا محوري التماثــل له: x=3، y= –2 وإحدى بورتيه (2 – ,0) وطـول محـوره الأصغر 8.

٣١) قطع ناقص يمر بنقطة الأصل وبؤرتاه (3,4)، (4 – ,3).

٣٢) قطع مكافئ دليله y=2 ومعادلة محور تماثله x=1 ويمر بالنقطة (5,6).

٣٣) قطع مكافئ يمر بالنقاط: (1,0 –)، (0,2)، (1,1) ومحور تماثله يوازي المحور y.

٣٤) قطع مكافئ دليله y=2 ومحور تماثله x=1 ويمر بالنقطة (5,6).

الفصل الثاني عشر

الدوال في عدة متغيرات
FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

(١ , ١٢) الدوال بمتغيرين أو أكثر

(أ) لاحظ أن حجم الكرة V يتحدد تماما إذا علم طول نصف قطرها r، وأن الحجم يعطى بالصيغة:

$$v = f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

(ب) نعلم أن مساحة المستطيل S تتعين بمعرفة طوله x، وعرضه y وفق المساواة:

$$S = f(x, y) = xy$$

(ج) أما حجم متوازي المستطيلات V، فمعروف إذا علمت أبعاده الثلاث: x,y,z ويتحدد بالعلاقة:

$$V = f(x, y, z) = xyz$$

سبق أن درسنا بالتفصيل الدوال بمتغير واحد x. سنبحث فيما يلي ونعرض خواص الدوال بأكثر من متغير.

تعريف (١ , ١٢)

المستوي: هو مجموعة الأزواج المرتبة الحقيقية، من الشكل: (x,y).

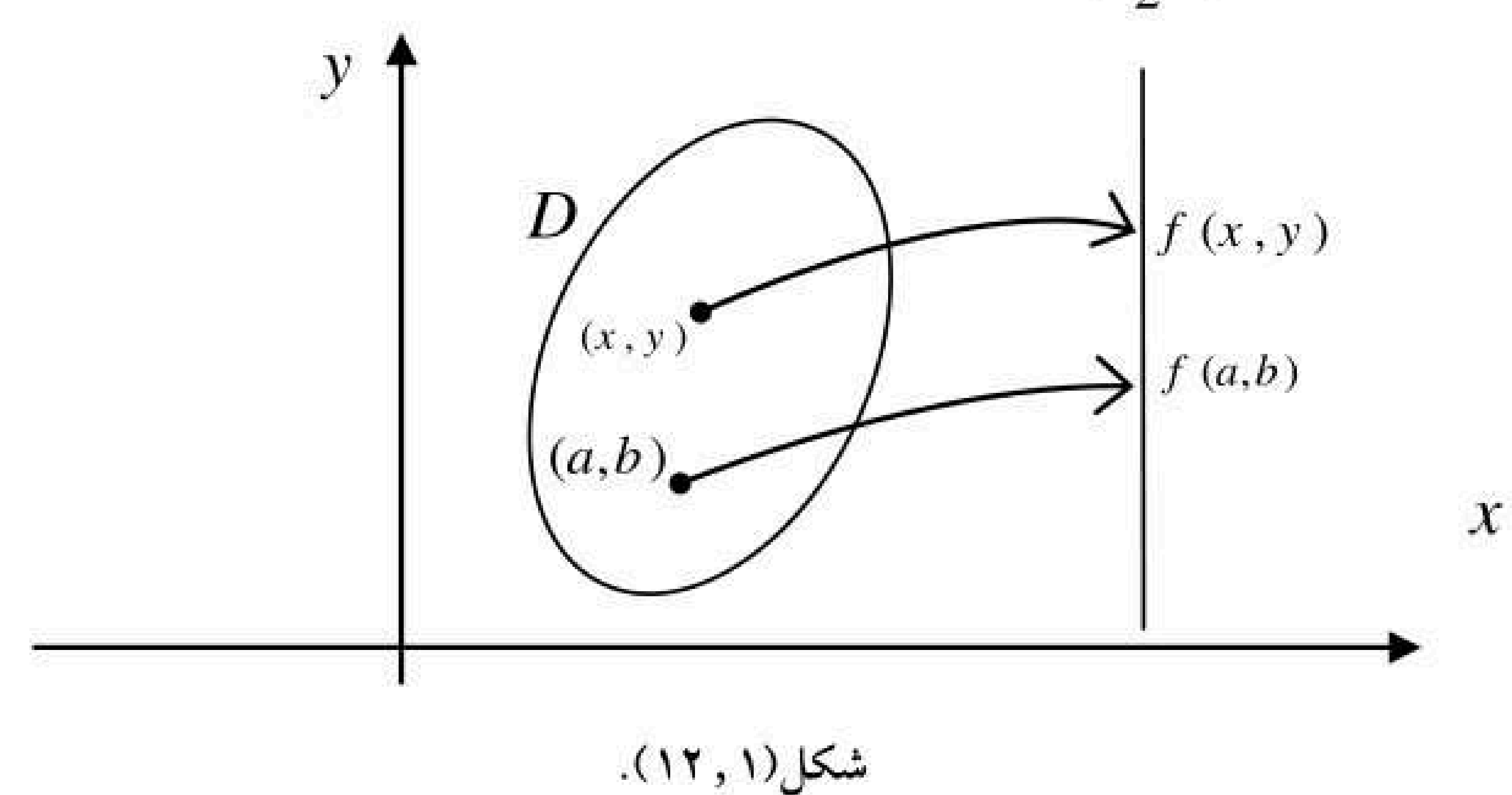
لنرمز لمجموعة نقاط المستوي بالرمز R^2 ،بالتالي فإن:

$$R^2 = \{(x, y) : x \in R, y \in R\}$$

تعريف (١٢, ٢)
لتكن مجموعة جزئية من R^2 .الدالة الحقيقية f بمتغيرين x, y هي: ارتباط بين عناصر مجموعتين بحيث يوافق كل زوج مرتب: $(x, y) \in D$ ، عددا حقيقيا وحيدا (نرمز له بالرمز $f(x, y)$) ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

نسمي D بمجال الدالة، كما نسمي مجموعة القيم $f(x, y)$ الموافقة لجميع الأزواج المرتبة (x, y) المنتمية إلى مجال الدالة بمدى الدالة.

غالبا ما تتحدد $f(x, y)$ صورة الزوج المرتب (x, y) وفق قاعدة معلومة، يسهل بواسطتها معرفة القيمة $f(x, y)$ بمجرد معرفة الزوج المرتب (x, y) ، فمثلا: من القاعدة: $f(x, y) = 2x + y$، نجد: $f(1,2) = 4$، $f\left(-\frac{1}{2},1\right) = 0$ ، $f(3,4) = 10$.



شكل(١٢, ١).

تعريف (١٢, ٣)
الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد R^3 هو مجموعة كل الثلاثيات المرتبة الحقيقية، من الشكل: (x, y, z) . والذي عرف عليه البعد $|AB|$ بين أي نقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصورة:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ إذن:

$$R^3 = \{(x, y, z) : x \in R, y \in R, z \in R\}$$

(٢ , ١٢) تحديد نقطة في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد

ننسب نقاط هذا الفضاء إلى مجموعة من المحاور الإحداثية المتعامدة والمتلاقية في نقطة واحدة والتي نسميها بنقطة الأصل (مبدأ الإحداثيات). نسمي هذه المحاور بالمحور x ، المحور y ، المحور z، شكل (٢ , ١٢).

تحدد هذه المحاور ثلاثة مستويات إحداثية وهي: المستوي xy ، المستوي yz ، المستوي zx.

تتطابق نقطتان إذا تساوت إحداثياتها المتقابلة.

نقول إن مجموعة المحاور تكون مجموعة مباشرة، إذا حققت الاختبار التالي:

شكل(٢ , ١٢).

إذا وقف راصد في اتجاه المحور z ووضع يمناه باتجاه المحور x الموجب ويسراه في اتجاه المحور y الموجب وحرك يمناه في المستوي xy بالاتجاه الموجب فيجب أن تلاقي يمناه يسراه بعد مسح زاوية مقياسها أقل من 180^o ، وإلا نقول إن المجموعة غير مباشرة. نأخذ عادة ثلاثية المحاور بحيث تكون مباشرة ومتعامدة. تتحدد النقطة P من R^3 بمعرفة مسقطيها D على المستوي xy والمسقط C على المحور z، شكل (٣ , ١٢). لكن D تتحدد بمعرفة مسقطيها A و B على المحورين x , y على الترتيب.

إذن تتحدد P إذا عرفنا النقاط A,B,C. يمكن أن نبرهن أن النقطة A هي مسقط P على المحور x وأن B هي مسقط P على المحور y .

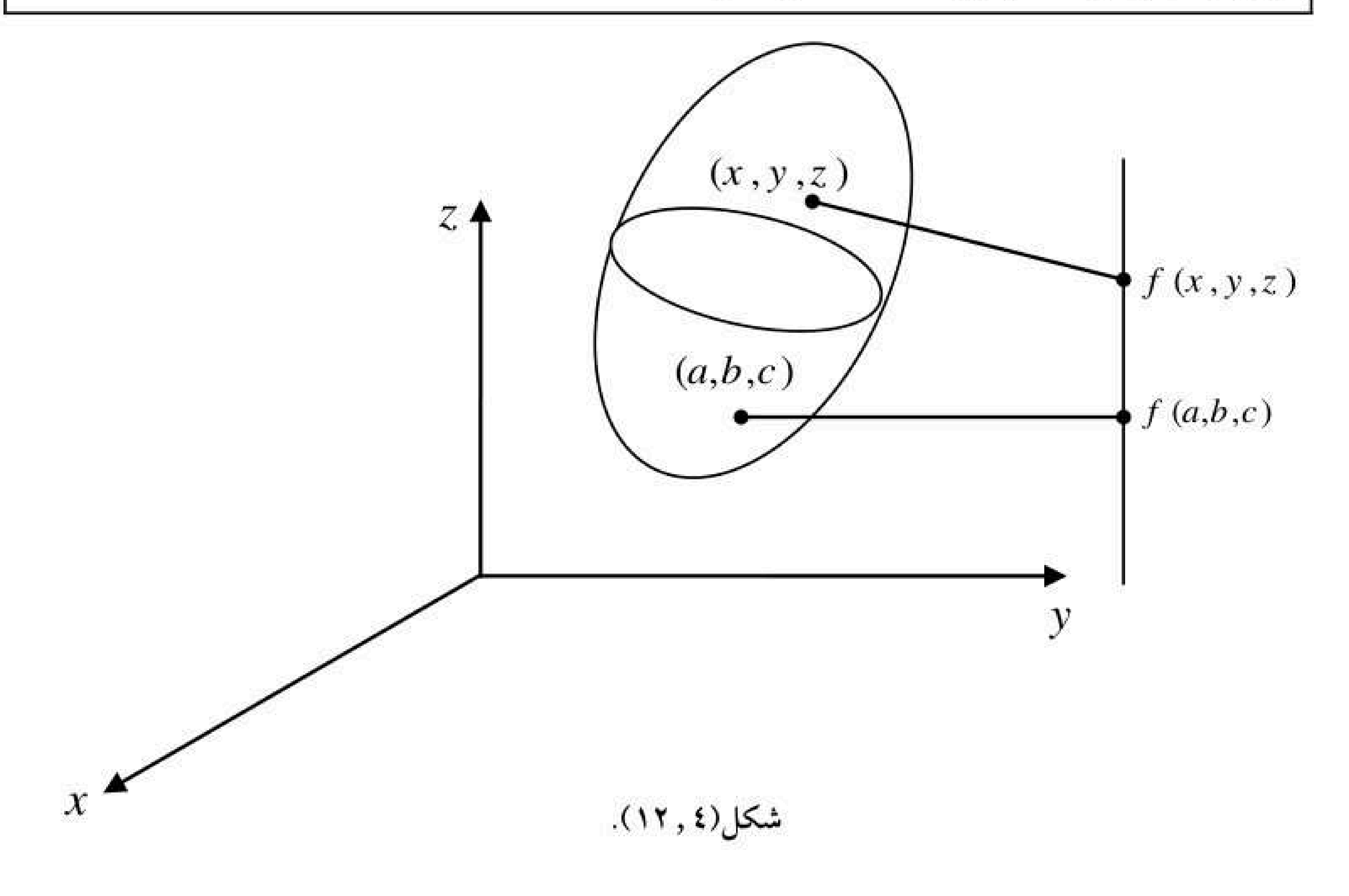
شكل(٣ , ١٢).

إذن معرفة مساقط P على المحاور الإحداثية كاف لتحديد موضع النقطة P في الفضاء R^3. تتحدد النقاط A,B,C على محاورها بثلاثة أعداد جبرية ولتكن x,y,z وهي إحداثيات هذه النقاط على هذه المحاور. إذن كل نقطة P من R^3 تتحدد بثلاثي مرتب من الأعداد الحقيقية من الشكل (x,y,z). نرمز للنقطة P غالبا بالرمز $P(x,y,z)$. تظهر النقطة P ومساقطها كما هو موضح في الشكل(٣ , ١٢).

تعريف (٤ , ١٢)

لتكن D مجموعة جزئية من R^3 (الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد). الدالة الحقيقية f بثلاث متغيرات x,y,z: هي ارتباط بين عناصر مجموعتين بحيث يوافق كل ثلاثي مرتب: $(x,y,z)\in D$ ، عددا حقيقيا وحيدا (نرمز له بالرمز $f(x,y,z)$) ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

نسمي D بمجال الدالة، كما نسمي مجموعة القيم $f(x,y,z)$ الموافقة لجميع الأزواج المرتبة (x,y,z) المنتمية إلى مجال الدالة بمدى الدالة.



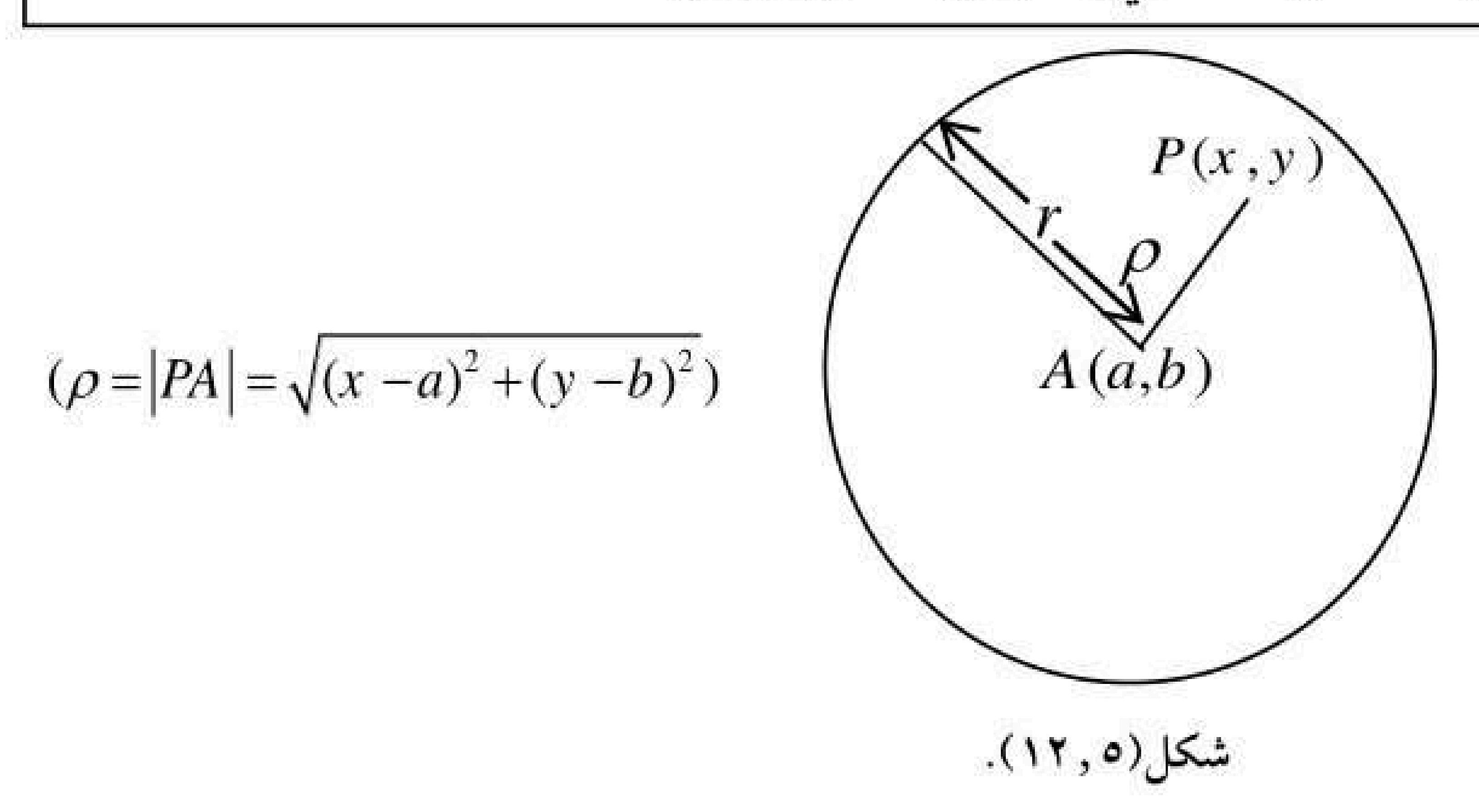
شكل(٤ , ١٢).

(١٢,٣) النهايات والاتصال
Limits and Continuity

تعريف (١٢,٥)

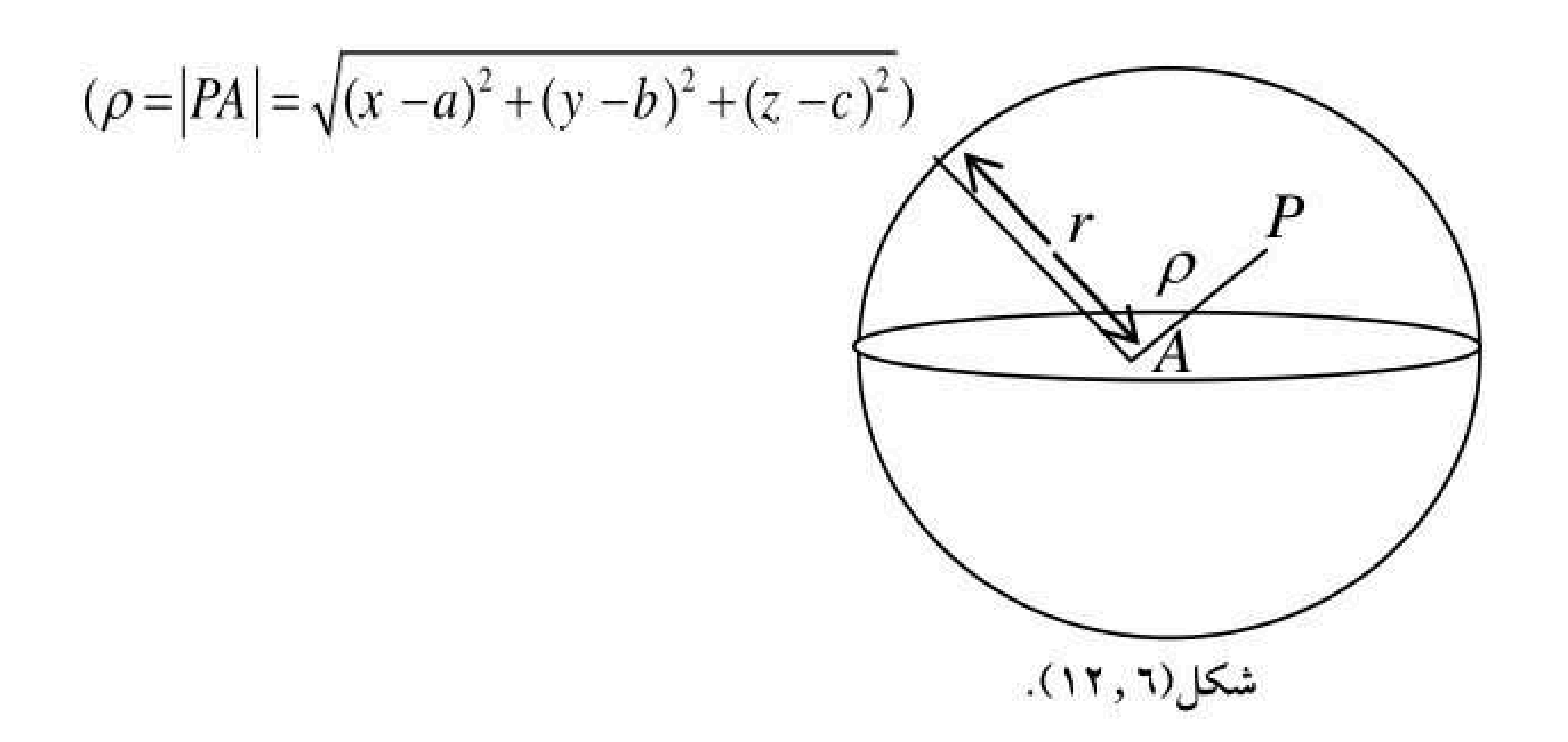
نسمي مجموعة النقاط $P(x,y)$ في المستوي R^2 والتي تبعد عن نقطة ثابتة $A(a,b)$ في هذا المستوي بعداً ρ أقل من عدد ثابت موجب r **بالقرص المفتوح** الذي مركزه A وطول نصف قطره r $(\rho = |PA| < r)$.

وإذا حوى هذا القرص نقاط محيطه، سمي **بالقرص المغلق** $(\rho \le r)$.



شكل(١٢,٥).

كما نسمي مجموعة النقاط $P(x,y,z)$ في R^3 والتي تحقق الشرط $\rho = |PA| < r$ بالمنطقة الكروية المفتوحة التي مركزها $A(a,b,c)$ وطول نصف قطرها r . وإذا حوت نقاط سطحها سميت بالمنطقة الكروية المغلقة $(\rho \le r)$.



شكل(١٢,٦).

تعريف (٦ , ١٢)

لتكن f دالة بمتغيرين x , y معرفة على قرص دائري مفتوح مركزه $A(a,b)$ (ومن الممكن أن لا تكون معرفة عند A). نقول إن الدالة f تنتهي نحو العدد L عندما: $(x , y) \to (a,b)$ ، ونرمز لذلك بالرمز: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x , y) = L$ وذلك إذا تحقق ما يلي: لكل عدد $\varepsilon > 0$ (اختياري)،يوجد عدد $\delta > 0$ ،بحيث يكون:

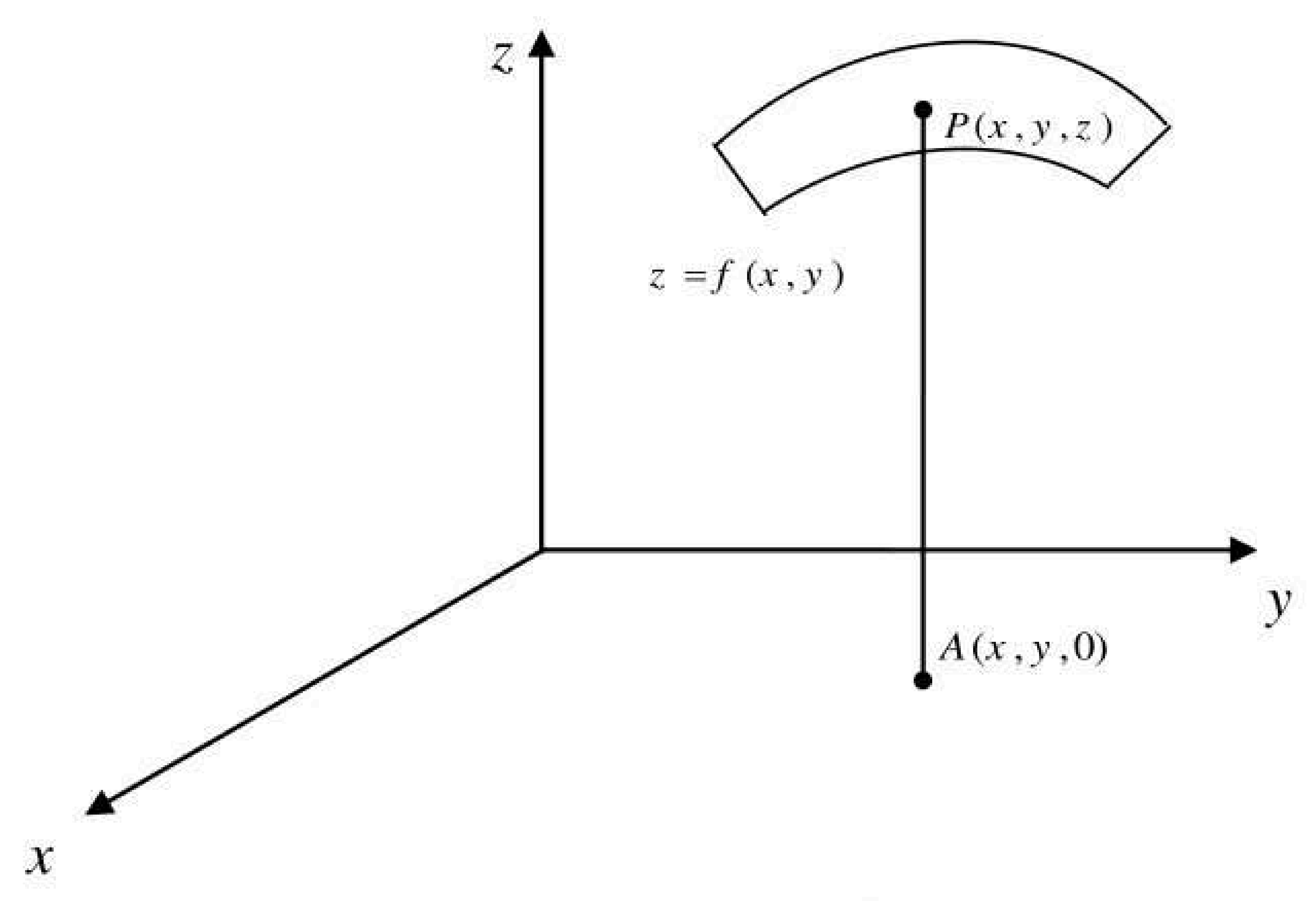
$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x , y) - L| < \varepsilon$$

يمكن أن نبرهن إذا كانت النهاية L موجودة ،فإنها وحيدة.

بالمثل يمكن أن نعرف نهاية دالة بثلاثة متغيرات مع استبدال القرص الدائري المفتوح الذي لا يحوي مركزه بالكرة المفتوحة التي لا تحتوي مركزها.

ملحوظة (١ , ١٢)

مجموعة النقاط: $(x , y , z) \in R^3$ والتي ترتبط متغيراتها بالمساواة $z = f(x , y)$ ، تمثل سطحا في R^3.



شكل(٧ , ١٢).

نظرية (١٢,١)

إذا كانت نهايتا الدالتين f, g موجودتين عندما: $(x,y)\to(a,b)$ ، وتساويان على الترتيب: L,M ، فإن:

١) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f+g)(x,y)=L+M$

٢) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f\cdot g)(x,y)=LM$

٣) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (\frac{f}{g})(x,y)=\frac{L}{M}, M\neq 0$

٤) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \sqrt{f(x,y)}=\sqrt{L}, L\geq 0$

ملحوظة (١٢,٢)

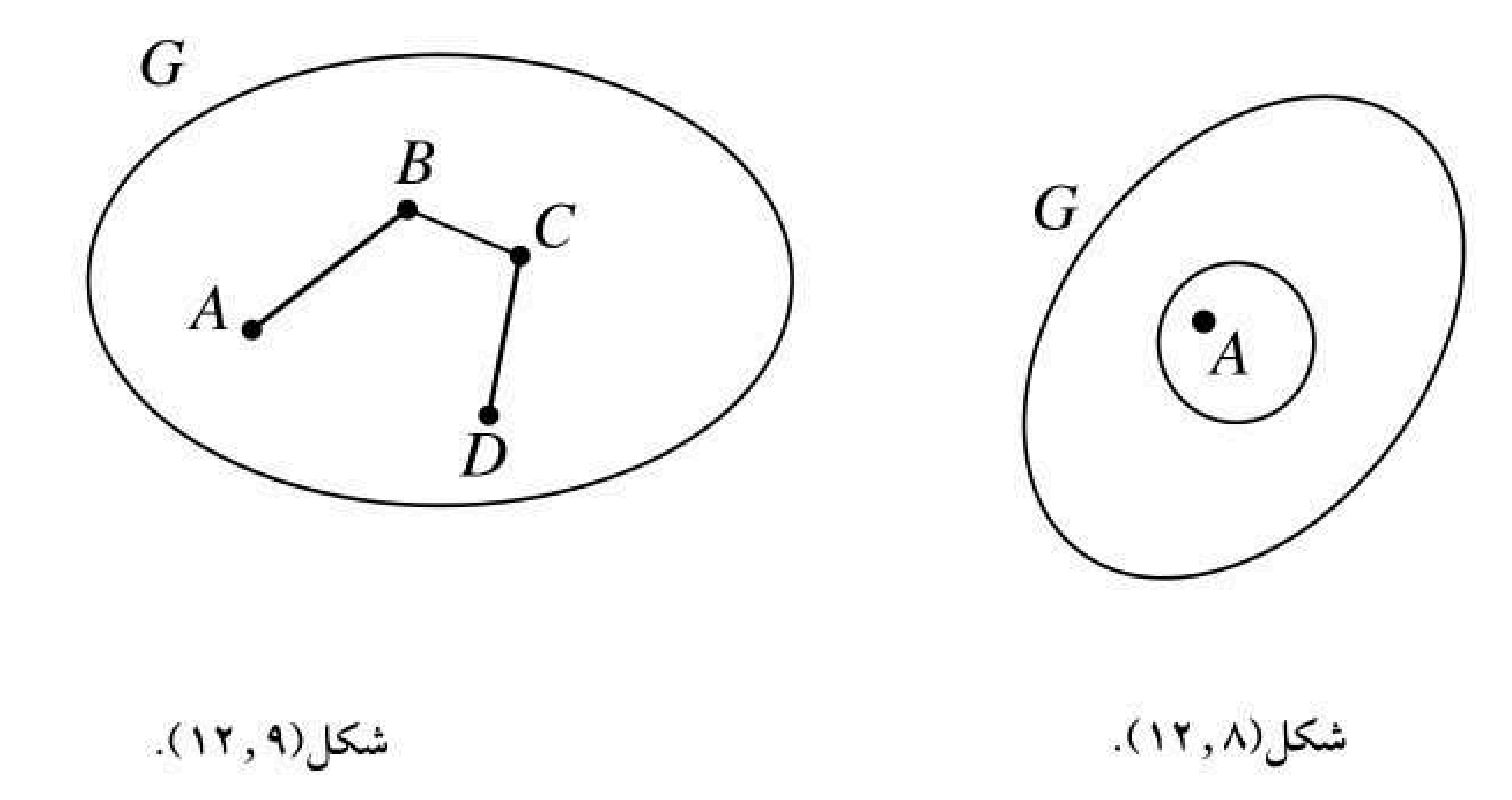
يمكن التعبير عن دالة كثيرة حدود f بمتغيرين x,y ، على صورة مجموع عدد من الحدود من الشكل $cx^{\alpha}y^{\beta}$ حيث c عدد حقيقي، والعددان α,β عددان صحيحان غير سالبين. كما نسمي قسمة كثيرتي حدود بالدالة الكسرية. يمكن البرهان على أن نهاية كثيرة حدود عندما: $(x,y)\to(a,b)$ تساوي قيمة كثيرة الحدود عندما: $y=b, x=a$. وبالمثل نهاية دالة كسرية تساوي قيمتها شرط أن لا تكون نهاية المقام مساوية للصفر. الأمر نفسه ينطبق على كثيرات الحدود بثلاثة متغيرات.

تعريف (١٢,٧)

نقول إن النقطة $A(a,b)$ نقطة داخلية من المجموعة G. إذا كانت مركزا لقرص مفتوح يقع بأكمله ضمن G وإذا كانت جميع نقاط G نقاطا داخلية، فإننا نسمي هذه المجموعة **بالمجموعة المفتوحة**.

تعريف (١٢,٨)

نقول عن المجموعة المفتوحة G التي يمكن أن نصل بين أية نقطتين منها بخط مضلعي (اتحاد لعدة قطع مستقيمة) يقع بأكمله ضمن G **بمنطقة مفتوحة**.



شكل(٩ , ١٢). شكل(٨ , ١٢).

تعريف (٩ , ١٢)

لتكن f دالة متغيرين x , y معرفة على القرص دائري مفتوح مركزه $A(a,b)$.نقول إن الدالة f متصلة عند النقطة A، إذا كان:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

وإذا كانت f دالة بثلاثة متغيرات، نستبدل القرص الدائري المفتوح بالكرة المفتوحة

لتكن f دالة بثلاثة متغيرات. نقول إن الدالة f متصلة عند النقطة الداخلية $A(a,b,c)$ من المنطقة D، إذا كان:

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = f(a,b,c)$$

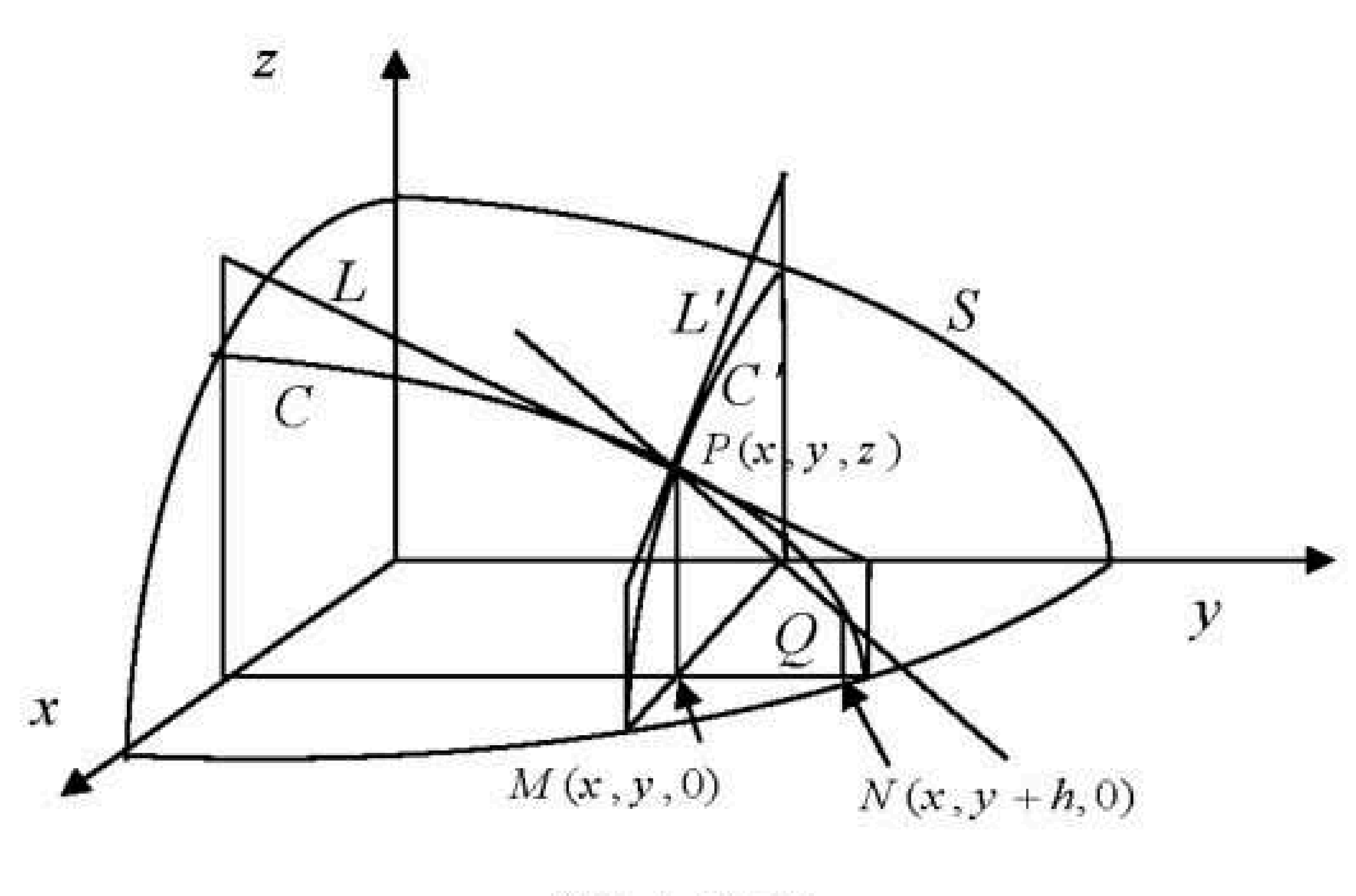
من المفيد أن نشير هنا إلى أن نظريات الاتصال لدوال بمتغيرين أو أكثر تتشابه مع ما يقابلها لدوال بمتغير واحد. فمجموع وحاصل ضرب وقسمة دالتين متصلتين هو متصل بشرط أ لا ينعدم المقام في حالة القسمة.

(٤ , ١٢) المشتقات الجزئية
Partial Derivatives

لتكن f دالة بمتغيرين x , y معرفة على المنطقة $D \subset R^2$ بالقاعدة: $z = f(x,y)$ وليكن S بيان السطح الذي تمثله هذه المعادلة في R^3 .

ويقطع المستوي Γ الموازي للمستوي yz السطح s في المنحني المستوي C. لتكن Q,P نقطتين من المنحني C ، ولتكن: $M(x,y,0)$، $N(x, y+h, 0)$ مسقطي Q و P على المستوي xy ،

شكل (١٠ , ١٢). ميل PQ القاطع بالنسبة للمحور الإحداثي MN الموازي للمحور y وبنفس جهته C هو: $m_{PQ} = \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$



شكل(١٠ , ١٢).

نهاية ميل القاطع PQ عندما: $h \to 0$ إن وجدت تسمى بالمشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة لمتغير y ونرمز لها بالرمز $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ وهي تمثل ميل المماس L للمنحني C عند النقطة P بالنسبة للمحور y .بالمثل يمكن أن نعرف المشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة للمتغير x ونرمز لها بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$، وهي تمثل المماس L' للمنحني C' (أثر المستوي Γ' الموازي للمستوي xy على السطح S) عند النقطة P بالنسبة للمحور x.

تعريف(١٠ , ١٢)

لتكن f دالة بمتغيرين معرفة على المنطقة المفتوحة D، نعرف المشتقتين الجزئيتين للدالة f بالنسبة للمتغيرين x و y عند النقطة (x, y) ونرمز لهما بالشكل: $f_x(x, y)$ و $f_y(x, y)$ بالصورة:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

(شرط وجود النهاية في كل حالة)

مثـــال(١ ,١٢)

إذا كان: $f(x,y)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$ ، فأوجد باستخدام التعريف: $f_y'(2,1)$، $f_x'(2,1)$. ثم أوجد هاتين القيمتين مستخدما قواعد الاشتقاق وتحقق من صحة إجابتك.

الحـــل

١)نعلم أن: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$ ، ومنه:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h,1)-f(2,1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(2+h)+(2+h)}-\sqrt{2+2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(2+h)}-2}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=\lim_{h\to 0}\frac{2(2+h)-4}{h(\sqrt{2(2+h)}+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(2+h+2)}}=\frac{1}{2}$$ (ضربنا بالمرافق)

بالمثل، نجد:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=\lim_{k\to 0}\frac{f(2,1+k)-f(2,1)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\sqrt{2(1+k)+\frac{2}{1+k}}-2}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{2(1+k)+\frac{2}{1+k}-4}{\sqrt{2(1+k)+\frac{2}{1+k}}+2}=\lim_{k\to 0}\frac{2(1+k)^2+2-4(1+k)}{k(1+k)(\sqrt{2(1+k)+\frac{2}{1+k}}+2)}$$

(اختصرنا k من البسط والمقام) $$=\lim_{k\to 0}\frac{2k^2}{k(1+k)(\sqrt{2(1+k)+\frac{2}{1+k}}+2)}=0$$

لنستخدم قواعد الاشتقاق لا يجاد المشتقتين الجزئيتين للدالة:

$f(x,y)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$ ، فنجد:،

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x-\frac{x}{y^2}}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y+\frac{1}{y}}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=\frac{1+1}{4}=\frac{1}{2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=\frac{2-2}{2\sqrt{2+2}}=0$$

ملحوظة(٣, ١٢)

لإيجاد $f_x(x,y)$ ننظر إلى y على أنها مقدار ثابت ثم نشتق f بالنسبة للمتغير x مستخدمين قواعد الاشتقاق المعروفة لنا بالنسبة لدالة ذات متغير واحد .لإيجاد $f_y(x,y)$ننظر إلى x على أنها مقدار ثابت ثم نشتق f بالنسبة للمتغير y .

مثـــال(٢, ١٢)

أوجد $f_x(x,y)$ ، $f_y(x,y)$، $f_x(1,1)$، $f_y(1,1)$ إذا كان: $f(x,y)=e^{x^2y-y^2x}$

الحـــل

١) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=e^{x^2y-y^2x}(2xy-y^2)$ ٢) $\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^{x^2y-y^2x}(x^2-2xy)$

بالتالي، فإن: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)=-1$ ، $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-1$

لنعرف المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى لدالة f بثلاثة متغيرات x,y,z، فمثلا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=f_x(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}$$

بالمثل نعرف $\dfrac{\partial f}{\partial y}$، $\dfrac{\partial f}{\partial z}$

إذا كانت دالة f بمتغيرين x,y فإن المشتقة الجزئية للمقدار f_x بالنسبة لأحد المتغيرين تسمى بالمشتقة الجزئية من الرتبة الثانية، وتعرف بالصورة:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_x)=(f_x)_x=(f_{xx})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_x)=(f_x)_y=f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

بالمثل: $\dfrac{\partial}{\partial x}(f_y)=f_{yx}$ ، $\dfrac{\partial}{\partial y}(f_y)=f_{yy}$

بوجه عام، فإن: $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ والنظرية التالية تحدد الشروط الواجب توفرها لتنقلب الإشارة $\neq$ إلى المساواة.

نظرية (٢, ١٢)

لتكن f دالة بمتغيرين x, y . إذا كانت الدوال: $f, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$، متصلة على منطقة مفتوحة D ، فإن: $f_{yx} = f_{xy}$ لكل: $(x, y) \in D$

المشتقات الجزئية لدالة f من الرتبة الثالثة وأكثر تعرف بشكل مماثل،فمثلا:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_{xx}) = f_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_{xy}) = f_{xyx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x}$$

مثـــال(٣, ١٢)

إذا كان: $u = x + \frac{x-y}{y-z}$ ، فأوجد: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ ، ثم أثبت أن: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$

الحـــل

لنشتق بالنسبة للمتغير x مع ثبات y و z ، فنجد: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{(y-z)}{(y-z)^2} = 1 + \frac{1}{y-z}$

لنشتق بالنسبة للمتغير y مع ثبات x و z ، فنجد:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-(y-z)-(x-y)}{(y-z)^2} = \frac{(z-x)}{(y-z)^2}$$

لنشتق بالنسبة للمتغير z مع ثبات x و y ، فنجد: $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x-y)}{(y-z)^2}$

بالجمع، نجد: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{y-z+z-x+x-y}{(y-z)^2} + 1 = 1$

مثـــال(٤, ١٢)

إذا كان: $f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n$، فأوجد: $f_{xx}(0,0), f_{yy}(0,0), f_{xy}(0,0)$.

الحـــل

لنشتق بالنسبة للمتغير x: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=m(1+x)^{m-1}(1+y)^n$ (ثبتنا y)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=m(m-1)(1+x)^{m-2}(1+y)^n$ (ثبتنا y)، ومنه: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=m(m-1)$.

لنشتق بالنسبة للمتغير y (مع ثبات x)،فنجد:

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=n(1+x)^m(1+y)^{n-1},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=n(n-1)(1+x)^m(1+y)^{n-2}$ ومنه:

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=n(n-1)$ ، لنشتق $\frac{\partial f}{\partial x}$ بالنسبة للمتغير y (مع ثبات x)، فنجد:

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)=mn(1+x)^{m-1}(1+y)^{n-1}$ ومنه: $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)=mn$.

مثـــال(١٢,٥)

إذا كان: $u(x,t)=A\sin(a\lambda t+\varphi)\sin(\lambda x)$، فأثبت أن: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

الحـــل

لاحظ أن: $\frac{\partial u}{\partial x}=A\lambda\sin(a\lambda t+\varphi)\cos(\lambda x)$ (مع ثبات t)

$\frac{\partial u}{\partial t}=Aa\lambda\cos(a\lambda t+\varphi)\sin(\lambda x)$ (مع ثبات x)

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=A\lambda^2\sin(a\lambda t+\varphi)\sin(\lambda x)$ (نشتق $\frac{\partial u}{\partial x}$ مع ثبات t)

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=Aa^2\lambda^2\sin(a\lambda t+\varphi)\sin(\lambda x)$ (نشتق $\frac{\partial u}{\partial t}$ مع ثبات x)

من الواضح أن: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2[-A\lambda^2\sin(a\lambda t+\varphi)\sin(\lambda x)]=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

مثـــال(١٢,٦)

أثبت أن الدالة: $z=y\varphi(x^2-y^2)$ ، تحقق المعادلة: $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$

الحـــل

نضع: $w=x^2-y^2$، فنجد: $z=y\varphi(w)$ ، ومنه:

$\frac{\partial z}{\partial x}=y\varphi'(w)\cdot 2x,\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(w)-2y^2\varphi'(w)$ ، إذن:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} = 2y\,\varphi'(w) \\ \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(w)}{y} - 2y\,\varphi'(w) \end{cases}$$

بالجمع، نجد: $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(w)}{y} = \frac{z}{y^2}$ (لاحظ أن: $\varphi(w) = \frac{z}{y}$)

مثـــال(١٢,٧)

إذا كان: $u = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ ، فإثبت صحة معادلة لا بلاس:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (١٢,١)$$

الحـــل

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

ومنه نجد (١٢,١) $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}$

مثـــال(١٢,٨)

أوجد $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$ ، إذا كان: $u = x^\alpha y^\beta z^\lambda$.

الحـــل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \lambda\beta x^\alpha y^{\beta-1} z^{\lambda-1} \Leftarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \lambda x^\alpha y^\beta z^{\lambda-1}$$

لاحظ أن: $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \alpha\beta\lambda x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\lambda-1}$

تمارين (١ , ١٢)

أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدوال المعرفة كما يلي:

١) $f(x,y)=\sin(x+2y)$

٢) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$

٣) $f(x,y)=\dfrac{y+2x}{y-2x}$

٤) $f(x,y)=e^{x-y}$

٥) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$

٦) $f(x,y)=ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

٧) $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{x}{y}$

٨) $f(x,y)=x^{\sqrt{y}}$

٩) $f(x,y)=e^{\sin(x-y+2z)}$

١٠) $f(x,y)=(x+y)^z$

١١) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-z^2}$

١٢) $f(x,y,z)=\sin^{-1}\dfrac{yz}{x}$

١٣) $f(x,y,z)=\cos^{-1}[\ln(x+y+z)]$

١٤) $f(x,y)=e^{x\ln(y-z)}$

١٥) أوجد $f'_x(1,2,0)$ و $f'_y(1,2,0)$ و $f'_z(1,2,0)$ إذا كان: $f(x,y,z)=\ln(xy+z)$

١٦) إذا كان: $z=c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$، فأوجد: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$

١٧) إذا كان: $z=\sqrt{2yx+y^2}$، فأوجد: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$

١٨) إذا كان: $z=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$، فأوجد: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$

١٩) إذا كان: $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$، فأوجد: $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$

٢٠) إذا كان: $u=xy+yz+zx$، فأوجد المشتقات الجزئية من الرتب الثانية.

(١٢,٥) قاعدة السلسلة

لتكن دالتين g , f بمتغير واحد ،معرفتين بالصورة $y = f(u), u = g(x)$. نعرف دالة التركيب للدالة f مع الدالة g ، بالشكل:

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

إذا كانت الدالة g قابلة للاشتقاق عند x وكانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند $u = g(x)$، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

سنعمم فيما يلي هذه القاعدة من أجل دوال ذات عدة متغيرات. لتكن f, g, h دوالا بمتغيرين اثنين، من الشكل: $z = f(u,v), u = g(x,y), v = h(x,y)$

إذا وافق كل زوج (x, y) من المنطقة $D \subset R^2$ ، زوجا (u,v) يقع في مجال f ، فإن دالة التركيب: $z = f(g(x,y), h(x,y))$ تحدد المتغير z كدالة بالمتغيرين x, y مجالها D. فمثلا، إذا كان:

$$(x > 0, y > 0) \quad z = e^{uv}, u = \ln(x,y), v = x - 2y$$

فإن: $$z = e^{(x-2y)\ln(xy)} = [e^{\ln(xy)}]^{x-2y} = (xy)^{x-2y}$$

قاعدة السلسلة (The Chain Rule)

إذا كان $z = f(u,v)$: حيث $u = g(x,y)$ و $v = h(x,y)$. إذا كانت المشتقات الجزئية للدوال f, g, h متصلة على منطقة مفتوحة D، فإن:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (١٢,٢)$$

حالة خاصة

إذا كان: $z = f(u,v)$،حيث: $u = g(x)$ و $v = h(x)$، فإن:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

وهذه نتيجة مباشرة من المعادلة الأولى من (١٢,٢)، بعد ملاحظة أن u,v يتبعان متغيرا واحدا x وأن z يتبع ضمنيا نفس المتغير x.

مثـــال(٩ ,١٢)

إذا كان: $u = \frac{y}{x^2+y^2}$ و $v = \frac{x}{x^2+y^2}$ (١٢,٣)

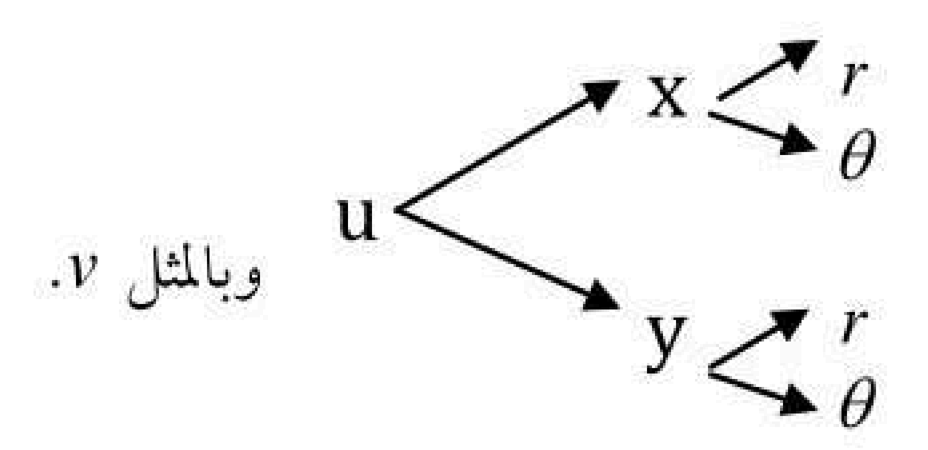
وكان: $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ ، فأوجد: $\frac{\partial u}{\partial r}$ و $\frac{\partial v}{\partial \theta}$ ، ثم أثبت أن:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

الحـــل

الطريقة الأولى:

u, v يتبعان المتغيرين x و y وكلاهما يتبعان المتغيرين θ, r :



وبالمثل v.

إذن: حسب قاعدة السلسلة: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$ ، $\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$

وبالتالي: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\cdot\cos\theta + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot\sin\theta$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot(-r\sin\theta) - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\cdot r\cos\theta$$

لاحظ أن: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$.

الطريقة الثانية: بالتعويض عن x و y بما يساويهما بدلالة r و θ في (١٢,٣)، نجد: $v = \frac{\cos\theta}{r}, u = \frac{\sin\theta}{r}$ (لاحظ أن: $x^2+y^2=r^2$)

بالتالي ،فإن: $\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\sin\theta}{r^2}, \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\sin\theta}{r}$ ومنه نجد المطلوب.

مثـــال(١٠ ,١٢)

أوجد $\frac{\partial u}{\partial t}$ باستخدام قاعدة السلسلة، إذا كان: $u = x^2+y^2, x = \sin t, y = \cos t$

الحـــل

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=2x\cos t-2y\sin t=2\sin t\cos t-2\cos t\sin t=0$$

مثـــال(١١ , ١٢)

إذا كان: $z=x^2+y^2$ وكان: $x=uv$ و $y=\frac{u}{v}$ ، فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة: $\frac{\partial z}{\partial u}$

الحـــل

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=2x\cdot v+2y\cdot\frac{1}{v}=2uv^2+\frac{2u}{v^2}$$

تمارين (٢ , ١٢)

١) أوجد: $\frac{dz}{dt}$ إذا كان: $z=\frac{x}{y}$ حيث: $y=\ln t, x=e^t$.

٢) أوجد: $\frac{du}{dt}$ إذا كان: $u=\ln\left(\sin\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$ حيث: $y=\sqrt{t^2+1}, x=3t^2$.

٣) أوجد: $\frac{du}{dt}$ إذا كان: $u=xyz$ حيث: $z=\tan t, y=\ln t, x=t^2+1$.

٤) أوجد: $\frac{du}{dt}$ إذا كان: $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ حيث: $z=4, y=2\sin t, x=2\cos t$.

٥) أوجد: $\frac{dz}{dx}$ إذا كان: $z=u^v$ حيث: $v=\cos x, u=\sin x$.

٦) أوجد: $\frac{dz}{dx}$ إذا كان: $z=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ حيث: $y=x^2$.

٧) أوجد: $\frac{dz}{dx}$ إذا كان: $z=x^y$ حيث: $y=\varphi(x)$.

٨) أوجد: $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ إذا كان: $z=f(u,v)$ حيث: $v=e^{xy}, u=x^2-y^2$.

٩) أوجد: $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$ إذا كان: $z=\tan^{-1}\frac{x}{y}$ حيث: $x=u\sin v, y=u\cos v$.

١٠) أوجد: $\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial x}$ إذا كان: $z=f(u)$ حيث: $u=xy+\frac{y}{x}$.

(٦ , ١٢) الدوال الضمنية
The Implicit Functions

لتكن f **دالة بمتغيرين:** x , y **تحقق المساواة:** $f(x,y)=0$ (١٢ , ٤)

إذا كانت المشتقتان: $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$ متصلتين داخل قرص دائري مفتوح (لا يحوي نقاط محيطه)،وكان : $\frac{\partial f}{\partial y}$ لا يساوي الصفر عند نقطة (x , y) داخل القرص تحقق المساواة (٤ , ١٢) ، عندئذ توجد دالة ضمنية F قاعدتها : $y = F(x)$ ، تحقق المعادلة (٤ , ١٢) ومشتقتها تساوي:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (١٢ , ٥)$$

مثال (١٢ , ١٢)

إذا كان : $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$ (١٢ , ٦)

فأوجد: $\frac{dy}{dx}$

الحل

$\frac{\partial f}{\partial y}=2y , \frac{\partial f}{\partial x}=2x$ إذن استناداً للمساواة (٥ , ١٢) ، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}\left(y \neq 0\right)$$

لاحظ أن المشتقتين : $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$ متصلتان على المستوى IR^2 بأكمله لأنهما كثيرتا حدود، وأن النقاط المحققة للمعادلة تمثل دائرة معادلتها: $x^2+y^2=1$ مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوي 1

وأن: $\frac{dy}{dx}$ يمثل ميل المماس لمنحنى الدائرة وهو معرف عند جميع نقاط الدائرة باستثناء النقطتين A , B المحققتين للشرط : $y = 0$ وهما تقعان على المحور x .

لتكن f دالة بثلاثة متغيرات : x, y, z تحقق المساواة :

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (١٢,٧)$$

إذا كانت المشتقات : $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ من الدرجة الأولى للدالة f متصلة داخل كرة مفتوحة ، وكان $\frac{\partial f}{\partial z}$ لا يساوي الصفر عند نقطة (x, y, z) داخل الكرة تحقق المساواة (١٢,٧) ، عندئذ توجد دالة ضمنية F قاعدتها : $z = F(x, y)$ تحقق المساواة (١٢,٧) بحيث يكون:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

مثال (١٢,١٣)

إذا كان :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \qquad (١٢,٨)$$

فأوجد المشتقتين : $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$

الحل

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$ ، بالتالي فإن:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}, z \neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}, z \neq 0$$

لاحظ أن المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالة f هي كثيرات حدود وهي متصلة على الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد بأكمله R^3.

لاحظ أيضاً أن المعادلة (١٢,٨) تمثل كرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها الوحدة . من جهة أخرى فإن : $z=0$ يوافقها نقاط الدائرة $x^2+y^2=1$ الواقعة في المستوى xy وعند نقاط هذه الدائرة المشتقتان: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ غير موجودتين.

مثال (١٢,١٤)

إذا كانت المعادلة: $x^3z-5y^4=11$ ، تعرف دالة ضمنية من الشكل: $z=F(x,y)$ (مشتقاتها الجزئية موجودة ومتصلة، فأوجد: $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$.

الحل

لنكتب المعادلة على الشكل: $f(x,y,z)=x^3z-5y^4-11=0$

من الملاحظ أن: $\frac{\partial f}{\partial z}=x^3 , \frac{\partial f}{\partial y}=-20y^3 , \frac{\partial f}{\partial x}=3x^3z$

إذن:
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\frac{3x^2z}{x^3}=-\frac{3z}{x} \quad (x\neq 0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\frac{-20y^3}{x^3}=20\frac{y^3}{x^3} \quad (x\neq 0)$$

مثال (١٢,١٥)

إذا كانت المعادلة: $y^3=1-x^2\sin(xy)$ ، تعرف دالة ضمنية من الشكل: $y=F(x)$ (مشتقتها موجودة ومتصلة فأوجد: $\frac{dy}{dx}$

الحل

لنكتب المعادلة على الشكل : $f(x,y)=y^3+x^2\sin(xy)-1=0$

من الملاحظ أن :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin(xy) + x^2 \cos(xy) \cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x^2 \cos(xy) \cdot x$$

لكن :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

إذن:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x \sin(xy) + x^2 y \cos(xy)}{3y^2 + x^3 \cos(xy)} \quad (\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0)$$

مثال (١٦ , ١٢)

إذا كانت المساواة : $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$

تعرف دالة ضمنية من الشكل : $z = F(x, y)$ مشتقاتها الجزئية موجودة ومتصلة ، فأوجد:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$$

الحـــل

تكتب المعادلة على الشكل:

$$f(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1 = 0$$

لكن :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y - z \sin x, \frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + \cos z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -y \sin z + \cos x$$

بالتالي، فإن :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos y - z \sin x}{-y \sin z + \cos x}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-x \sin y + \cos z}{-y \sin z + \cos x}$$

تمارين (١٢,٣)

١) أوجد $\frac{dy}{dx}$، فيما يلي:

أ) $x^2+y^2-4xy=0$

ب) $-1+xy+ln(e^{xy}+e^{-xy})=0$

ج) $x^2-2xy+y^2+x+y-2=0$

د) $y=x+lny$

هـ) $y+xe^{y^2}+x=0$

(الدوال السابقة يعرف كل منها دالة ضمنية من الشكل $y=F(x)$ مشتقتها موجودة ومتصلة)

٢) أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$، $\frac{\partial z}{\partial y}$ إذا كان :

ا) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$

ب) $x^2y+y^2z+z=1$

ج) $y=e^{xz}$

د) $y^2Ln(xy)+z^2=2$

هـ) $zsin^2(x+2y)-z^2x=2$

و) $zsin(x^2+y^2)=3$

(المعادلات السابقة تعرف كل منها دالة ضمنية من الشكل: $z=F(x,y)$ مشتقاتها الجزئية من الرتبة الأولى موجودة ومتصلة على منطقة D) .

الفصل الثالث عشر

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى
THE FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

لتكن f دالة بمتغير واحد x معرفة بالمساواة $f(x)=y=e^{-x}$. من الواضح أن مشتقتها الأولى y'، تساوي $y'=-e^{-x}$. المتغير غير المستقل y والذي يتبع في تغيره المتغير المستقل x والمشتقة y' يرتبطان بالمساواة : $y+y'=0$. نطلق على هذه المعادلة ، بالمعادلة التفاضلية.

بشكل عام : أي علاقة تربط المتغير المستقل x والمتغير y التابع له ومشتقات y المختلفة ، ومن الشكل : $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})=0$

تسمى بالمعادلة التفاضلية من الرتبة n ، و n هو رتبة أعلى مشتقة في هذه المعادلة.

فمثلا: $y'+y=x^2$ ، هي من الرتبة الأولى .

والمعادلة $y''+2y'+y=x$ هي من الرتبة الثانية.

اهتمامنا هنا يتركز على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.

تعريف(١ ,١٣)

حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ومن الشكل : $F(x, y, y')=0$

هو إيجاد جميع الدوال من الشكل : $y=f(x)$ والتي تحقق هذه المعادلة .

نسمي مجموعة حلول المعادلة التفاضلية ، بالحل العام لها .

سنطلق فيما يلي على y قيمة الدالة f عند x بالدالة تجاوزاً و للتسهيل.

مثال (١ , ١٣)

برهن أن : $y = e^{-x}(x+2)$ ، حل للمعادلة التفاضلية : $y' + y = e^{-x}$

الحل

من الواضح أن: $y' = -e^{-x}(x+2) + e^{-x}$. بالتعويض عن y و y' بما يساويهما في المعادلة التفاضلية ، نجد أنها محققة. لاحظ أن:

$$y' + y = -e^{-x}(x+2) + e^{-x} + e^{-x}(x+2) = e^{-x}$$

(١ , ١٣) المعادلات التفاضلية القابلة للفصل
The Separable Differential Equations

الشكل النموذجي لهذا النوع من المعادلات ، هو :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}, h(y) \neq 0$$

وهذه تكتب على الشكل: $h(y)dy = g(x)dx$

لنفرض أن : $g(x)$ و $h(y)$ قابلتان للتكامل .

بتكامل طرفي المعادلة السابقة ، نجد : $\int h(y)dy = \int g(x)dx$

أو : $H(y) = G(x) + c$ (c ثابت اختياري) والمعادلة الأخيرة تعبر ضمنياً عن y كدالة في المتغير x ، والمتغير y يمثل حل المعادلة التفاضلية وهو يتبع دوماً ثابتاً اختيارياً c

مثـــال (٢ , ١٣)

حل المعادلة التفاضلية: $yy' = -x$ ،ثم أوجد الحل الخاص المار بالنقطة $(0,1)$.

الحـــل

لاحظ أن : $y' = \frac{dy}{dx}$ ، بالتالي فإن المعادلة تكتب على الشكل:

$ydy = -xdx$ ....(منفصلة المتحولات)

بتكامل الطرفين ، نجد $\int ydy = -\int xdx$ ومنه : $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$.

(c ثابت اختياري).

بالتالي، فإن: $y^2+x^2=2c$ ....(الحل العام)

لإيجاد الحل الخاص ، نعوض عن إحداثيي النقطة $(0,1)$ في الحل العام ، فنجد :

$1=2c \Leftarrow c=\frac{1}{2}$. بالتعويض عن c بقيمتها في الحل العام نجد :

$x^2+y^2=1$. وهي تمثل دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها الوحدة .

مثال (١٣,٣)

حل المعادلة التفاضلية : $x\cos^2 y+\tan y\,\frac{dy}{dx}=0$

الحـل

لنحاول وضعها على الصورة : $P(x)dx=Q(y)dy$

من الممكن أن نكتب المعادلة على الشكل :

$$x\cos^2 y\,dx=-\tan y\,dy$$

نقسم طرفي المعادلة على $\cos^2 y$ ، فنجد :

$$xdx=-\frac{\sin y}{\cos^3 y}dy=-\sin y\,(\cos y)^{-3}dy$$

(لاحظ أن مشتقة ما بين القوسين في الطرف الثاني هو $-\sin y$)

بتكامل الطرفين نجد:

$\int xdx=\int(\cos y)^{-3}(-\sin y)dy$ ، ومنه : $\frac{x^2}{2}=\frac{(\cos y)^{-2}}{-2}+c$. إذن:

$$x^2=-\frac{1}{(\cos y)^2}+2c \Rightarrow x^2+\sec^2 y=2c$$

(١٣,٢) المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى ، هو :

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)} \quad (y'=\frac{dy}{dx}) \qquad (١٣,١)$$

حيث P,Q دالتان متصلتان على الفترة (a,b)

الحل باستخدام عامل التكميل:

أ) لحل المعادلة (١٣,١) نبحث عن العامل μ والمسمى بعامل التكميل والمعرف بالصورة:

$$\mu = e^{\int P(x)dx} \tag{١٣,٢}$$

ب) نضرب طرفي المعادلة (١٣,١) بهذا العامل فتصبح على الشكل :

$$\mu(y' + P(x)y) = \mu Q(x) \tag{١٣,٣}$$

من الملاحظ أن الطرف الأيسر هو مشتقة للمقدار μy ، بالتالي فإن المعادلة (١٣,٣) تكتب على الصورة :

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu Q(x)$$

بتكامل الطرفين ، نجد :

$$\mu y = \int \mu Q(x)dx + c$$ (c ثابت اختياري)

وبتقسيم الطرفين على μ ، نجد :

$$\boxed{y = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)dx + c\right)} \tag{١٣,٤}$$

مثال (١٣,٤)

حل المعادلة التفاضلية: $y' + y = e^{-x}$ ،

ثم أوجد الحل الخاص المار بالنقطة $(0,1)$

أ) لاحظ أن: $P(x) = 1$ ، بالتالي فإن μ ،يساوي :

$$\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int dx} = e^{x}$$

ب)لاحظ أن : $Q(x) = e^{-x}$، إذن :

$$\int \mu Q(x)dx = \int e^{x}e^{-x}dx = \int dx = x$$

ج) واستناداً للمعادلة $\boxed{y = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)dx + c\right)}$،فإن:

$$y = \frac{1}{e^{x}}(x + c) = xe^{-x} + ce^{-x}$$ (c ثابت اختياري)

الحل الخاص: من الملاحظ أن النقطة $(0,1)$ تحقق المعادلة السابقة ، إذن: $c = 1$ ، بالتالي فإن الحل الخاص هو : $y = e^{-x}(x + 1)$

مثال (١٣,٥)

حل المعادلة التفاضلية : $xy' + y = xe^{-x} \quad (x > 0)$ (١٣,٥)

الحـــل

المعادلة ليست على الشكل النموذجي . لنقسم طرفي المعادلة على x ، فنجد :

$$y' + \frac{1}{x}y = e^{-x}$$

أ) من الملاحظ أن : $P(x) = \frac{1}{x}$ ، بالتالي فإن :

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

ب) لاحظ أن : $Q(x) = e^{-x}$ ، إذن :

$$\int \mu Q(x)dx = \int xe^{-x}dx$$

لنكامل بالتجزيء : لنضع $du = e^{-x}dx$، $v = x$.بالتالي فإن:

$u = -e^{-x}$، $dv = dx$.إذن:

$$\int xe^{-x}dx = uv - \int udv = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

ج) فالحل المطلوب :

$$y = \frac{1}{\mu}(\int \mu Q(x) + c) = \frac{1}{x}(-xe^{-x} - e^{-x} + c)$$

بالتالي فإن : $y = -e^{-x} - \frac{e^{-x}}{x} + \frac{c}{x}$

مثال (١٣,٦)

حل المعادلة التفاضلية : $y'\sin x + 2y\cos x = \frac{1}{\sin x}$

الحـــل

نقسم طرفي المعادلة على $\sin x$ فنجد: $y' + \frac{2\cos x}{\sin x}y = \frac{1}{\sin^2 x}$

أ) عامل التكميل : $\mu = e^{2\int \frac{\cos x}{\sin x}dx} = e^{2\ln(\sin x)} = e^{\ln(\sin^2 x)} = \sin^2 x$

(لاحظ عند تكامل الكسر : $\frac{\cos x}{\sin x}$ ، أن البسط مشتقة للمقام)

(فرضنا أن : $0 < \sin x$ ، ونحصل على نفس الحل إذا كان : $\sin x < 0$)

ب)لاحظ أن : $\int \mu Q(x)dx = \int \sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = x$

ج)إذن الحل ، هو : $y = \frac{1}{\mu}(\int \mu Q(x) + c)$

$$= \frac{1}{\sin^2 x}(x + c) = \csc^2 x (x + c)$$ (لاحظ أن : $\frac{1}{\sin x} = \csc x$)

تمارين (١,١٣)

حل المعادلات التفاضلية التالية :

١) $\sec^2 x dx - e^y dy = 0$ ٢) $\sec x y' = \csc y$

٣) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ ٤) $x(1+y)dx - (1+x^2)dy$

٥) $xy^3 dx + e^{x^2} dy = 0$ ٦) $x \tan y \frac{dy}{dx} = 1$

٧) $ye^{2x} dx = (4+e^{2x})dy$ ٨) $x\cos^2 y dx + \tan y dy = 0$

٩) حل المعادلة التفاضلية التالية : $y' = xe^{y-x^2}$ ، ثم أوجد الحل الخاص المار بالنقطة $(e,0)$

حل المعادلات التفاضلية التالية :

١٠) $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x}$ ١١) $x\frac{dy}{dx} + y = x^4$

١٢) $x^2 \frac{dy}{dx} + y = 1$ ١٣) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{\sin x}{x}$

١٤) حل المعادلة التفاضلية : $y' = -2y + 4x$ ثم أوجد الحل الخاص المحقق للشرط $y(0) = 1$.

الفصل الرابع عشر

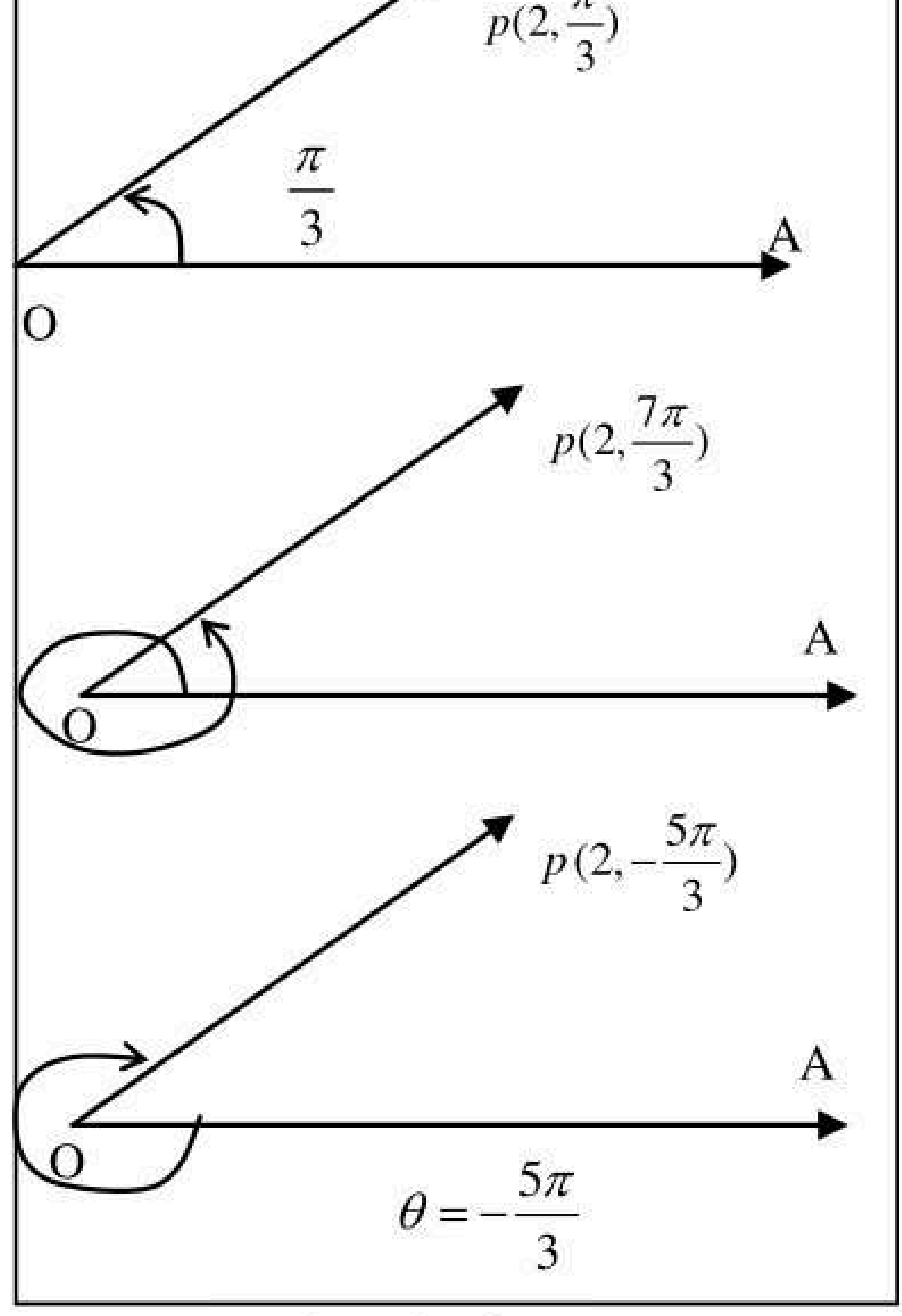
المعادلات الوسيطية والإحداثيات القطبية
PARAMETRIC EQUATIONS AND POLAR COORDINATES

(١ , ١٤) المنحنيات القطبية
The Polar Curves

الإحداثيات القطبية (Polar Coordinates)

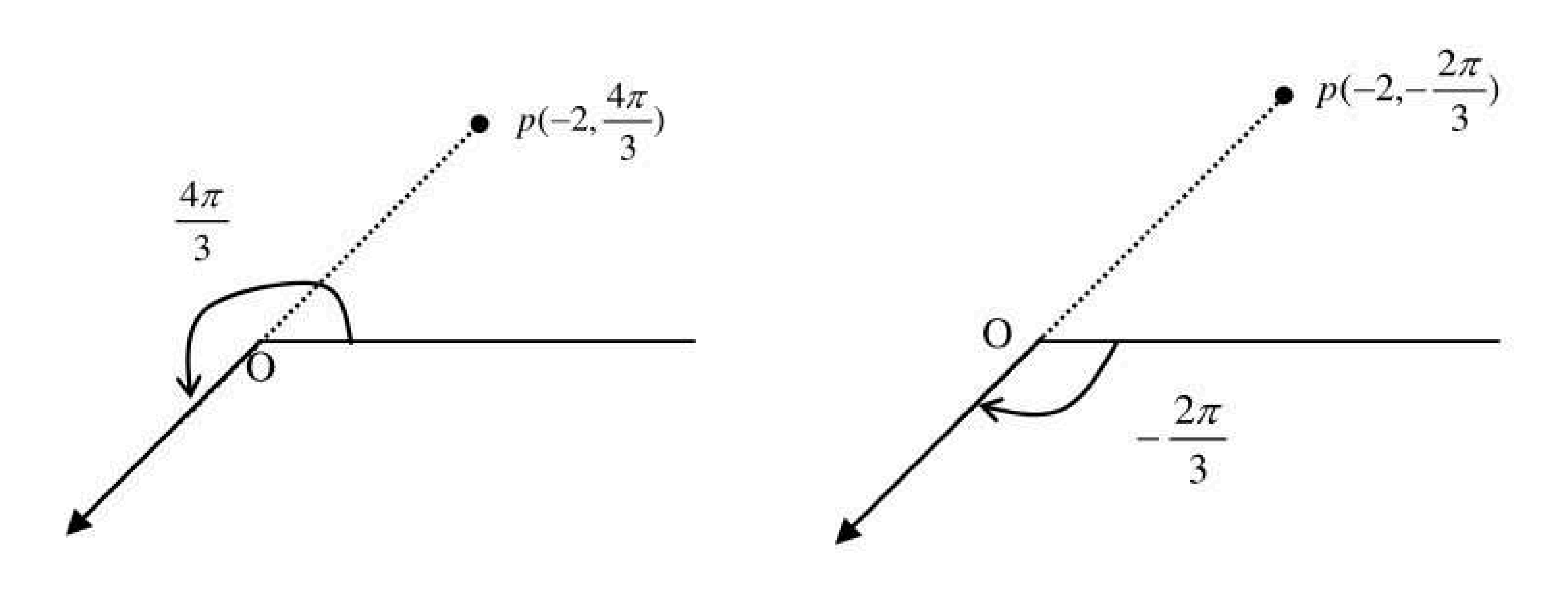
نعلم أن النقطة p في المستوي الديكارتي تتحدد بزوج مرتب من الأعداد الحقيقية (x,y). سنعرض الآن لطريقة أخرى لتحديد هذه النقطة. لتكن O نقطة في المستوى ندعوها بالقطب (أو نقطة الأصل) ولنرسم في هذا المستوى نصف مستقيم موجه OA] (ندعوه بالمحور القطبي) (Polar Axis).

لتحديد أية نقطة p (لا تنطبق على O) في هذا المستوى (ندعوه بالمستوي القطبي)،ندير المحور القطبي حول O بزاوية موجهة قياسها θ حتى ندرك النقطة p (سواء بالجهة الموجبة المخالفة لاتجاه عقارب الساعة أو الجهة السالبة).



شكل (١ , ١٤).

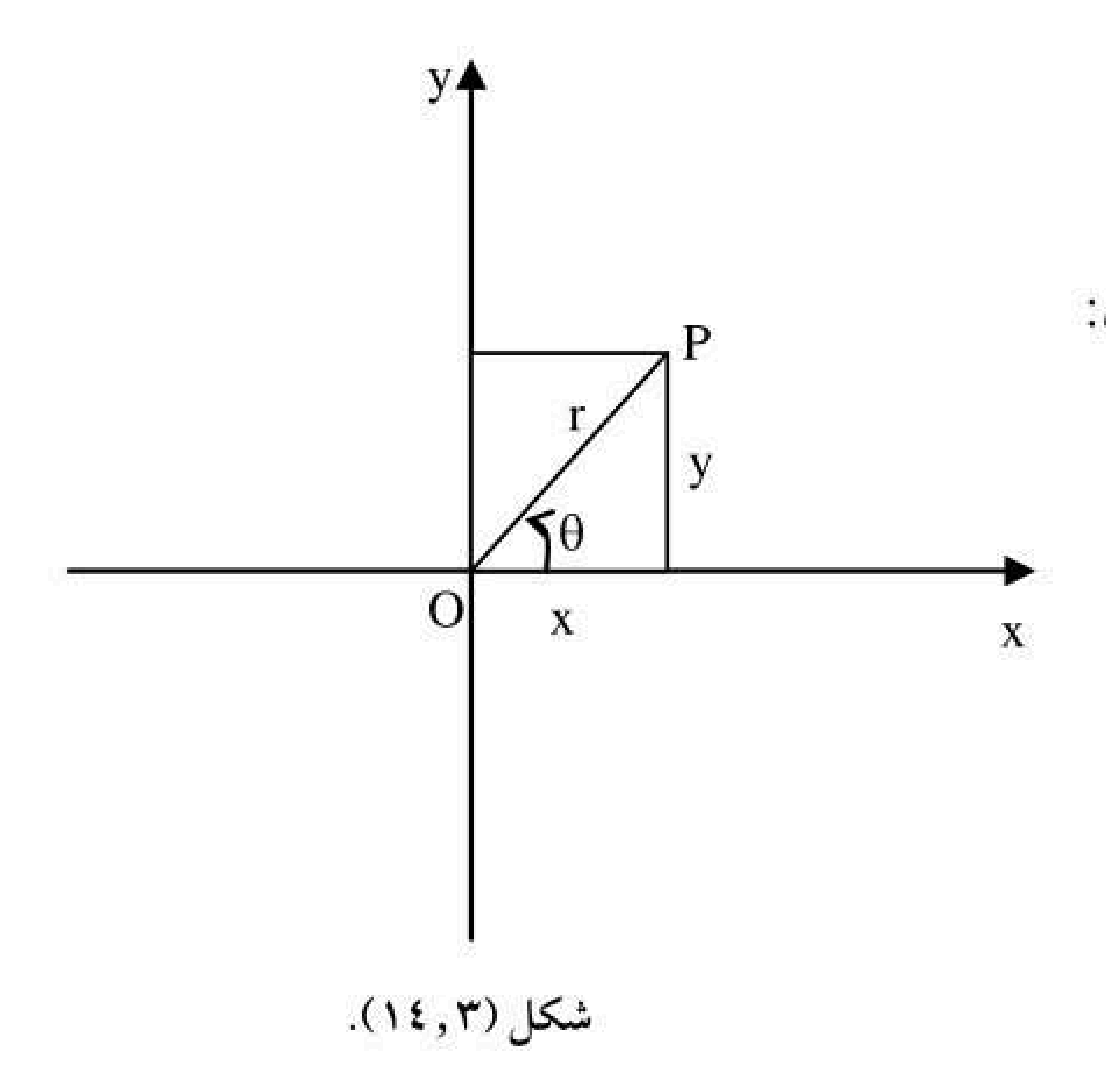
إذا كان $|Op|=r(r>0)$ ، فإن الزوج المرتب (r, θ) كاف لتحديد النقطة p . وهناك عدة طرق لتحديد هذه النقطة فمثلا: $p(2,\frac{\pi}{3})$ تتحدد كما في الشكل (١ , ١٤). إذا اعتبرنا Op محورا موجها وافترضنا r هو إحداثي النقطة على هذا المحور، فإنه يمكن للعدد r أن يأخذ قيما موجبة وقيما سالبة وفي هذه الحالة فإن نظير النقطة: $p(r, \theta)$ بالنسبة للقطب O هي النقطة $p'(-r,\theta)$. لاحظ أن النقطة $p(2,\frac{\pi}{3})$ تتحدد أيضا بالصورتين التاليتين:



شكل (٢ , ١٤).

(٢) العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات القطبية.

يمكن أن نستنتج من الشكل (١٤-٣) أن:



شكل (٣ , ١٤).

(أ) $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$

(ب) $\tan\theta = \frac{y}{x}$ ، $r^2 = x^2 + y^2$ (١٤ , ١)

كما يمكن أن نثبت صحة العلاقات في (١ , ١٤) عندما يكون $\overrightarrow{0p}$ محورا موجها وتأخذ θ جميع القيم الممكنة.

مثـــال (١ , ١٤)

اكتب المعادلات التالية بالشكل القطبي:

(١) $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (٢) $(x^2 - y^2)^2 = x^2 + y^2$

(٣) $ax + by = c$ $(c \neq 0)$ ، a,b لا تساويان الصفر معا.

الحـــل

(١) بالتعويض عن قيمتي x,y بما يساويهما من العلاقة (١ , ١٤)، نجد:

$r^2 - 2r\cos\theta = 0$ وبفرض $r \neq 0$ ، فإن $r = 2\cos\theta$

لاحظ أنه بالتعويض عن θ بالقيمة $\frac{\pi}{2}$ ، نجد $r = 0$، إذن:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow r = 2\cos\theta$$

وهذه معادلة دائرة مركزها (1,0) وطول نصف قطرها الوحدة.

(٢) بالمثل فإن المعادلة ا لقطبية للمنحني: $(x^2 - y^2)^2 = x^2 + y^2$ هي:

$$\Leftarrow (r \neq 0) r^2\cos^2 2\theta = 1 \Leftarrow (r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)^2 = r^2$$

$$r = \pm\frac{1}{\cos 2\theta} \Leftarrow r^2 = \frac{1}{\cos^2 2\theta}$$

من الملاحظ أن نقطة الأصل هي حل للمعادلة الديكارتية ولا يظهر في الصورة الأخيرة للمعادلة القطبية.

(٣) المعادلة القطبية للمنحني هنا، هي:

$$r = \frac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta} \Leftrightarrow r(a\cos\theta + b\sin\theta) = c$$

وهذه معادلة مستقيم لا يمر بنقطة الأصل.

المنحني القطبي

نسمي مجموعة النقاط (r, θ) في المستوي القطبي والتي تحقق المساواة التالية:

$$r = f(\theta) \quad (١٤ ,٢)$$

ببيان المعادلة القطبية أو المنحني البياني للمعادلة القطبية (٢ , ١٤). فمثلا المعادلة: $r = 1$ تمثل بيانيا دائرة مركزها القطب وطول نصف قطرها الوحدة.

تعريف (١ , ١٤)

نقول إن المنحني البياني للمعادلة: $r = f(\theta)$ متماثل بالنسبة للقطب، ذلك إذا تحققت المساواة:

$$f(\theta + \pi) = f(\theta) \quad (١٤ ,٣)$$

هذا يعني أنه إذا كانت النقطة (r, θ) من نقاط المنحني، فإن النقطة: $(r,\pi+\theta)$ هي أيضاً من نقاط المنحني، شكل (٤ , ١٤)(أ).

تعريف (٢ , ١٤)

نقول إن المنحني البياني للمعادلة (٢ , ١٤) متناظر بالنسبة للمحور القطبي، ذلك إذا تحققت المساواة:

$$f(-\theta) = f(\theta) \quad (١٤ ,٤)$$

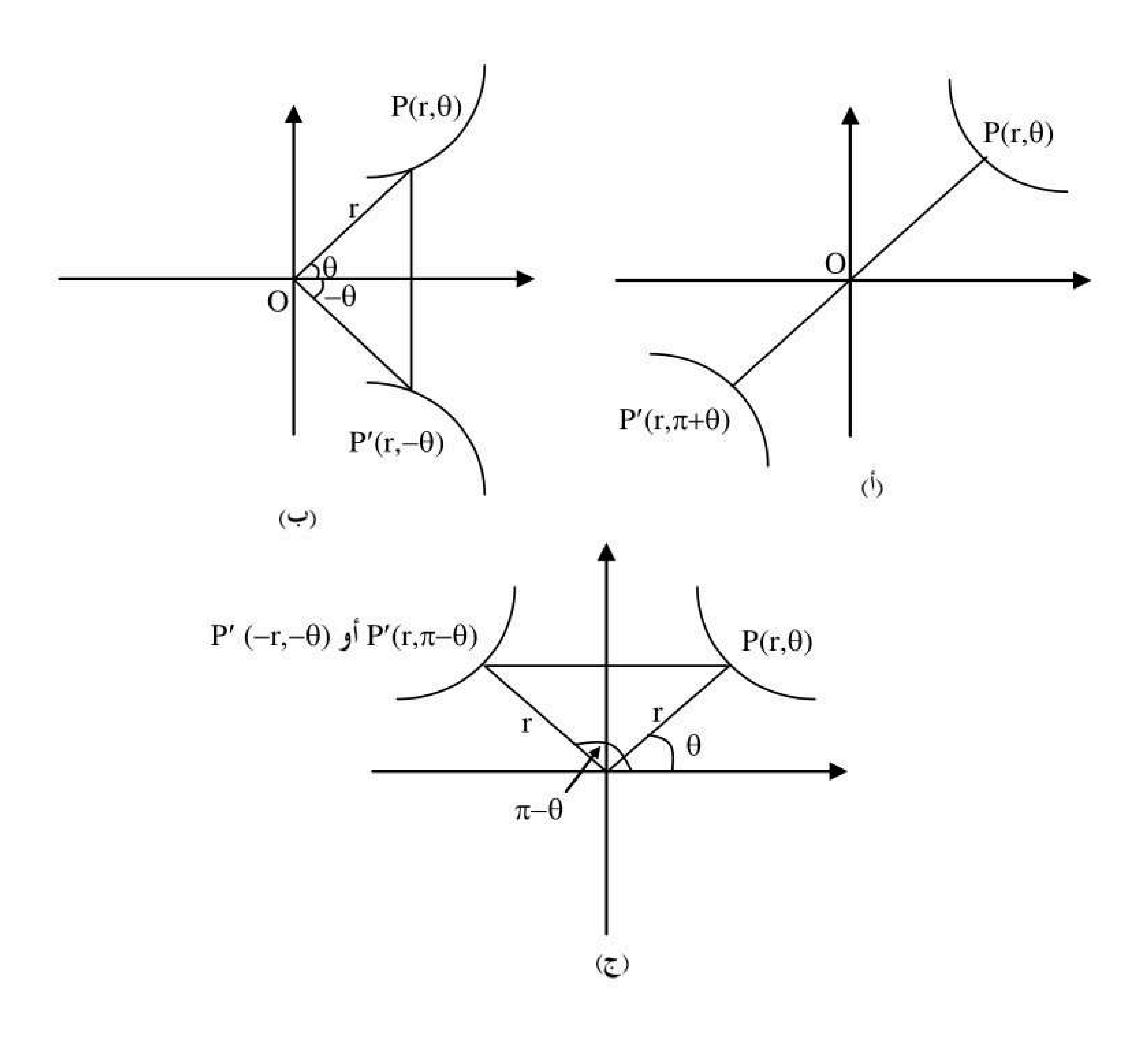
هذا يعني أنه إذا كانت النقطة (r, θ) من نقاط المنحني، فإن النقطة:
$(r,-\theta)$ هي أيضا من نقاط المنحني، شكل (٤ , ١٤) (ب).

تعريف (٣ , ١٤)

نقول إن المنحني البياني للمعادلة (٢ , ١٤) متناظر بالنسبة للمحور y (العمودي على المحور القطبي)، ذلك إذا تحققت المساواة:

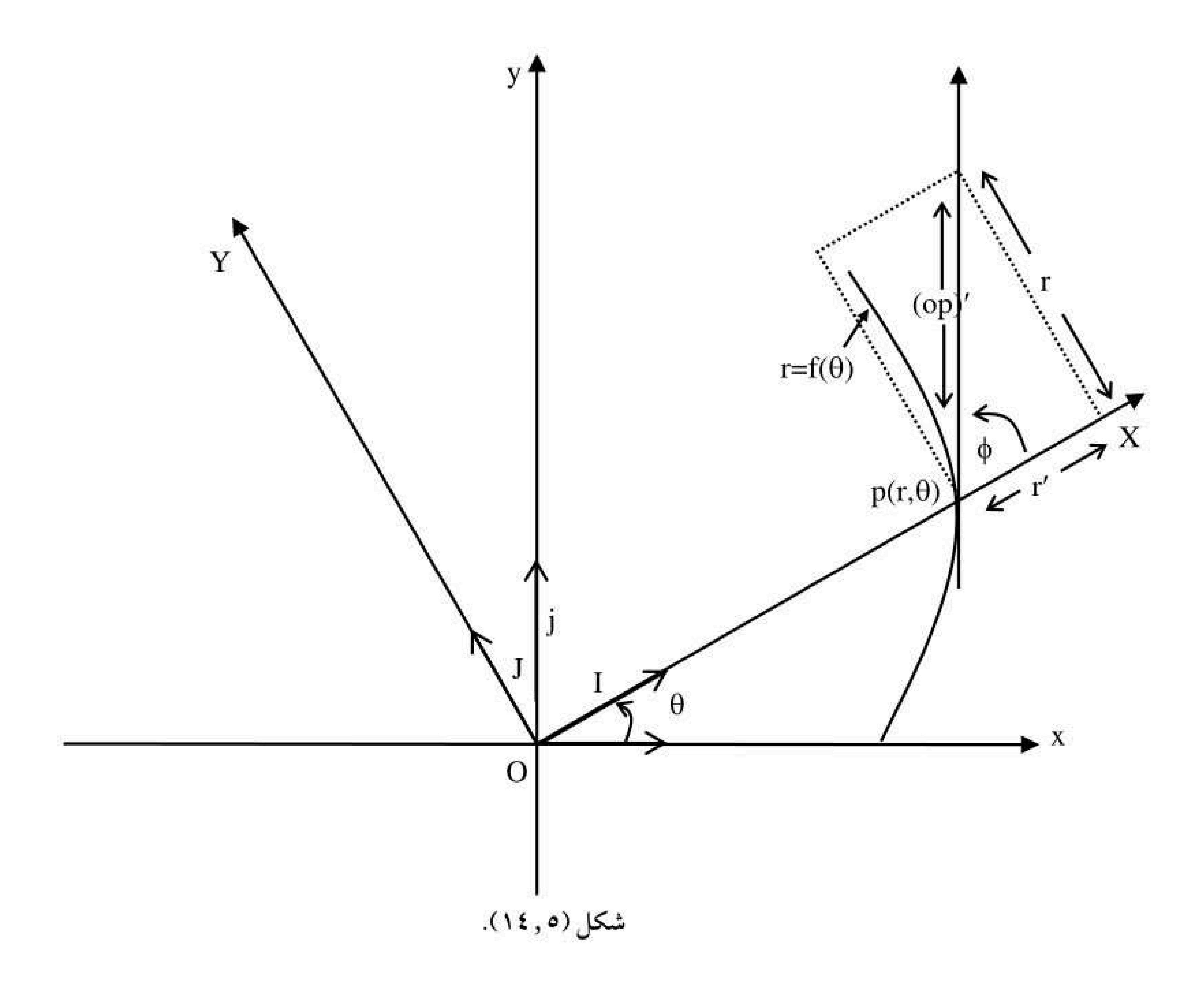
$f(\pi-\theta) = f(\theta)$ ، أو المساواة: $f(-\theta) = -f(\theta)$ (١٤ ,٥)

هذا يعني أنه إذا كانت النقطة (r, θ) من نقاط المنحني، فإن النقطـة $(r,\pi-\theta)$ أو النقطـة: $(-r,-\theta)$ هـي أيضا من نقاط المنحني، شكل (٤ , ١٤) (جـ).



شكل (٤ , ١٤).

زاوية المماس لمنحن قطبي



شكل (٥ , ١٤).

ليكن X,Y ، المحورين الإحداثيين الناشئين من المحورين x,y بدوران حول المحور x بزاوية قياسها θ كما هو موضح في الشكل (٥ , ١٤).

ليكن I , J متجهي الوحدة المحمولين على المحورين الجديدين، وليكن $\vec{i} , \vec{j}$ متجهي الوحدة المحمولين على المحورين القديمين x,y . بفرض أن: $r = f(\theta)$ المعادلة القطبية للمنحني C وأن $p(r, \theta)$ نقطة منه. فمن الممكن أن نكتب:

$$o\vec{p} = rI$$ (r إحداثي p على المحور op)

بالاشتقاق نجد:

$$\frac{dp}{d\theta} = (op)' = \frac{dr}{d\theta} I + r\frac{dI}{d\theta} \qquad (١٤,٦)$$

لكن:
$$I = \cos\theta \vec{i} + \sin\ \theta \vec{j}$$

بالاشتقاق نجد:
$$\frac{dI}{d\theta} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$$

لكن:
$$J = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$$

إذن:
$$\frac{dI}{d\theta} = J$$

تكتب عند ذلك (٦ , ١٤) على الشكل:

$$\boxed{\frac{dp}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} I + rJ}$$

فللمتجه $(op)'$ المماس للمنحني C عند p مركبتان على المحورين X,Y هما r', r. فظل الزاوية ϕ التي يصنعها هذا المماس مع Op تعطى بالصيغة:

$$\boxed{(r' \neq 0) \quad \tan\phi = \frac{r}{r'}} \qquad (١٤,٧)$$

بيان (منحني) معادلة قطبية (The Graph of a Polar Equation)

لرسم بيان أي معادلة قطبية من الشكل: $r = f(\theta)$، نبحث عن:

(١) مجال f الكافي لرسم المنحني، ولنفرض أن r' موجودة على هذا المجال.

(٢) التناظرات الممكنة لهذا المنحني.

(٣) إشارة المشتقة الأولى r' ونستنتج منها سلوك r من تزايد وتناقص.

(٤) الزوايا ϕ المحددة بالعلاقة: $\tan\phi = \frac{r}{r'}$ عند بعض النقاط الميزة وفيما يلي نقدم الطرائق لرسم بعض المنحنيات من خلال الأمثلة التالية:

مثـــال (٢ , ١٤)

ارسم المنحني التالي المحدد بالمعادلة القطبية:

$r = a(1 + \cos\theta) \quad , \quad a > 0$ (منحني القلب)

الحـــل

(١) المجال الكافي لرسم المنحني هو الفترة $[-\pi,\pi]$

(٢) المنحـــــني متناظر بالنسبة للمحور القطبي لأن: $f(\theta)=f(-\theta)$ ، لذا يكفي رسمه على الفترة $[0,\pi]$

(٣)من الملاحظ أن:

$$\tan\phi=\frac{r}{r'}=\frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta}$$

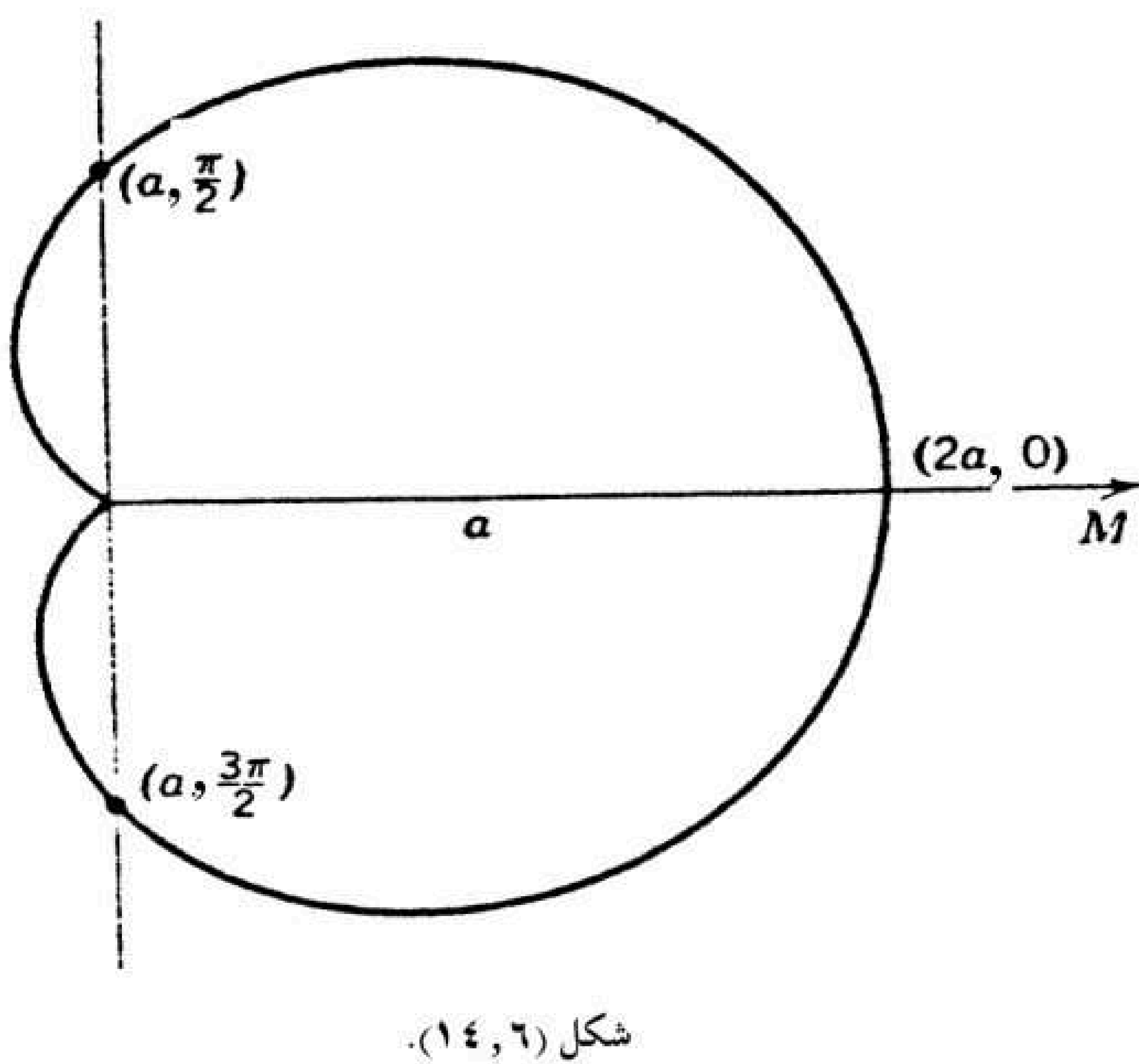
$$=-\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=-\cot\frac{\theta}{2}$$

(٤) دراسة إشارة المشتقة:

مـن الملاحـــــظ أن: $r'=-a\sin\theta$ وأن: $r'=0 \Leftarrow \theta=0\,,\theta=\pi$. وإشارتها كما هو واضح سالبة دوما على الفترة $(0,\pi)$، نلخص ذلك في الجدول التالي:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
r′ (إشارة المشتقة)	0	−	0
r (سلوك r من تزايد وتناقص)	2a	↘	0
ϕ (قيم ϕ عند بعض النقاط)	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π

٥) الرسم



شكل (٦ , ١٤).

مثال (١٤,٣)

ارسم المنحني القطبي (Sketch the polar curve):

$$r = a\theta \quad , \quad a > 0$$ (حلزون أرخميدس)

الحـــل

(١) المنحني متناظر بالنسبة للمحور y لأن: $f(-\theta) = -f(\theta)$ لذا يكفي رسمه على الفـترة $[0,\infty)$ ثم أخذ نظير الجزء الناتج بالنسبة للمحور y.

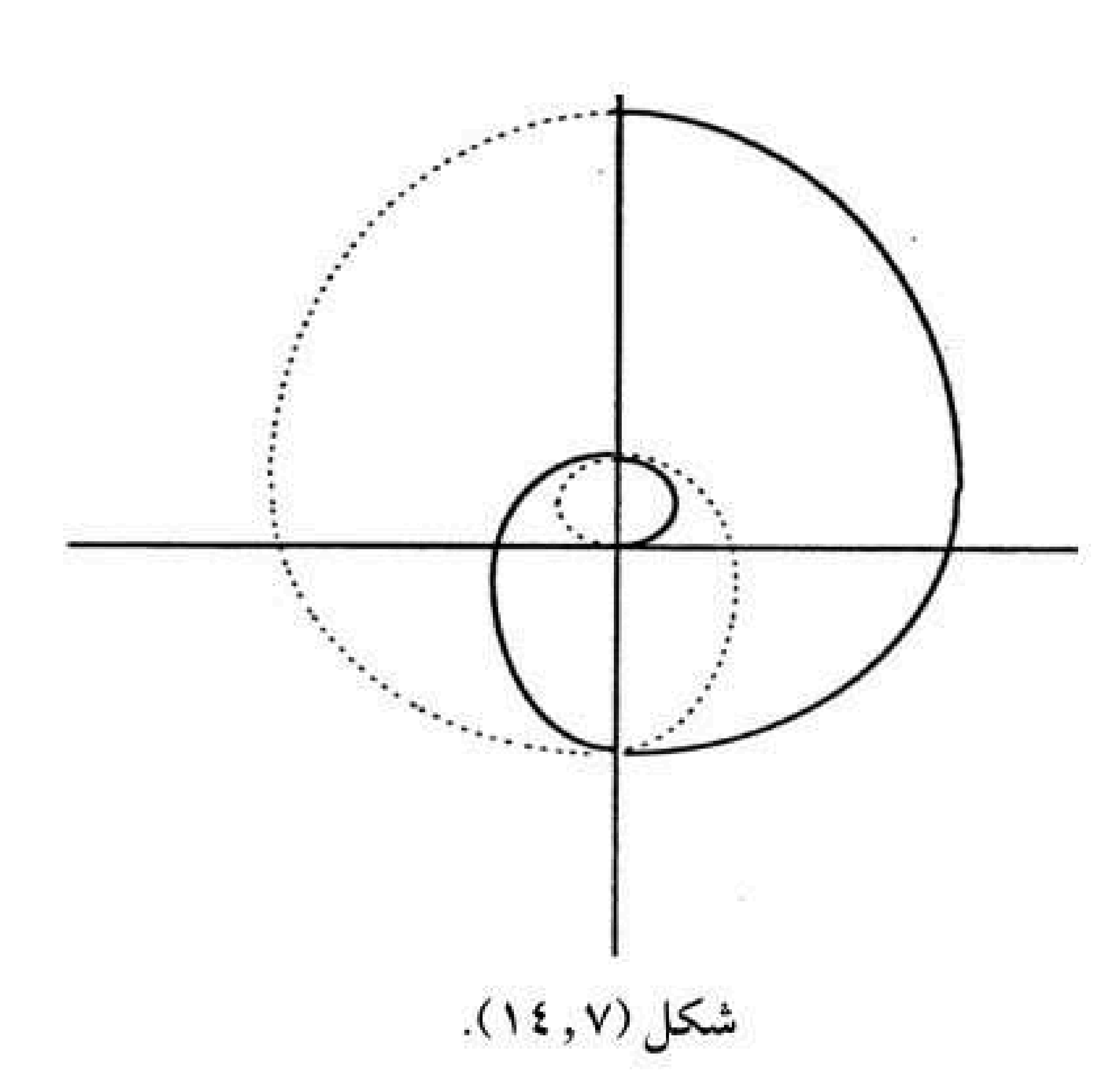
(٢) دراسة إشارة المشتقة:

من الملاحظ أن: $r' = a > 0$ ، ومنه يظهر الجدول التالي:

θ	0		∞
r'		$+$	
r	0	$\nearrow$	∞
$\tan^{-1}\theta = \phi$	0		$\frac{\pi}{2}$

لاحظ أن ϕ تزداد من الصفر حتى $\frac{\pi}{2}$ عندما تزداد θ من الصفر وتنتهي إلى ما لا نهاية.

(٣)الرسم



شكل (١٤,٧).

مثـــال (٤ , ١٤)

ارسم المنحني: $r = f(\theta) = \sin(4\theta)$

الحـــل

(١) من الملاحظ أن: $f(\theta + \frac{\pi}{2}) = f(\theta)$

هـــذا يعـــني أن النقطة $A(r, \theta + \frac{\pi}{2})$ تنشأ من النقطة $p(r, \theta)$ بدوران حول 0 بزاوية قـدرها $\frac{\pi}{2}$. إذن لو رسمنا الجزء من المنحني الموافق للفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ ثم قمنا بعملية دوران لهـذا الجـزء حـول 0 بزاويـة قدرها $\frac{\pi}{2}$ لحصلنا على نصف المنحني. وبإجراء هذه العملية بعد ذلك مرتين متتـابعتين نحصـل عـلى المنحني بأكمله.

(٢) المشتقة الأولى: $r' = 4\cos(4\theta)$

تنعدم المشتقة على الفترة: $[0, \frac{\pi}{2}]$ عند النقاط:

$$\theta = \frac{\pi}{8} \quad , \quad \theta = \frac{3\pi}{8}$$

وبملاحظة أن:

$$\tan\phi = \frac{\sin(4\theta)}{4\cos(4\theta)} = \frac{1}{4}\tan(4\theta)$$

فإن جدول إشارة المشتقة يظهر على الصورة:

θ	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
r'	4	+	0	−	4	−	0	+	
r	0	↗	1	↘	0	↘	1	↗	0
ϕ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{\pi}{2}$		π

المماسات عند بعض النقاط المميزة:

(أ)عند النقطة $(0,0)$: المماس للمنحني يمس المحور القطبي.

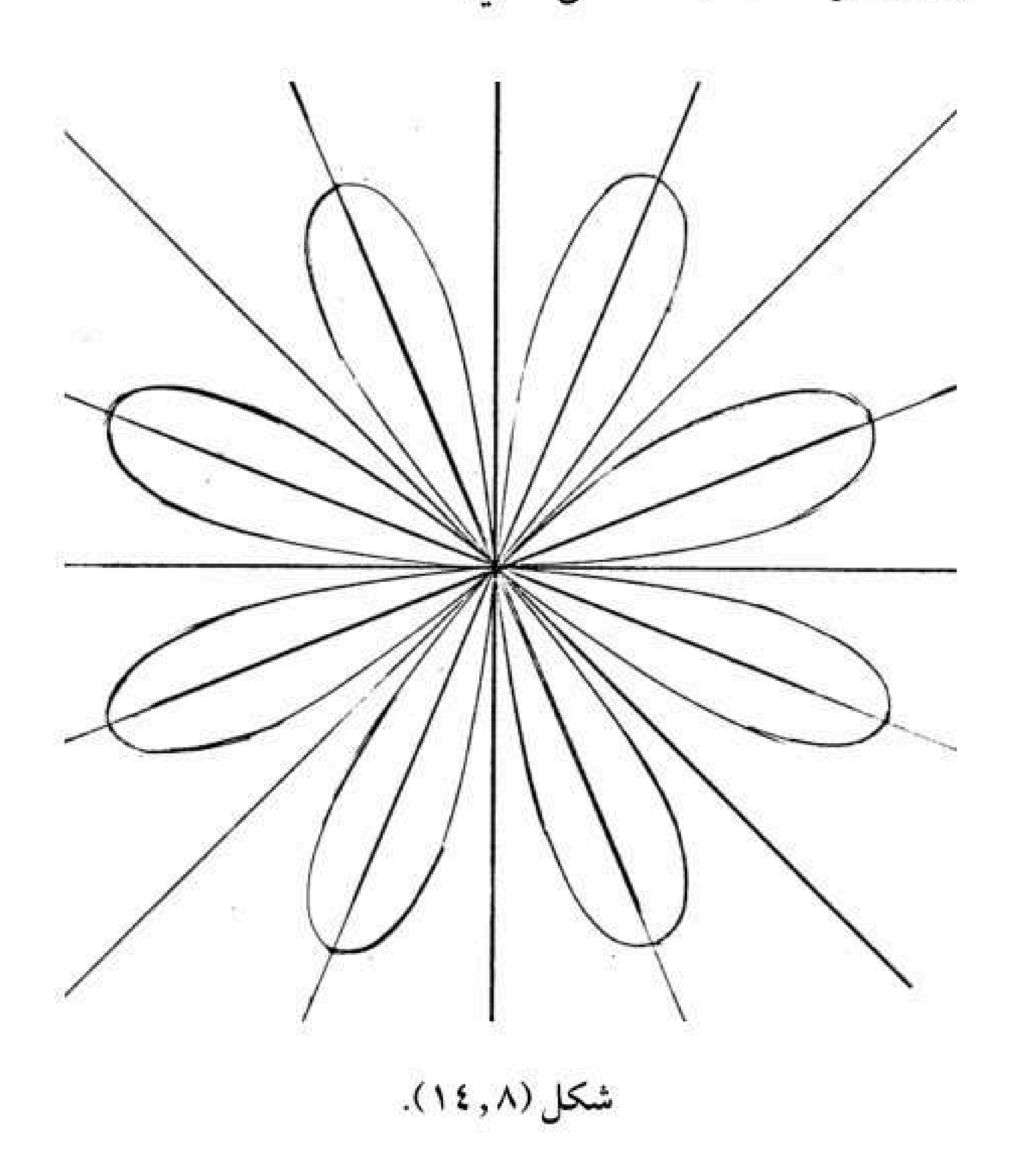
(ب) عند النقطة $(1, \frac{\pi}{8})$: المماس للمنحني عمودي على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{8}$.

(ج) عند النقطة $(0, \frac{\pi}{4})$: المماس للمنحني يمس المستقيم $\theta = \frac{\pi}{4}$.

(د) عند النقطة $(-1, \frac{3\pi}{8})$: المماس للمنحني عمودي على المستقيم $\theta = \frac{3\pi}{8}$.

(هـ) عند النقطة $(0, \frac{\pi}{2})$: المماس للمنحني يمس المحور y (انظر الشكل (٨ , ١٤)).

بإجراء عمليات الدوران الموافقة، نجد الشكل التالي:



شكل (٨ , ١٤).

لاحظ أن المنحني متماثل بالنسبة للمحور القطبي لأن:
$f(-\theta) = -f(\theta)$ ومتماثل حول المحور y، لأن: $f(\pi-\theta) = -f(\theta)$. وبما أن نظير النقطة (r, θ) بالنسبة للمستقيم $\theta = \frac{\pi}{8}$ هي النقطة $(r, \frac{\pi}{4} - \theta)$ وأن $f(\frac{\pi}{4} - \theta) = f(\theta)$ ، فإن المنحني متناظر بالنسبة للمستقيم: $\theta = \frac{\pi}{8}$.

مثـــال (٥ , ١٤)

ارسم المنحني: $r = \sin 3\theta$

الحـــل

١) من الملاحـــظ أن: $f(\theta+\frac{2\pi}{3})=f(\theta)$ ، إذن يكفي رسم المنحـــني على الفترة $[0,\frac{2\pi}{3}]$ فنحصل على الجزء c_1 من المنحني. بدوران c_1 حول 0 بزاوية قدرها $\frac{2\pi}{3}$ نحصل على الجزء الثاني وبتكرار هذه العملية مرة أخرى نحصل على المنحني بأكمله. لاحظ أن المنحني متماثل (تناظر) بالنسبة للمحور y، لأن: $f(-\theta)=-f(\theta)$، ولهذا السـبب يكفـي أن نرسـم الجـزء الأول وأخـذ نظـيره بالنسـبة للمحـور y للحصول على المنحني بأكمله كما سنلاحظ فيما يلي.

٢)المشتقة الأولى: $r'=3\cos 3\theta$

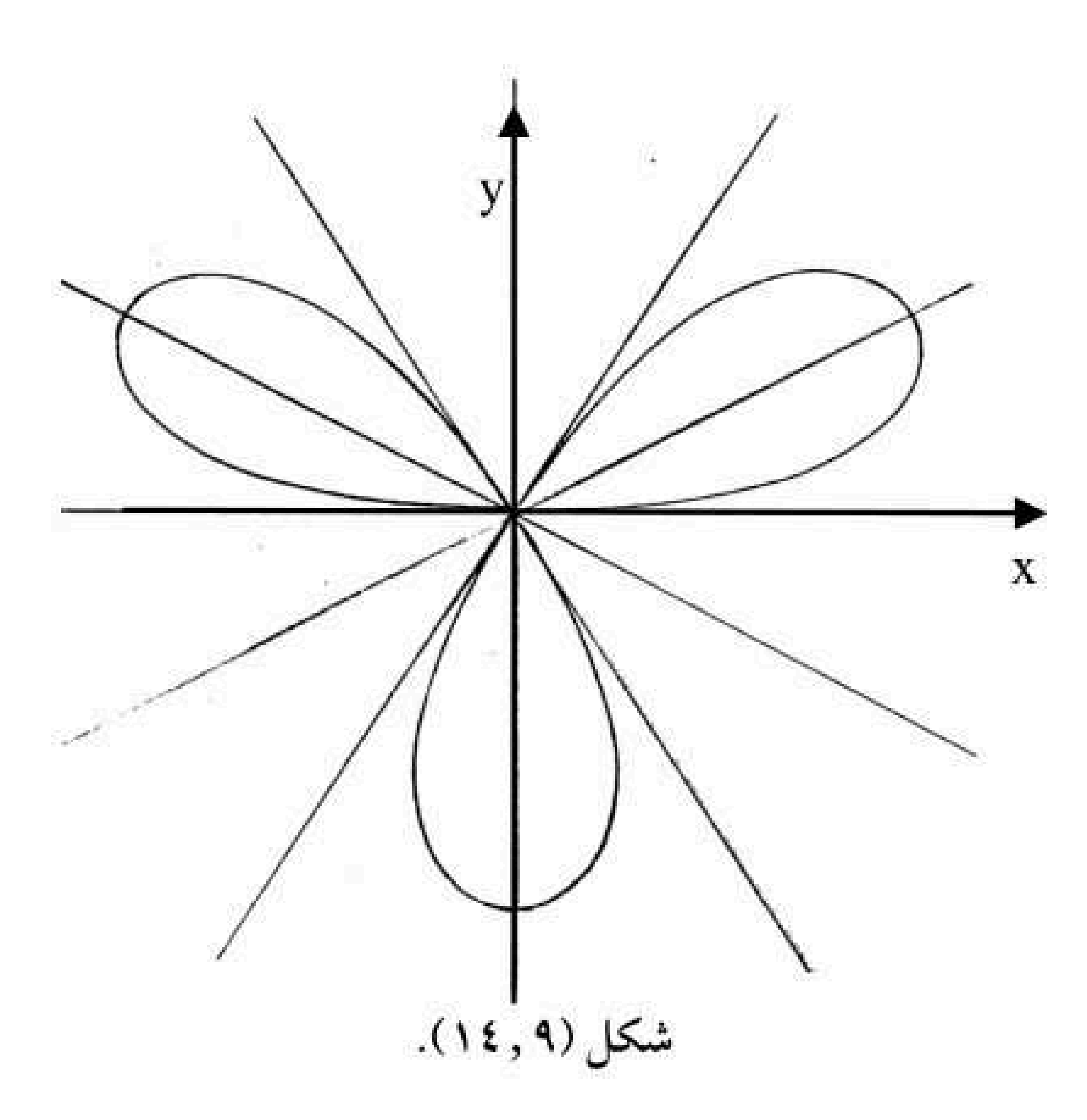
بملاحظة أن المشتقة تنعدم عند: $\theta=\frac{\pi}{6}$ ، $\theta=\frac{\pi}{2}$ وأن:

$$\tan\phi=\frac{\sin 3\theta}{3\cos 3\theta}=\frac{1}{3}\tan 3\theta$$

فإن جدول إشارة المشتقة يظهر على الشكل:

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
r′	3	+	0	−	−3	−	0	+	3
r	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0
φ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{\pi}{2}$		0

(٣) الرسم:



شكل (٩ ,١٤).

مثال (٦ , ١٤)

ارسم المنحنى: $r^2 = \cos 2\theta$

الحــل

١) $r = \pm\sqrt{\cos 2\theta}$

نحصــــل علـى المنحنـي $r = -\sqrt{\cos 2\theta}$ مـن المنحنـي $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ بأخـذ نظيره بالنسـبة للقطب 0.

لنرسم إذن المنحني: $f(\theta) = r = +\sqrt{\cos 2\theta}$

٢) من الملاحظ أن: $f(\theta) = f(-\theta)$ فالمنحني متماثل بالنسبة للمحور x. يكفي رسمه على الفترة $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ $(\cos 2\theta \geq 0)$. بما أنه متماثل بالنسبة للمحور x فيكفي رسمه على الفترة $[0, \frac{\pi}{4}]$

٣) من الملاحظ أن: $r' = \dfrac{-2\sin 2\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}}$ ، إذن: $\theta = 0 \Leftarrow r' = 0$

من جهة أخرى، فإن: $\theta \to \frac{\pi}{4}^{-} \Rightarrow r' \to -\infty$ ، ومنه نحصل على الجدول التالي:

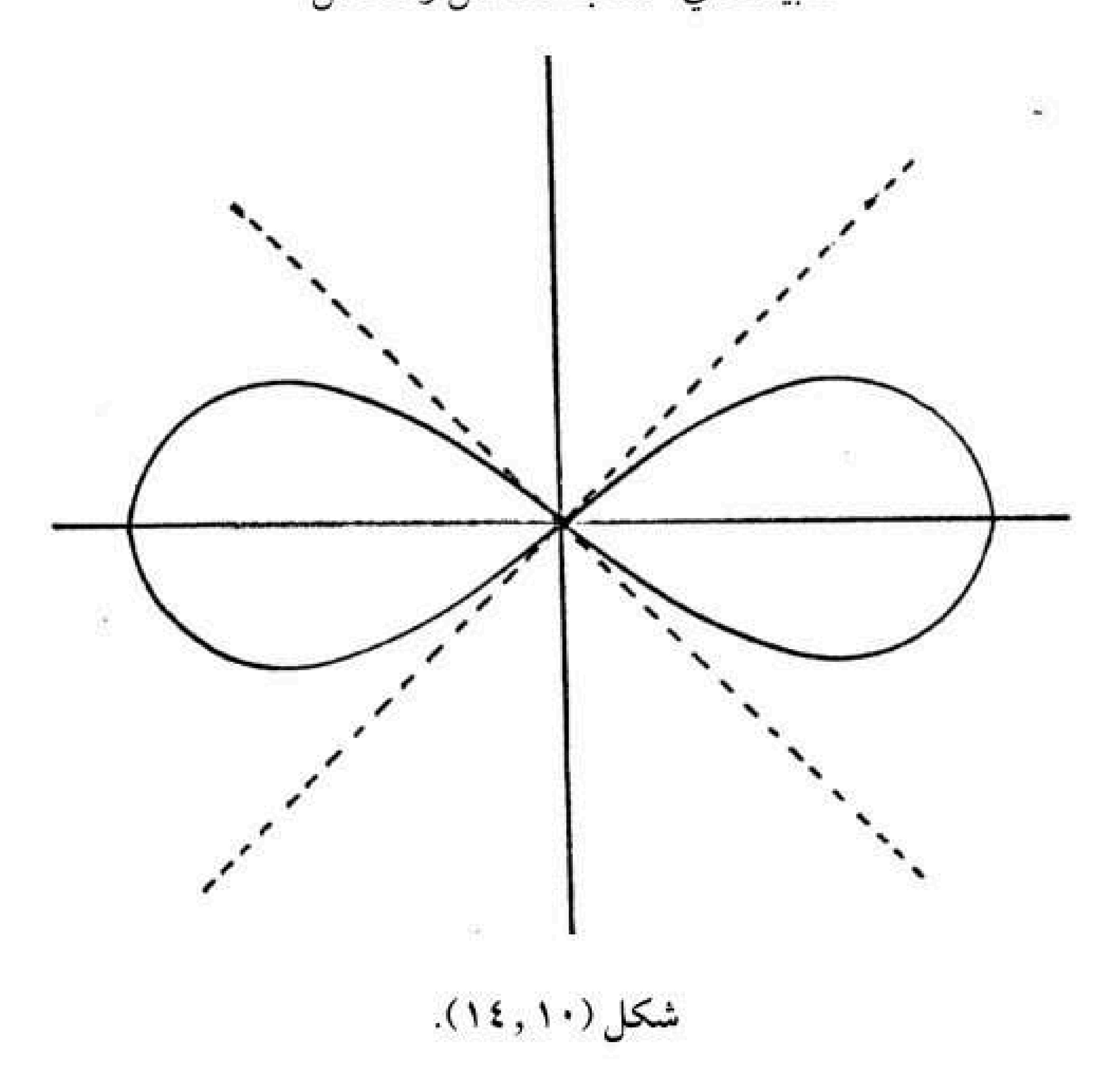
θ	0		$\frac{\pi}{4}$
r′	0	−	−∞
r	1	↘	0
ϕ	$\frac{\pi}{2}$		π

$$\left(\tan\phi = \frac{r}{r'} = -\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\right)$$

٤) المماسات للمنحني عند بعض النقاط المميزة

(أ) عند النقطة (0,1) المماس عمودي على المحور x.

(ب)عند النقطة $(0, \frac{\pi}{4})$ المماس ينطبق على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{4}$.



شكل (١٠ , ١٤).

(٢ , ١٤) المنحنيات الوسيطية
The Parametric curves

لتكن f و g دالتين معرفتين على الفترة I وقابلتين للاشتقاق على هذه الفترة. نسمي مجموعة كل الأزواج المرتبة (x,y) المعرفة بالصورة: $x = f(t)\ ,\ y = g(t)\quad (t\in I)$ بالمنحني الوسيطي.

لرسم بيان هذا المنحني، نبحث عن:

١) مجموعة قيم t الكافية لرسم المنحني.

٢) إشارة المشتقتين g', f' ونقط انعدامها، ثم نحدد سلوك المتغيرين x، y من تزايد وتناقص.

٣) التناظرات الممكنة.

٤) المستقيمات المقاربة.

مثال (١٤-٧)

ارسم المنحني C المعين بالمعادلتين:

$$x = f(t) = t^3 \quad , \quad y = g(t) = t^2$$

الحـــل

١) x, y معرفتان لجميع قيم t.

٢) من الملاحظ أن $f(-t) = -f(t)$ ، $g(-t) = g(t)$. هذا يعني أنه لو كانت (x,y) نقطة من المنحني C، فإن النقطة $(-x,y)$ نقطة أيضا، أي أن C متناظر بالنسبة للمحور y، لذا يكفي رسمه على الفترة $[0,\infty)$ ثم أخذ نظيره بالنسبة للمحور y.

٣) دراسة إشارتي المشتقتين f', g'

من الملاحظ أن: $x' = 3t^2$ ، $y' = 2t$

ومنه، نجد الجدول التالي:

t	0		∞
x′	0	+	∞
x	0	↗	∞
y′	0	+	∞
y	0	↗	∞

من الواضح أن المنحني متزايد على الفترة $[0,\infty)$.

ملحوظة (١ ,١٤)

عند البحث عن النقاط التي يكون عندها المماس موازيا للمحور السينات نبحث عن النقط انعدام y' (شرط أن يكون $x' \neq 0$).

وعند البحث عن النقاط التي يكون عندها المماس موازيا لمحور الصادات نبحث عن نقاط انعدام x' (شرط أن يكون $y' \neq 0$).

وعند انعدام x', y' معا عند نقطة معينة، ندرس نهاية المقدار $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$ عند هذه النقطة لنتعرف على وضع المماس.

ملحوظة (٢ ,١٤)

نعلم أن:

$$\frac{d_2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x'}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\cdot\frac{1}{x'}$$

$$= \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^2}\cdot\frac{1}{x'} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3} \quad , \quad x' \neq 0$$

للبحث عن نقط الانقلاب، ندرس إشارة المقدار $\frac{d_2 y}{dx^2}$ ونقط انعدامه، ثم نحـدد تبعـا لـذلك نقـط الانقلاب إن وجدت.

ففي مثالنا:

$$\frac{d_2 y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} = \frac{6t^2 - 12t^2}{27t^6}$$

$$= \frac{-2}{9t^4} \quad , \quad t \neq 0$$

فالمنحني محدب (مقعر نحو الأسفل) على المجموعة $\mathbb{R}-\{0\}$ ولا يوجد نقط انقلاب له.

٤) من الملاحظ أن x', y' منعدمان معا عند $t = 0$. ومن المساواة:

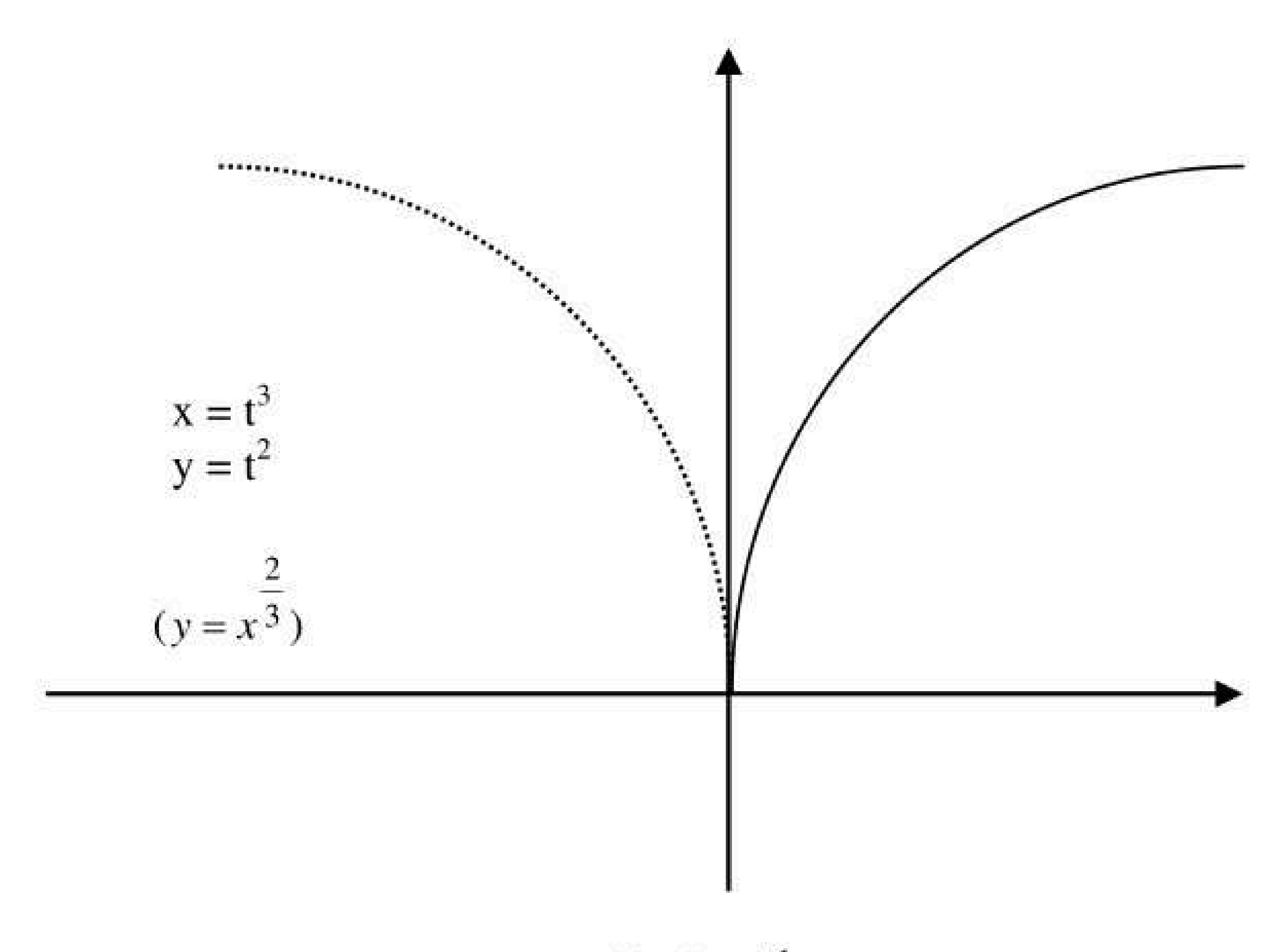
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}$$

نجد أن:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{dy}{dx} = \infty$$

إذن المماس للمنحني عند النقطة (0,0) يوازي المحور y.

(٥) الرسم



شكل (١١, ١٤).

مثــــال (٨ , ١٤)

ارسم المنحني الوسيطي التالي:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad , \quad a > 0$$

الحــل

١) يكفي لرسم المنحني أن تأخذ t مجموعة القيم: $[-\pi,\pi]$.

٢) من الملاحظ أنه عندما تستبدل t بالقيمة t- في معادلتي المنحني، نجد أن (x,y) تستبدل بالنقطة (+x,−y) ، هذا يعني أن المنحني متناظر بالنسبة للمحور x. وعندما نستبدل t بالمقدار π−t ، نجد أن النقطة (x,y) تستبدل بالنقطة (−x,y) ، هذا يعني أن المنحني متناظر (متماثل) بالنسبة للمحور y، إذن المنحني متناظر بالنسبة لنقطة الأصل.

يكفي رسم الجزء الواقع في الربع الأول الموافق للفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$. ثم أخذ نظيره بالنسبة للمحور x وأخذ نظير القسم الناتج بالنسبة للمحور y للحصول على المنحني بأكمله.

٣) المشتقة:

$$x' = -3a\cos^2 t\sin t$$
$$y' = 3a\sin^2 t\cos t$$

من الملاحظ أن:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta = -\tan t \qquad (٨ , ١٤)$$

(θ زاوية المماس للمنحني مع المحور x)

جدول إشارة المشتقة الأولى:

t	0		$\frac{\pi}{2}$
x′	0	−	0
x	a	↘	0
y′	0	+	0
y	0	↗	a
θ	π		$\frac{\pi}{2}$

من الواضح أن المنحني متناقص على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ ويمس المحور x عند النقطة (a,0).
وأيضا يمس المحور y عند النقطة (0,a).

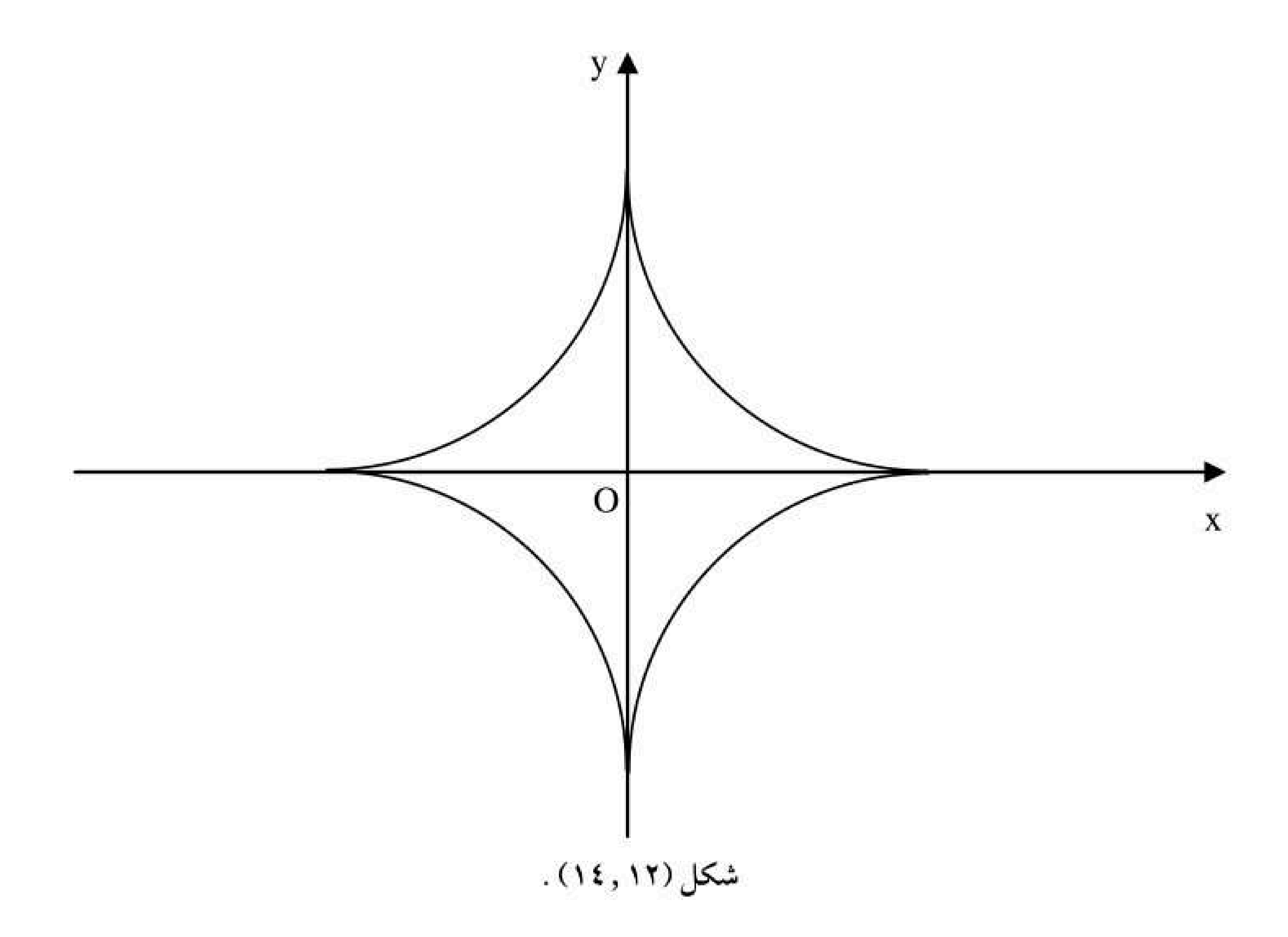
من جهة أخرى:

$$\frac{d_2 y}{dx^2} = -\sec^2 t \frac{dt}{dx} \qquad \text{(بالاستفادة من (٨ , ١٤))}$$

$$= \frac{-\sec^2 t}{-3\cos^2 t \sin t} = \frac{\sec^4 t}{3\sin t}$$

فالمشتقة $\frac{d_2 y}{dx^2}$ موجبة على الفترة $(0, \frac{\pi}{2})$ والمنحني مقعر على هذه الفترة.

نرسم الجزء الواقع في الربع الأول ثم نأخذ جميع التناظرات الممكنة، فنحصل على المنحني بأكمله.



شكل (١٢ , ١٤).

مثـــال (١٤-٩)

ارسم المنحني: $y = t - \frac{1}{3}t^3 \qquad x = t^2$

الحـــل

١) المجال هو: R وبملاحظة أن النقطة (x,y) تستبدل بالنقطة (x,–y) عندما نستبدل t بالمقـدار –t في معادلتي المنحني، فإن المنحني متماثل بالنسبة للمحور y. يكفي رسم الجزء الموافق للفـترة [0,∞) ثم أخذ نظير هذا الجزء بالنسبة للمحور x.

٢) دراسة إشارة المشتقة

من الملاحظ أن:

$$x' = 2t \quad , \quad y' = 1 - t^2$$

بالتالي، فإن:

$$x' = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ،} \quad t = 1 \Leftarrow y' = 0$$

ومنه الجدول التالي:

t	0		1		∞
x'	0	+	2	+	
x	0	↗	1	↗	∞
y'	1	+	0	−	
y	0	↗	$\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$
$\tan^{-1}\frac{y'}{x'} = \theta$	$\frac{\pi}{2}$		0		

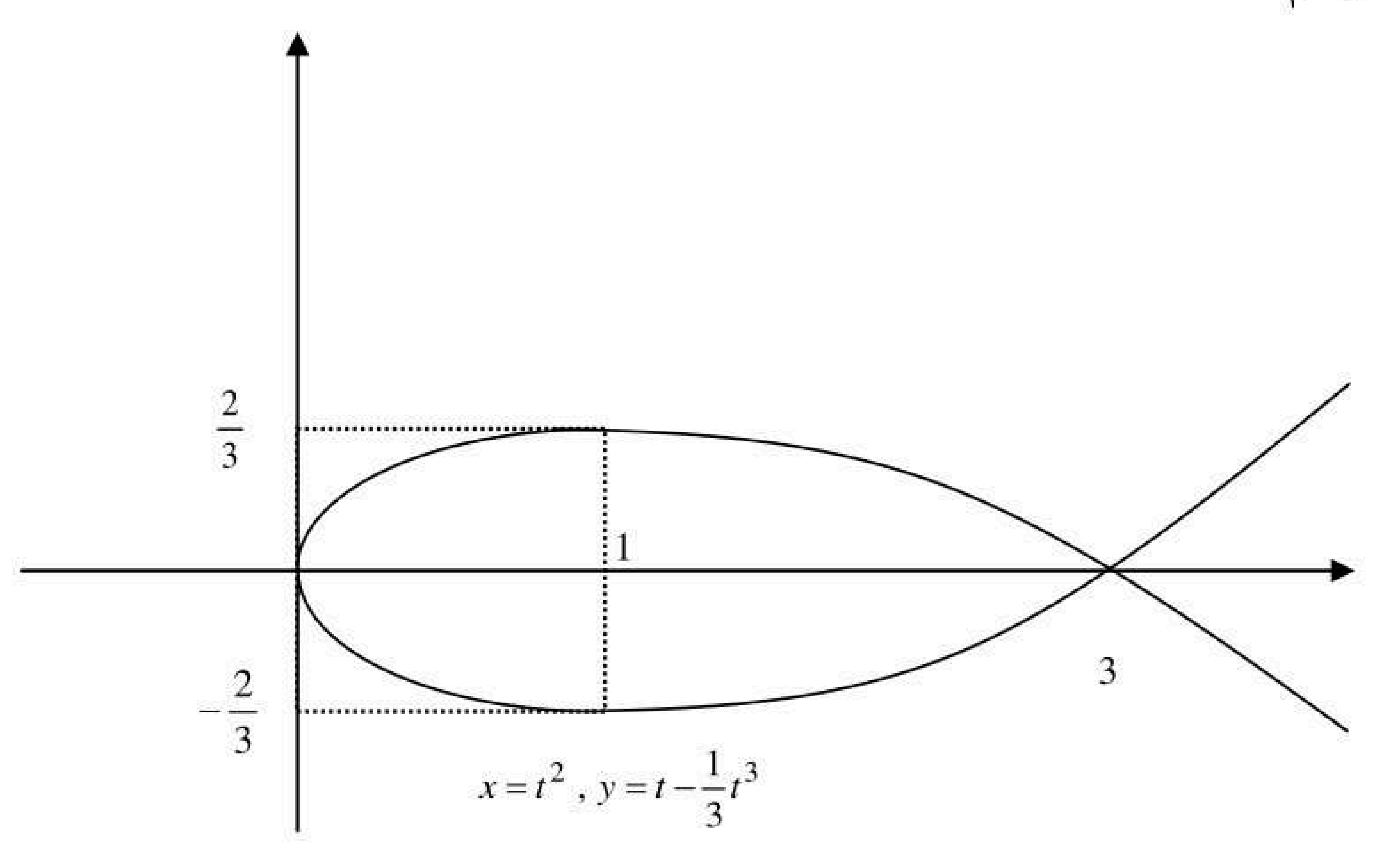
على هذه الفترة فإن المنحني يقطع المحور x عندما: $t = 0$, $t = \sqrt{3}$، وعند ذلك فإن: x = 3، x = 0 . فنقطتا التقاطع مع محوري الإحداثيات هما: (3,0) , (0,0) من جهة أخرى فإن:

$$\frac{d_2 y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}$$

$$= \frac{2t(-2t) - 2(1-t^2)}{8t^3} = \frac{-2t^2 - 2}{8t^3}$$

فالمنحني محدب على الفترة $(0,\infty)$. وهو يمس المحور y عند نقطة الأصل. لاحظ أن للمنحني قيمة عظمى محلية $y(1) = \frac{2}{3}$ ، عند النقطة $(1, \frac{2}{3})$.

الرسم:



شكل (١٣, ١٤).

تمارين (١, ١٤)

ارسم المنحنيات التالية:

١) $y=2x-x^2$

٢) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

٣) $y=\frac{3}{2}(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}})$

٤) $y=\sin^2 x$

٥) $y=x^{\frac{3}{2}}$

٦) $y=e^x$

٧) $(x-4)y^2=x(x-3)$

٨) $y^2=\frac{x^3}{2-x}$

٩) $x^2-y^2=a^2$

١٠) $y=\ln x$

١١) $y=x(x-1)(x-2)$

١٢) $y^3=x$

١٣) $y=\sin x$

١٤) $y=\tan x$

١٥) $xy=m^2$ ١٦) $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$

١٧) $y=\frac{1}{1+x^2}$ ١٨) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

١٩) $a^2y^2=x^2(a^2-x^2)$ ٢٠) $y=\frac{1}{x^2}$

٢١) $x=\ln(\sec y)$ ٢٢) $y=\ln|\sin x|$

٢٣) $y^2=x(x-3)^2$

أوجد النقاط: (r,θ) حيث: $0\le\theta<360$ والتي تـحقــق كلا من أزواج المنحنيات التالية (نقاط التقاطع)، ثم ارسم هذه المنحنيات:

٢٤) $r=\sin\theta\ ,\ r=\cos\theta$ ٢٥) $r=1+\sin\theta\ ,\ r=1+\cos\theta$

٢٦) $r=\cos\theta\ ,\ r=1-\cos\theta$ ٢٧) $r=\sin\theta\ ,\ r=1-\sin\theta$

٢٨) $r=1\ ,\ r=\sin 2\theta$ ٢٩) $r=\sqrt{3}\ ,\ r=2\cos 2\theta$

٣٠) $r=\cos\theta\ ,\ r=\sec\theta$ ٣١) $r=2\sec\theta\ ,\ r=4$

٣٢) $r=\sin\theta\ ,\ r=4-4\cos 2\theta$ ٣٣) $r=\frac{4}{1-\cos\theta}\ ,\ r=4-4\cos\theta$

٣٤) $r=3\csc\theta\ ,\ r=6$ ٣٥) $r=\frac{6}{1+\sin\theta}\ ,\ r=\frac{2}{1-\sin\theta}$

٣٦) $r=3-2\sin\theta\ ,\ r=\sin\theta$ ٣٧) $r=2-\sin\theta\ ,\ r\sin\theta=1$

٣٨) $r=1+2\cos\theta\ ,\ r=\cos\theta$ ٣٩) $r=1+2\sin\theta\ ,\ r=\sin\theta$

٤٠) $r^2=\cos 2\theta\ ,\ r^2=\cos 2\theta$ ٤١) $r=\sqrt{2}\sin\theta\ ,\ r^2=\sin 2\theta$

ملحوظة: المعادلة: $r=\frac{ep}{1\pm e\cos\theta}$ أو $r=\frac{ep}{1\pm e\sin\theta}$ حيث $P>0$ و $e>0$، تمثل قطعا ناقصا إذا كـان $e<1$، وتمثل قطعا زائدا إذا كان $e>1$، وتمثل قطعا مكافئا إذا كان: $e=1$.

ارسم كلا من المنحنيات القطبية التالية:

٤٢) $r=2(1+\cos\theta)$ ٤٣) $r=4\cos^2\theta$ ٤٤) $r=\frac{3}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}$

٤٥) $r = 2\cos3\theta$ ٤٦) $r = 2\sec^2\frac{\theta}{2}$ ٤٧) $r = \sin3\theta$

٤٨) $r^2 = \sin4\theta$ ٤٩) $r = \sin2\theta$

٥٠) $r^2 = 2\cos2\theta$ ٥١) $r = e^{-2\theta}$ ٥٢) $r = \frac{1}{\theta}$

٥٣) $r = 2(1-\sin\theta)$ ٥٤) $\theta = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ ٥٥) $r = 3\theta$

٥٦) ضع المنحني التالي بشكله القطبي ثم ارسمه: $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$

ارسم كلا من المنحنيات الوسيطية التالية:

٥٧) $x = a(t-\sin t)$ ، $y = a(1-\cos t)$ (حيث: $a > 0$)

٥٨) $y = b\sin^3 t$ ، $x = a\cos^3 t$ (حيث: $a,b > 0$)

٦٠) ضع المنحني التالي بشكله الوسيطي ثم ارسمه:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

إرشاد: ضع: $x = 5\cos t$

٦١) ضع المنحني التالي بشكله الوسيطي ثم ارسمه:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad , \quad a > 0$$

إرشاد: ضع: $x = a\cos^3 t$

ارسم كلا من المنحنيات الوسيطية التالية:

٦٢) $x = at - b\sin t$ ، $y = a - b\cos t$

$0 < b \le a$

٦٣) $x = a(2\cos t - \cos2t)$ ، $y = a(2\sin t - \sin2t)$

٦٤) $x = \frac{3at}{1+t^3}$ ، $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$

الفصل الخامس عشر

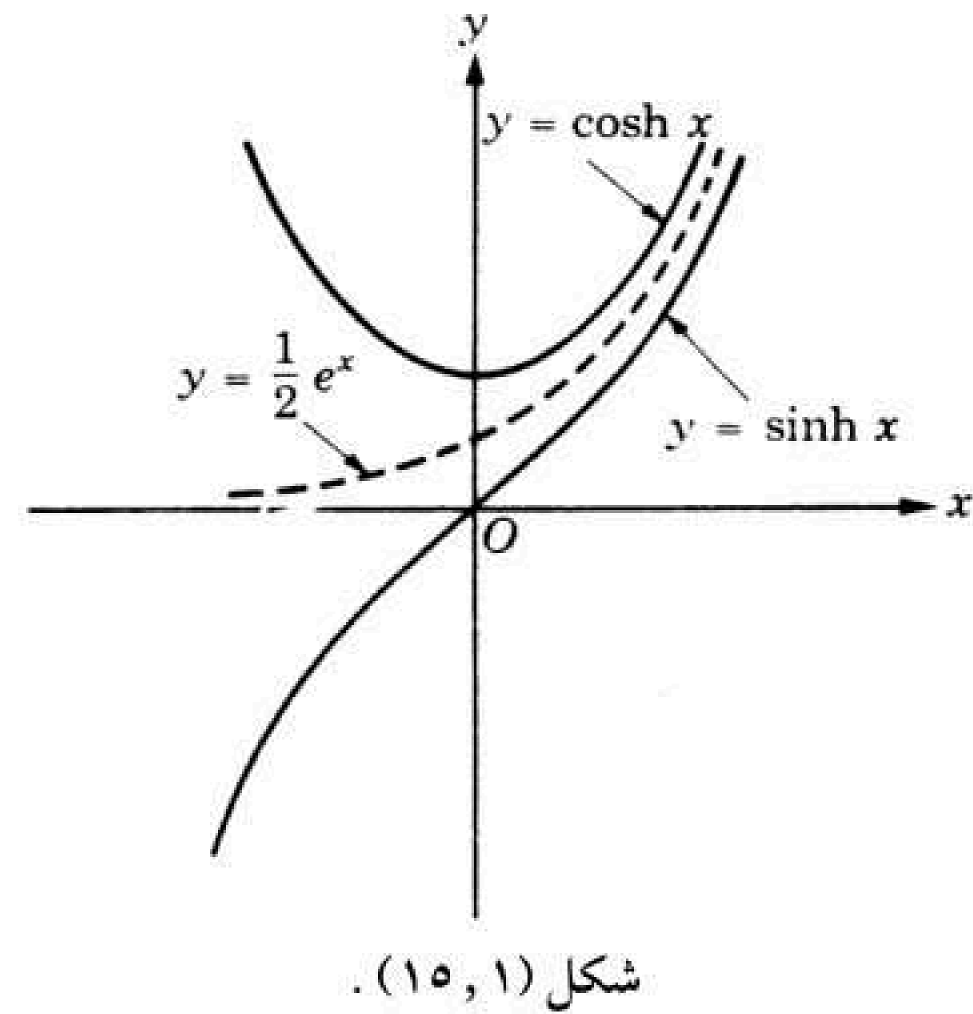
الدوال الزائدية
THE HYPERBOLIC FUNCTIONS

(١ ,١٥) الدوال الزائدية
The Hyperbolic Functions

انطلاقا من الدالة الأسية الطبيعية المعرفة بالقاعدة: $y = e^x$.

لنعرف دالتي الجيب وجيب التمام الزائدتين ونرمز لهما وعلى التوالي، بالرمزين: sin h، cos h، بالصورة:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (١٥,١)$$



شكل (١ ,١٥) .

من (١٥,١)، نجد بالجمع تارة وبالطرح تارة أخرى:

$$\boxed{\begin{aligned} \cosh x+\sinh x &= e^{x} \\ \cosh x-\sinh x &= e^{-x} \end{aligned}} \qquad (١٥,٢)$$

من (١٥,٢)، نحصل على المتطابقة:

$$(\cosh x+\sinh x)(\cosh x-\sinh x)=e^{x}\cdot e^{-x}=e^{0}=1$$

إذن:

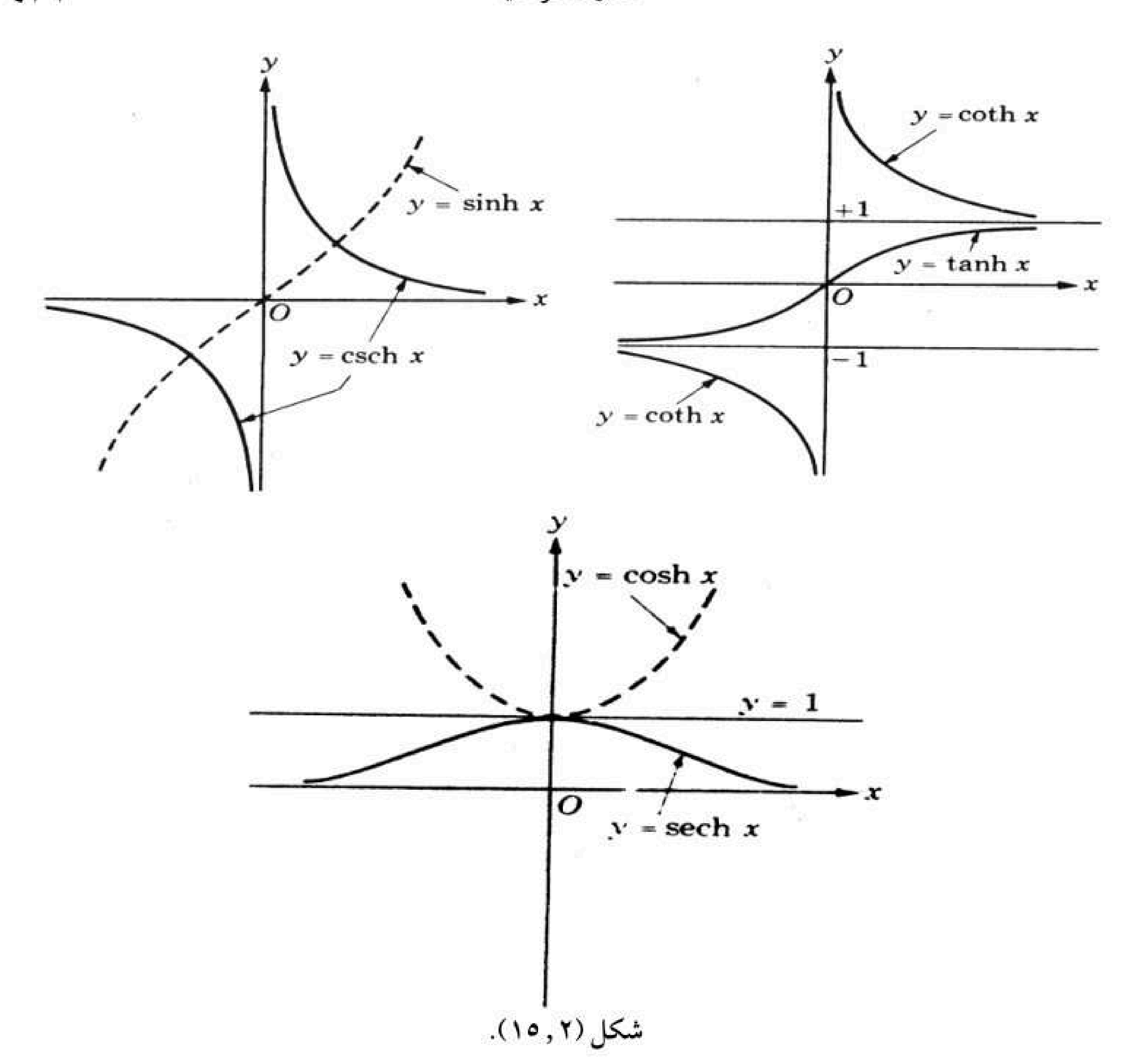
$$\boxed{\cosh^2 x-\sinh^2 x=1} \qquad (١٥,٣)$$

بالطريقة نفسها التي عرفنا بها بقية الدوال المثلثية (Trigonometric) ابتداء من دالتـي الجيـب وجيب التمام، لنعرف دالة الظل الزائدية وظل التمام الزائدية والقاطع الزائدية وقاطع التمام الزائديـة ابتداء من دالتي الجيب وجيب التمام الزائديتين، بالصورة التالية:

$$\boxed{\begin{aligned} \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \\ \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} \\ \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} \end{aligned}}$$

حيث رمزنا لهذه الدوال بالرموز:

$$\tanh, \coth, \operatorname{sec}h, \operatorname{csc}h$$



شكل (١٥,٢).

من المساواة (١٥,٣) وبتقسيم طرفيها على $\cosh^2 x$ مرة، وعلى $\sinh^2 x$ مرة أخرى، نجد:

$$1-\tanh^2 x=\operatorname{sech}^2 x$$
$$\coth^2 x-1=\operatorname{csch}^2 x \qquad (١٥,٤)$$

متطابقات الجمع

نظرية (١٥-١)

$$\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$$
$$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y \qquad (١٥,٥)$$

البرهان

لنبرهن على الأولى منهما. حسب تعريف دالة الجيب الزائدية يمكن أن نكتب:

$$\sinh(x+y)=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\frac{e^{x}e^{y}-e^{-x}e^{-y}}{2}$$

$$=\tfrac{1}{2}[(\cosh x+\sinh x)(\cosh y+\sinh y)-(\cosh x-\sinh x)(\cosh y-\sinh y)] \quad \text{(استفادة من (٢ , ١٥)}$$

$$=\tfrac{1}{2}[2\sinh x\cosh y+2\cosh x\sinh y]$$

ومنه نجد:

$$\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$$

وهذا القانون يشبه قانونا مثلثيا معروفا

من (١ , ١٥) نجد:

$$\sinh(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

أي أن: $\sinh(-x)=-\sinh x$ ، بالمثل: $\cosh(-x)=\cosh x$ ، إذن:

$$\boxed{\begin{aligned}\sinh(-x)&=-\sinh x\\ \cosh(-x)&=\cosh x\end{aligned}} \qquad (١٥ , ٦)$$

هذا يعني أن دالة الجيب الزائدية دالة فردية، وأن دالة جيب التمام الزائدية دالة زوجية.

لو عوضنا في (٥ , ١٥) عن y بـ y- نحصل على المتطابقتين:

$$\sinh(x-y)=\sinh x\cosh(-y)+\cosh x\sinh(-y)$$
$$\cosh(x-y)=\cosh x\cosh(-y)+\sinh x\sinh(-y)$$

وحسب (٦ , ١٥)، فإن:

$$\boxed{\begin{aligned}\sinh(x-y)&=\sinh x\cosh y-\cosh x\sinh y\\ \cosh(x-y)&=\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y\end{aligned}} \qquad (١٥ , ٧)$$

متطابقات الضرب

بالتعويض عن y بـ x في (٥ , ١٥) نجد:

$$\boxed{\begin{aligned}\sinh 2x&=2\sinh x\cosh x\\ \cosh 2x&=\cosh^2 x+\sinh^2 x\end{aligned}} \qquad (١٥ , ٨)$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية من (٨ , ١٥) عن $\cosh^2 x$ بما يساويها من المساواة:

$\cosh^2 x=1+\sinh^2 x$ ، نجد:

$$\cosh 2x = 1 + \sinh^2 x + \sinh^2 x$$
$$= 1 + 2\sinh^2 x \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\cosh 2x = 2\sinh^2 x + 1 \\ \sinh^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}\end{array}} \qquad (١٥,٩)$$

بالمثل لو عوضنا في (١٥,٨) عن $\sinh^2 x$ بالقيمة $\cosh^2 x - 1$ ، لوجدنا:

$$\boxed{\begin{array}{l}\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1 \\ \cosh^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}\end{array}}$$

نظرية (١٥,٢)

مشتقات الدوال الزائدية هي على التوالي:

١) $\frac{d}{dx}[\sinh x] = \cosh x$

٢) $\frac{d}{dx}[\cosh x] = \sinh x$

٣) $\frac{d}{dx}[\tanh x] = \operatorname{sech}^2 x$

٤) $\frac{d}{dx}[\coth x] = -\operatorname{csch}^2 x$

٥) $\frac{d}{dx}[\operatorname{sech} x] = -\operatorname{sech} x \tanh x$

٦) $\frac{d}{dx}[\operatorname{csch} x] = -\operatorname{csch} x \coth x$

البرهان

لنبرهن على ثلاثة منها ونترك البقية للقارئ:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\frac{\sinh x}{\cosh^2 x} = -\frac{1}{\cosh x} \cdot \frac{\sinh x}{\cosh x} = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

مثـــال (١٥,١)

أوجد y' ، إذا كان:

١) $y = (\cosh x)^{\sinh x} + 3^{\cosh x^2}$

٢) $y = \log_2(\cosh x)$

الحـــل

١) نضع $\cosh x = e^{\ln(\cosh x)}$ ، فنجد:

$$y = e^{\sinh x \ln(\cosh x)} + 3^{\cosh x^2} \Rightarrow y' = e^{\sinh x \ln(\cosh x)}\left(\cosh x \ln(\cosh x) + \frac{\sinh x \cdot \sinh x}{\cosh x}\right) +$$

$$3^{\cosh x^2} \ln 3 \cdot \sinh x^2 . 2x \Rightarrow y' = (\cosh x)^{\sinh x}(\cosh x \ln(\cosh x) + \sinh x \tanh x) +$$

$$3^{\cosh x^2} \ln 3 \sinh x^2 \cdot 2x$$

٢) $$y' = \frac{\sinh x}{\cosh x \cdot \ln 2} = \frac{\tanh x}{\ln 2}$$

من جدول مشتقات الدوال الزائدية نظرية (٢ , ١٥)، نجد:

$$\int \sinh u du = \cosh u + c \qquad \int \cosh u du = \sinh u + c$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + c \qquad \int \operatorname{csch}^2 u du = -\coth u + c$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + c \qquad \int \operatorname{csch} u \coth u du = -\operatorname{csch} u + c$$

مثال (٢ , ١٥)

أوجد التكاملين:

١) $\int \sinh^2 x dx$

٢) $\int \cosh^2 x dx$

الحـــل

١) طريقة أولى:

$$\int \sinh^2 x dx = \int \frac{\cosh 2x - 1}{2} dx = \frac{\sinh 2x}{4} - \frac{1}{2}x + c$$

طريقة ثانية:

$$\int \sinh^2 x dx = \int \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{2x}}{2}-2x-\frac{e^{-2x}}{2}\right)+c=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{8}-\frac{x}{2}+c=\frac{\sinh 2x}{4}-\frac{x}{2}+c$$

٢) طريقة أولى:

$$\int \cosh^2 x dx=\int \frac{\cosh 2x+1}{2}dx=\frac{\sinh 2x}{4}+\frac{1}{2}x+c$$

طريقة ثانية:

$$\int \cosh^2 x dx=\int\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int (e^{2x}+2+e^{-2x})dx$$
$$=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{8}+\frac{1}{2}x+c=\frac{\sinh 2x}{4}+\frac{1}{2}x+c$$

مثـــال (١٥,٣)

أوجد التكامل: $\int \sinh(\ln 3x)dx$

الحـــل

من الملاحظ أن:

$$\sinh(\ln 3x)=\frac{e^{\ln 3x}-e^{-\ln 3x}}{2}=\frac{e^{\ln 3x}-e^{\ln(3x)^{-1}}}{2}=\frac{3x-\frac{1}{3x}}{2}$$

(لاحظ أن $x > 0$)

بالتالي، فإن:

$$\int \sinh(\ln 3x)dx=\frac{3}{2}\int xdx-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x}$$
$$=\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{6}\ln x+c$$

مثـــال (١٥,٤)

أوجد التكامل:

$$\int e^{-10x}(\cosh 2x+\sinh 2x)^6 dx$$

الحـــل

من الملاحظ أن: $\cosh 2x+\sinh 2x=e^{2x}$ ، بالتالي فإن التكامل يصبح على الشكل:

$$\int e^{-10x}(e^{2x})^6 dx=\int e^{-10x}e^{12x}dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

تمارين (١٥,١)

أوجد y′ فيما يلي:

١) $y = e^{x}\sinh x^{2}$

٢) $y = \ln(\sinh x^{2})$

٣) $y = \sin(\sinh x)$

٤) $y = \sinh^{3}(e^{x})$

٥) $y = (\cosh x)^{\cos x}$

٦) $y = (\sinh^{2} x + \tanh^{2} x)^{2}$

٧) $y = \operatorname{sech} x + \cosh 2x$

٨) $y = \dfrac{x\tanh\sqrt{x}}{1+\ln(\cosh x)}$

٩) $y = \dfrac{\coth x^{2}}{(1+\operatorname{sech}\sqrt{x})^{2}}$

١٠) $y = x\operatorname{csch}\dfrac{1}{x}$

١١) $y = (x^{2}+x+1)^{\sqrt{x}} + \log_{3}(\cosh x)$

١٢) $y = \log_{2}|x^{2}-2x-3| + (\cosh x)^{\sqrt{x}} + \int_{0}^{1} e^{x^{2}}\,dx$

أوجد y′ فيما يلي:

١٣) $y = (\cosh x)^{\sinh x} + 2^{x}$

١٤) $y = \ln\sqrt{e^{x}+e^{-x}} + (\cosh x)^{\sqrt{x}}$

١٥) $y = \dfrac{(x^{2}+4)^{x}}{(\sinh x)^{2}}$

أوجد التكاملات التالية:

١٦) $\int \sinh^{3} x\,dx$

١٧) $\int \cosh^{4} x\,dx$

١٨) $\int \sinh^{3} x\cosh x\,dx$

١٩) $\int \sinh^{2} x\cosh^{2} x\,dx$

٢٠) $\int \dfrac{dx}{\sinh x\cosh^{2} x}$

٢١) $\int \dfrac{dx}{\sinh^{2} x\cosh^{2} x}$

٢٢) $\int \tanh^{3} x\,dx$

٢٣) $\int \coth^{4} x\,dx$

٢٤) $\int \dfrac{dx}{\sinh 2x+\cosh^{2} x}$

٢٥) $\int \dfrac{dx}{2\sinh x+3\cosh^{2} x}$

٢٦) $\int \dfrac{dx}{\tanh x-1}$

٢٧) $\int \dfrac{\sinh x\,dx}{\sqrt{\cosh 2x}}$

أوجد التكاملات التالية:

٢٨) $\int xe^{2x^2}\cosh x^2 dx$

٢٩) $\int \cosh(\ln 2x)dx$

٣٠) $\int \tanh^5 x \operatorname{sech} x dx$

٣١) $\int e^{3x}\sinh(2x)dx$

٣٢) $\int \frac{2\cosh(3x)+5}{\sqrt{\cosh 4x-\sinh 4x}}dx$

٣٣) $\int x(\sinh 3x+\cosh 3x)^3 dx$

٣٤) $\int e^{-2x}\cosh^2 2x dx$

٣٥) $\int \frac{\cosh(\tan^{-1} x)dx}{1+x^2}$

٣٦) $\int \frac{1}{\sqrt{\cosh 3x+\sinh 3x}}dx$

٣٧) $\int \frac{e^{-x}}{(\sinh x+\cosh x)^4}dx$

(٢, ١٥) الدوال الزائدية العكسية
The Inverse Hyperbolic Functions

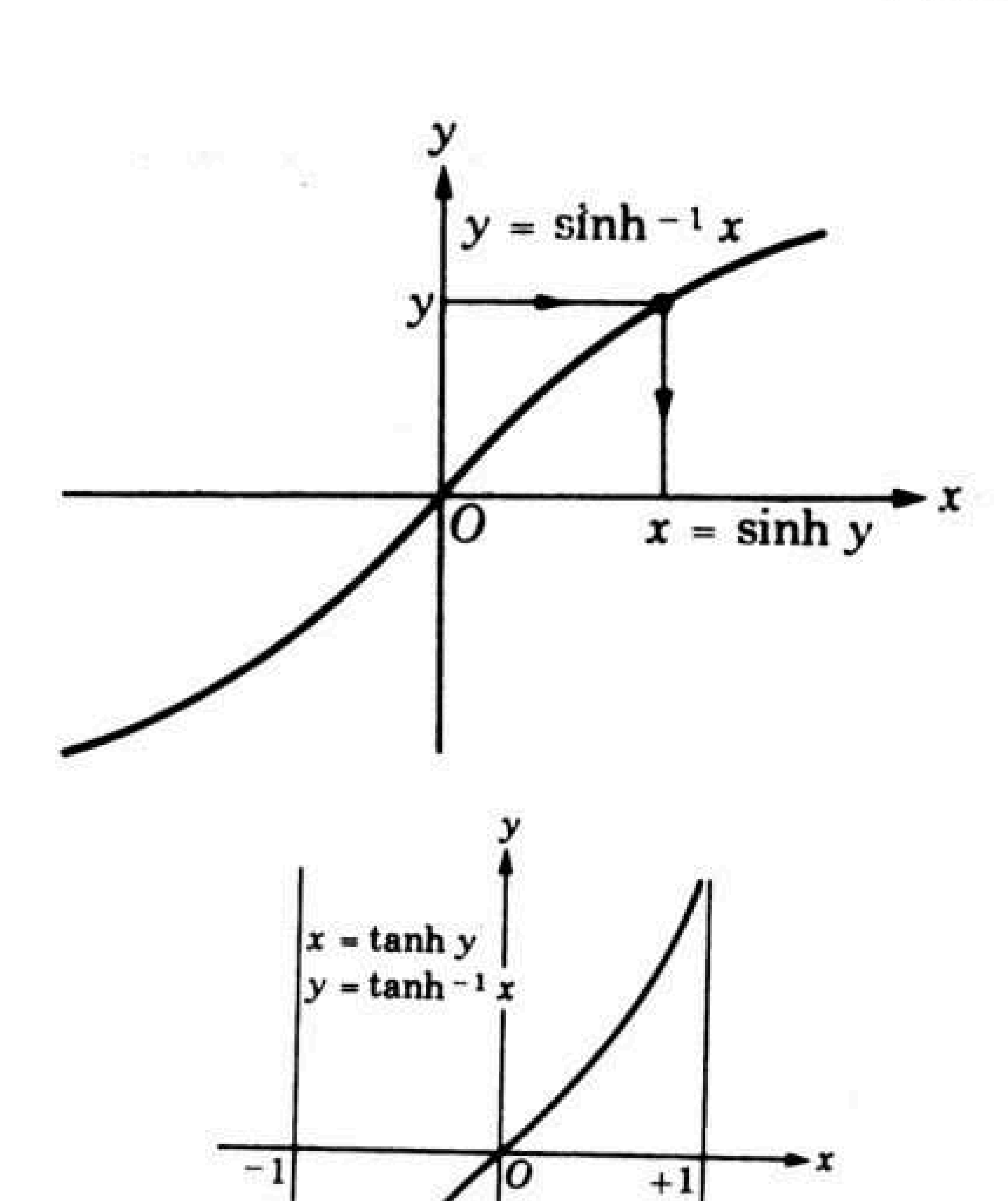
(أ) من الملاحظ أن مشتقات الدوال الزائدية التالية، والمعرفة بالصورة:

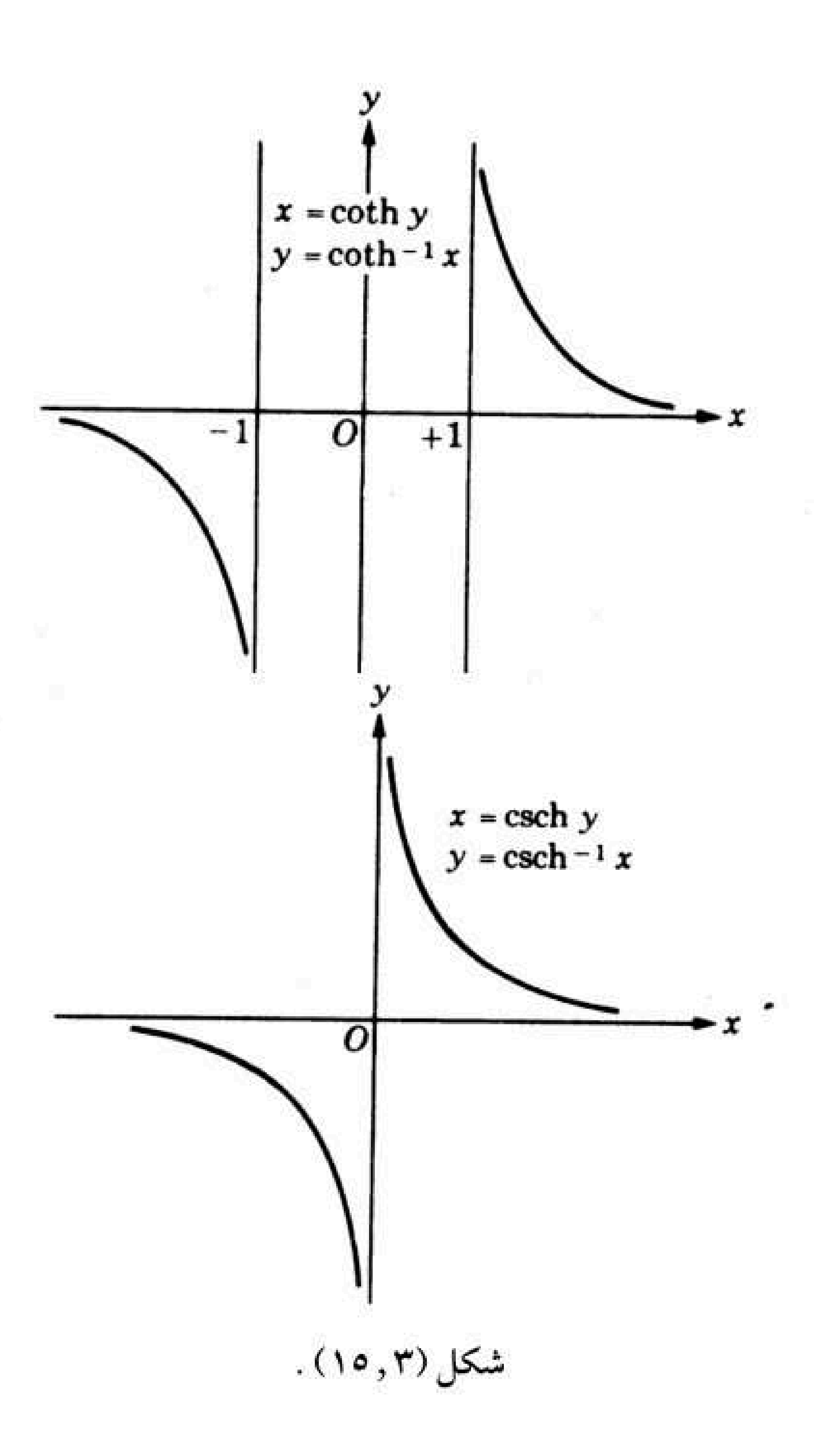
١) $x = \sinh y$ ، $y \in \mathbb{R}$

٢) $x = \tanh y$ ، $y \in \mathbb{R}$

٣) $x = \coth y$ ، $y \in \mathbb{R}^*$

٤) $x = \operatorname{csch} y$ ، $y \in \mathbb{R}^*$





شكل (٣,١٥) .

(وباعتبار y هو المتغير المستقل وx قيمة الدالة الزائدية عند y)، هي على التوالي:

١) $\frac{dx}{dy} = \cosh y$ ‏ ٢) $\frac{dx}{dy} = \operatorname{sec}h^2 y$

٣) $\frac{dx}{dy} = -\operatorname{csc}h^2 y$ ‏ ٤) $\frac{dx}{dy} = \frac{-\cosh y}{\sinh^2 y}$

للمشتقة الأولى والثانية قيم موجبة عندما $y \in \mathbb{R}$ ، وللمشتقة الثالثة والرابعة قيم سالبة عندما $y \in \mathbb{R}^*$. تقبل هذه الدوال دوالا عكسية، لنرمز لها وعلى التوالي بالرموز:

١) $\sinh^{-1}$ ، وندعوها بدالة الجيب الزائدي العكسي

٢) $\tanh^{-1}$ ، وندعوها بدالة الظل الزائدي العكسي

٣) $\coth^{-1}$ ، ونسميها بدالة ظل التمام الزائدي العكسي

٤) $\operatorname{csc}h^{-1}$ ، ونطلق عليها دالة قاطع التمام الزائدي العكسي، شكل(٣ , ١٥).

لاحظ أن: $\boxed{\sinh^{-1}(\sinh y) = y}$ وبالمثل بالنسبة لبقية الدوال، إذن:

١) $y = \sinh^{-1} x$

٢) $y = \tanh^{-1} x$

٣) $y = \coth^{-1} x$

٤) $y = \operatorname{csc}h^{-1} x$

(انظر الشكل (٣ , ١٥)).

(ب) لاحظ أيضا أن مشتقتي الدالتين الزائديتين التاليتين، والمعرفتين بالصورة:

١) $x = \cosh y$

٢) $x = \operatorname{sec}hy$

وباعتبار y هو المتغير المستقل، هي على التوالي:

١) $\frac{dx}{dy} = \sinh y$

٢) $\frac{dx}{dy} = -\frac{\sinh y}{\cosh^2 y}$

قيم المشتقة الأولى موجبة وقيم الثانية سالبة عندما $y > 0$ ، شكل (٤ , ١٥). تقبل الدالتان cos h، sec h على الفترة $[0,\infty)$ دالتين عكسيتين، نرمز لهما وعلى التوالي، بالرمزين:

١) $\cosh^{-1}$ ، وندعوها بدالة جيب التمام الزائدي العكسي.

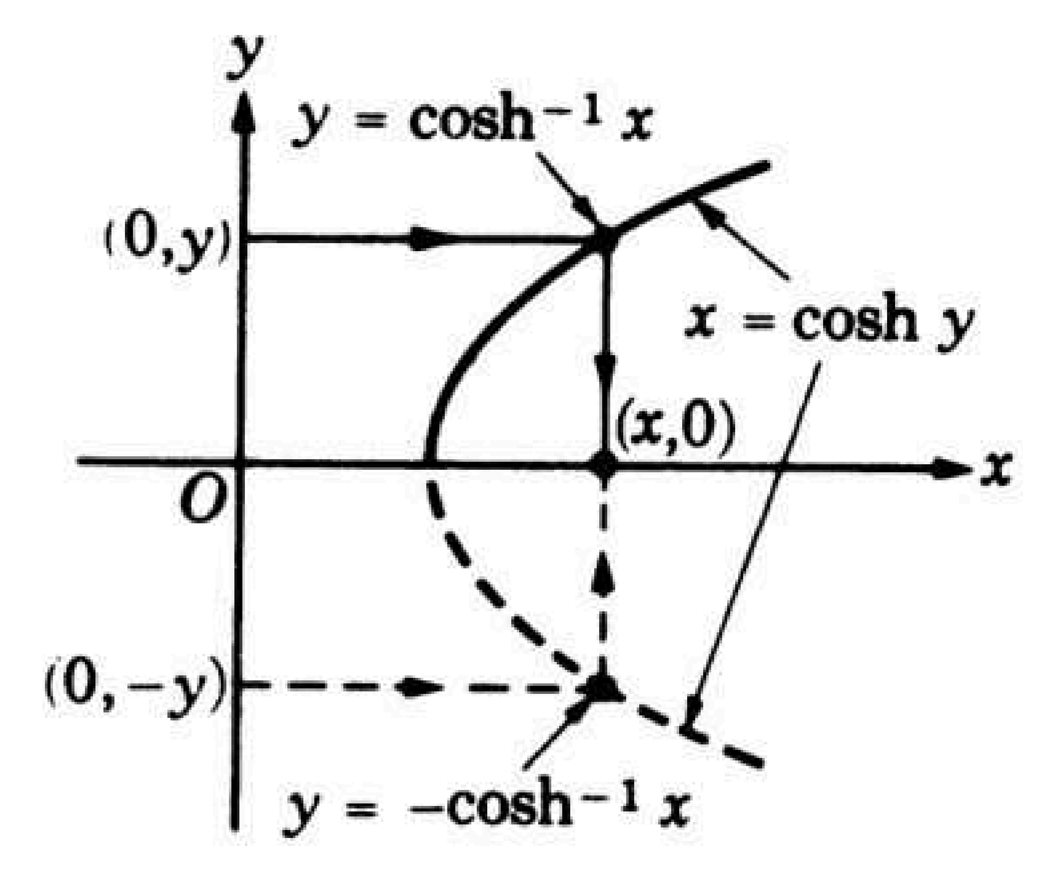
٢) $\operatorname{sec}h^{-1}$ ، ونسميها بدالة ا لقاطع الزائدي العكسي.

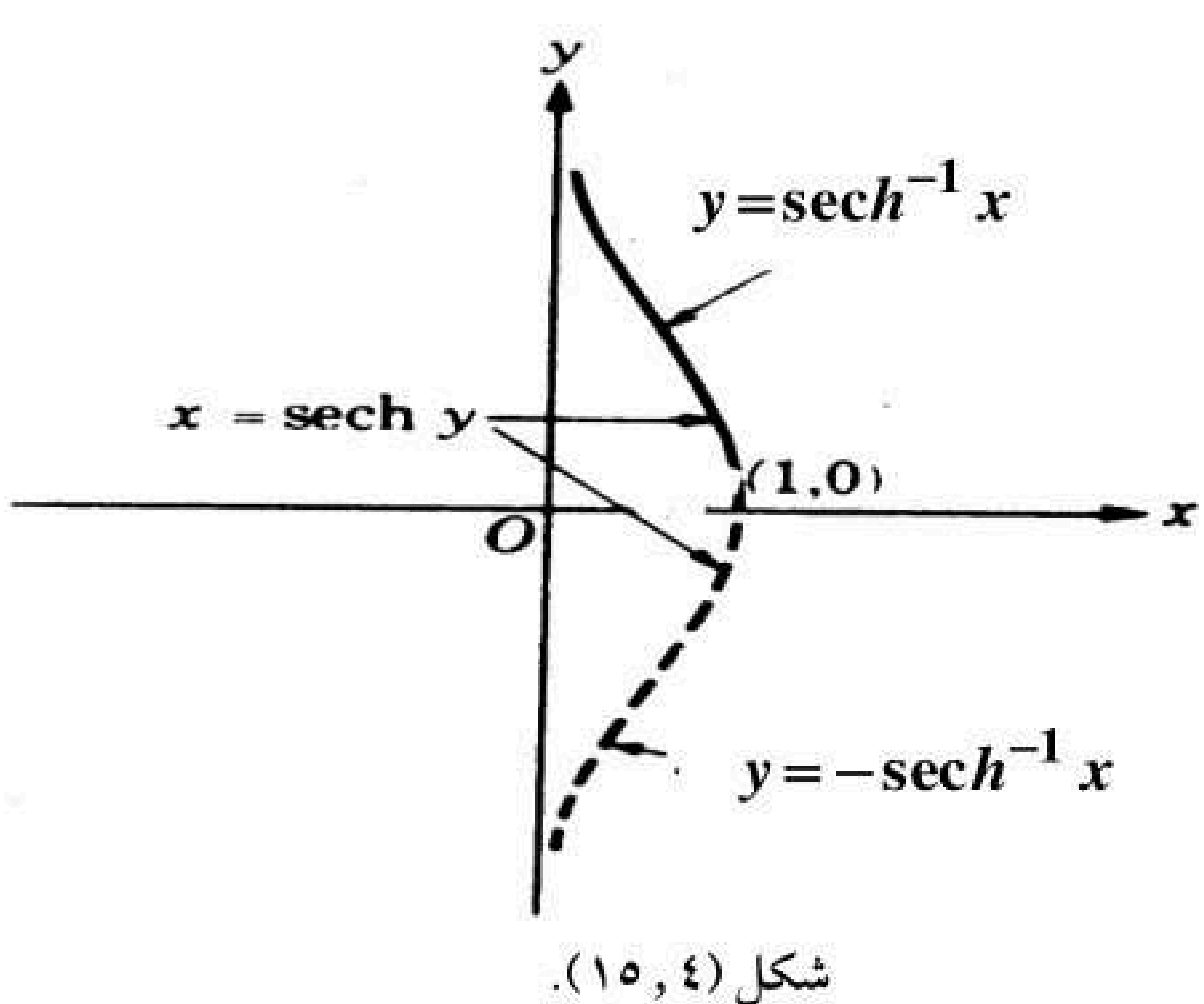
إذن:

١) $y = \cosh^{-1} x$

٢) $y = \operatorname{sec}h^{-1} x$

(حيث $y \geq 0$) ، (انظر الشكل (٤ , ١٥))





شكل (٤, ١٥).

الصيغة اللوغاريتمية لدالة الجيب الزائدية العكسية $\sinh^{-1}$

نعلم أن: $y=\sinh^{-1}x \Rightarrow x=\sinh y$

لكن: $\cosh^2 y=1+\sinh^2 y$ ، إذن: $\cosh y=\sqrt{1+\sinh^2 y}=\sqrt{1+x^2}$

ومنه: $e^y=\sinh y+\cosh y=x+\sqrt{1+x^2}$

بأخذ ln الطرفين، نجد: $y=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$ ، بالتالي فإن:

$$\boxed{\sinh^{-1}x=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}$$

الجدول التالي يحوي جميع الصيغ اللوغاريتمية للدوال الزائدية العكسية.

الصيغ اللوغاريتمية للدوال الزائدية العكسية.

y = f(x)	الصيغة اللوغاريتمية	ملاحظات
$\sinh^{-1} x$	$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$	$x \in \mathbb{R}\ , y \in \mathbb{R}$
$\cosh^{-1} x$	$\ln(\sqrt{x^2-1}+x)$	$x \geq 1\ ,\ y \geq 0$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\|x\|<1\ , y \in \mathbb{R}$
$\coth^{-1} x$	$\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$	$\|x\|>1\ , y \in \mathbb{R}^*$
$\operatorname{sech}^{-1} x$	$\ln\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}$	$0<x\leq 1\ ,\ y \geq 0$
$\operatorname{csch}^{-1} x$	$\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\|x\|}+\frac{1}{x}\right)$	$x \in \mathbb{R}^*\ , y \in \mathbb{R}^*$

مشتقات الدوال الزائدية العكسية:

من الصيغ اللوغاريتمية السابقة وبالاشتقاق بالنسبة للمتغير x، نجد جميع مشتقات الدوال الزائدية العكسية، فعلى سبيل المثال نجد الصيغة التالية:

$$(\tanh x)' = \frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2} \quad , \ |x|<1$$

فيما يلي نضع جدولا يحوي جميع مشتقات الدوال الزائدية والزائدية العكسية.

جدول مشتقات الدوال الزائدية والدوال الزائدية العكسية.

y	y′
sinh u	$\cosh u\, u'$
cosh u	$\sinh u\, u'$
tanh u	$\operatorname{sech}^2 u\, u'$
coth u	$-\operatorname{csch}^2 u\, u'$

y	y′
sech u	$-\text{sech}u\tanh u\, u'$
csch u	$-\text{csch}u\coth u\, u'$
$\sinh^{-1} u$	$\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}u'$
$\cosh^{-1} u$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}\cdot(u>1)$
$\tanh^{-1} u$	$\frac{u'}{1-u^2}(\|u\|<1)$
$\coth^{-1} u$	$\frac{1}{1-u^2}u'(\|u\|>1)$
$\text{sech}^{-1} u$	$-\frac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}\, 0<u<1$
$\text{csch}^{-1} u$	$-\frac{u'}{\|u\|\sqrt{1+u^2}}(u\neq 0)$

$u = g(x)$ ، قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير x.

مثـال (١٥-٥)

أوجد y'، إذا كان:

١) $y = (\tanh^{-1} x)^2 + \sinh^{-1} x^2 + \ln(\cosh x)$

٢) $y = x\cosh^{-1} x + (\text{csch}^{-1} x)^2 \quad (x \geq 1)$

٣) $y = e^x \,\text{sech}^{-1} x^2$

الحـل:

١) $y' = 2\tanh^{-1} x \cdot \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \cdot 2x + \frac{\sinh x}{\cosh x}$

٢) $y' = \cosh^{-1} x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 2\text{csch}^{-1} x \cdot -\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$

٣) $y' = e^x \,\text{sech}^{-1} x^2 - e^x \frac{2x}{x^2\sqrt{1-x^4}}$

مثـال (١٥,٦)

حل المعادلة التالية:

$$\sinh^{-1}(x) = \ln 3x \qquad (١٥,١٠)$$

الحـــل :

لاحظ أن: $\sinh^{-1}(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$

إذن: $\ln(\sqrt{1+x^2}+x) = \ln 3x$

بالتالي، فإن: $\sqrt{1+x^2}+x = 3x$

(لاحظ أن الدالة ln دالة تقابل)

إذن: $\sqrt{1+x^2} = 2x \Leftarrow 1+x^2 = 4x^2 \Leftarrow \frac{1}{3} = x^2 \Leftarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، والمقبـول هـو: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ،

(لاحظ أن الدالة ln في المعادلة (١٥-١٠) معرفة إذا كان $x > 0$).

من جدول مشتقات الدوال الزائدية العكسية، نجد:

نظرية (١٥,٣)

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du = \sinh^{-1}\frac{u}{a}+c \quad , \quad a>0$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \cosh^{-1}\frac{u}{a}+c \quad , \quad 0<a<u$$
$$\int \frac{1}{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a}+c \quad , \quad |u|<a \quad , \quad a>0 \qquad (١٥,١٤)$$
$$\int \frac{1}{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a}+c \quad , \quad |u|>a \quad , \quad a>0$$
$$\int \frac{1}{u\sqrt{a^2-u^2}}\,du = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\frac{|u|}{a}+c \quad , \quad 0<|u|<a$$
$$\int \frac{1}{u\sqrt{a^2+u^2}}\,du = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\frac{|u|}{a}+c \quad , \quad u\neq 0$$

البرهـــان

لنبرهن الفقرة الأولى:

لنضع: $u = at$ ، نجد: $du = adt$ ، ومنه فإن:

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du = \int \frac{adt}{\sqrt{a^2t^2+a^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \sinh^{-1}t+c$$
$$= \sinh^{-1}\frac{u}{a}+c$$

(بالاستفادة من جدول مشتقات الدوال الزائدية العكسية).

نتيجة (١٥,١)

باستخدام الصيغ اللوغاريتمية للدوال الزائدية العكسية، فإن الجدول السابق يكتب على الشكل:

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du = \ln(\sqrt{u^2+a^2}+u)+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \ln\left|\sqrt{u^2-a^2}+u\right|+c$$

$$(0<a<|u|)$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+c$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{|u|}+c \ , \ 0<|u|<a$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{|u|}+c \ , \ u\neq 0$$

(حيث $a>0$)

مثـــال (١٥,٧)

أوجد التكاملات التالية:

١) $\int \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-9}}dx$ ٢) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$

٣) $\int \frac{5}{6-2x^2}\,dx$ ٤) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$

الحــل

نضع: $e^{2x}=t \Leftarrow dt=2e^{2x}dx$

يصبح التكامل على الشكل:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-9}} = \cosh^{-1}\frac{t}{3}+c = \cosh^{-1}\frac{e^{2x}}{3}+c$$

أو بالاستعانة بالصيغ اللوغاريتمية:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-9}} = \ln\left|\sqrt{t^2-9}+t\right|+c = \ln\left(\sqrt{e^{4x}-9}+e^{2x}\right)+c$$

(لاحظ أن: $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-9}} = \ln\left|\sqrt{t^2-9}+t\right|+c$)

٢) $$\int \frac{dt}{\sqrt{4+9x^2}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{\frac{4}{9}+x^2}} = \frac{1}{3}\sinh^{-1}\frac{3x}{2}+c$$

أو باستخدام الصيغة اللوغاريتمية:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{4+9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9}+x^2}} = \frac{1}{3}\ln\left(\sqrt{\frac{4}{9}+x^2}+x\right)+c$$

(لاحظ أن: $\int \frac{dt}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right)+c$)

٣) $$\int \frac{5}{6-2x^2}dx = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{3-x^2} = \begin{cases} \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\tanh^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}+c \quad , \quad |x|<\sqrt{3} \\ \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\coth^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}+c \quad , \quad |x|>\sqrt{3} \end{cases}$$

أو في كلتا الحالتين باستخدام الصيغة اللوغاريتمية:

$$\frac{5}{2}\int \frac{dx}{3-x^2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right|+c$$

(لاحظ أن: $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$)

٤) نضع: $dt = e^x dx \Leftarrow e^x = t$

يصبح التكامل على الشكل:

$$\int \frac{dt}{e^x\sqrt{4-e^{2x}}} = \int \frac{dt}{t\sqrt{4-t^2}} = -\frac{1}{2}\operatorname{sech}^{-1}\frac{|t|}{2}+c = -\frac{1}{2}\operatorname{sech}^{-1}\frac{e^x}{2}+c$$

$(e^x < 2 \Rightarrow x < \ln 2)$

أو حسب الصيغة اللوغاريتمية:

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{4-t^2}} = -\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{4-t^2}}{|t|}+c$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{4-e^{2x}}}{e^x}+c$$

(لاحظ أن: $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2\pm x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2\pm x^2}}{|x|}+c$)

تمارين (١٥,٢)

أوجد 'y، إذا كان:

١) $y=(\tanh^{-1}(x))^4+(\cosh 2x)^x$

٢) $y=(\text{sech}^{-1}x)^3+(\sinh^2 x)^{x+1}$

٣) $y=(x^2+1)^{\tan x}+\sinh^{-1}3x$

٤) $y=\sinh^{-1}x^2+\ln(\cosh 5x)$

٥) $y=\tan(x^2+1)+x\sinh^{-1}x$

٦) $y=x\,\text{sech}^{-1}x+\tanh^{-1}x^2$

٧) $y=\ln(\cosh^{-1}2x)$

٨) $y=\text{sech}^{-1}x^3$

٩) $y=\sqrt{\cosh^{-1}2x}$

١٠) $y=\tanh^{-1}(3x)$

١١) $y=\tanh^{-1}(\cos 3x)$

١٢) $y=\sinh^{-1}(e^{2x}+x^2)$

١٣) $y=\tanh^{-1}x^3$

١٤) $y=\text{sech}^{-1}\sqrt{1-2x}$

أوجد التكاملات التالية:

١٥) $\int \tanh^{-1}x\,dx$

١٦) $\int \coth^{-1}x\,dx$

١٧) $\int \text{sech}^{-1}x\,dx$

١٨) $\int \text{csch}^{-1}x\,dx$

١٩) $\int \sinh^{-1}x\,dx$

٢٠) $\int \cosh^{-1}x\,dx$

٢١) $\int (x+1)\sinh^{-1}x\,dx$

٢٢) $\int x^4\cosh^{-1}x\,dx$

٢٣) $\int \frac{\tanh^{-1}x\,dx}{1-x^2}$

٢٤) $\int (x^3+x^2)\sinh^{-1}x\,dx$

٢٥) $\int \frac{1}{x\sqrt{16-x^4}}dx$

٢٦) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$

٢٧) أثبت أن: $(\cosh x\pm\sinh x)^n=\cosh(nx)\pm\sinh(nx)$ حيث n عدد صحيح موجب.

أوجد التكاملات التالية:

٢٨) $\int \frac{dx}{\sqrt{9+16x^2}}dx$

٢٩) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}dx$

٣٠) $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{4\tan^2 x+9}}$

٣١) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{4+\cos^2 x}}dx$

٣٢) $\int \frac{dx}{16-9x^2}$

٣٣) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^4}}$

الفصل السادس عشر

قاعدة لوبيتال
L'HOPITAL'S RULE

(١٦,١) صيغ عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ أو من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$
Indeterminate Forms of Type 0/0 or ∞/∞

نظرية (١٦,١) (قاعدة لوبيتال)

إذا كانت الدالتان: f, g

١) قابلتين للاشتقاق على الفترة (a,b) التي تنتمي إليها النقطة c.

(ومن الممكن أن لا تكون الدالتان f, g قابلتين للاشتقاق عند c)

٢) وإذا كانت $g'(x) \neq 0$ لكل $x \neq c$ على هذه الفترة.

٣) وإذا كان $\frac{f(x)}{g(x)}$ في حالة عدم تعيين من الشكل: $\left[\frac{0}{0}\right]$ أو $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ عندما $x \to c$ ، فإن:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (١٦,١)$$

بشـرط أن تكـون النهايـة في الجانب الأيمن من (١٦,١) موجودة، أو تكون مساوية ∞ (أو $-\infty$).

مثـال (١٦,١)

أوجد النهايات التالية:

١) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$

٢) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}$

٣) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2\sin x}{x\sin x}$

٤) $\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x+\ln x}$

الحـــل

١)الوضع هو حالة عدم تعيين من الشكل $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. لنطبق قاعدة لوبيتال، فنجد:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

(طبقنا قاعدة لوبيتال مرتين متتاليتين).

٢)الوضع هو حالة عدم تعيين من الشكل $\left[\frac{0}{0}\right]$. لنطبق قاعدة لوبيتال، فنجد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\sec x\sec x\tan x}{2}=0$$

(طبقنا قاعدة لوبيتال مرتين متتاليتين).

٣)الوضع هو حالة عدم تعيين من الشكل $\left[\frac{0}{0}\right]$. لنطبق قاعدة لوبيتال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0$$

٤)الحالة هي عدم تعيين من الشكل $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. لنطبق قاعدة لوبيتال، فنجد:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x+\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x+1}{1+\frac{1}{x}}=\infty$$

(لاحظ أن: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$).

(٢, ١٦) صيغ عدم التعيين من الشكل $\infty-\infty$ أو $0\times\infty$

تواجهنا أيضا عندما نبحث عن نهايات بعض الدوال، من الشكل:

(أ) $h(x)=f(x)+g(x)$ (ب) $h(x)=f(x)g(x)$

وذلك عندما تنتهي قيمة المتغير x نحو قيمة محددة a، حالتين:

الحالة الأولى: في الفقرة (أ)، وذلك عندما تكون نهايتا الدالتين f,g على الصورة:

$\lim_{x\to a}f(x)=\infty \quad , \quad \lim_{x\to a}g(x)=-\infty$ (أو العكس)

ندعو هذه الحالة، **بحالة عدم تعيين من الشكل** $\infty-\infty$.

هذه الحالة لا يوجد لها طريقة محددة لردها إلى حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$، لكن الأمثلة المنوعة كفيلة بتوليد الملكة التي تمكن الطالب من تحقيق ذلك.

الحالة الثانية: في الفقرة (ب)، وذلك عندما تكون نهايتا الدالتين f,g على الصورة:

$\lim_{x\to a}f(x)=\infty \quad , \quad \lim_{x\to a}g(x)=0$ (من الممكن أن تنتهي f نحو $-\infty$)

نسمي هذا الوضع: **بحالة عدم تعيين من الشكل** $0\times\infty$. **نضع هنا h(x) على إحدى الصورتين:** $h(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ أو $h(x)=\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ **حسبما تقتضيه الضرورة، فتنقلب الحالة إلى صيغة عدم تعيين من الشكل** $\frac{0}{0}$ **أو** $\frac{\infty}{\infty}$. بعدها نطبق قاعدة لوبيتال لإزالة عدم التعيين.

مثـــال (٢,١٦)

أوجد النهايات التالية:

١) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\sqrt{2x+3}-\ln\sqrt{x+2}\right)$ ٢) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

٣) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\ln(1+\sin x)$ ٤) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$

الحـــل

١) الوضع عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$.

من الممكن أن تكتب النهاية على الصورة:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln\sqrt{2x+3}-\ln\sqrt{x+2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}[\ln(2x+3)-\ln(x+2)]$$

(لاحظ أن: $\sqrt{2x+3}=(3x+3)^{\frac{1}{2}}$ ، وأن:

$$(\ \ln(2x+3)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln(2x+3))$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{2x+3}{x+2}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{1}=\frac{1}{2}\ln 2$$

(الوضع الناتج عدم تعيين من الصورة $\frac{\infty}{\infty}$ ، لذا طبقنا قاعدة لوبيتال).

٢) الوضع عدم تعيين من الصورة: $0\times\infty$

نكتب النهاية على الشكل:

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

(جعلنا x مقاما للمقام، فانقلب الوضع إلى الحالة $\frac{0}{0}$ وطبقنا عند ذلك قاعدة لوبيتال)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{2x} = 2$$

(طبقنا لوبيتال مرتين)

٣) الوضع عدم تعيين من الشكل: $0\times\infty$

لاحـظ أن:

$$\lim_{x\to 0} \cot x \ln(1+\sin x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\frac{1}{\cot x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\tan x}$$

(أصبح وضع عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{\sec^2 x} = \frac{1}{1} = 1$$

٤)الوضع عدم تعيين من الشكل: $\infty - \infty$

تكتب النهاية على الصورة:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}$$

(وحدنا المقامات فأصبح عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1-(\ln x+1)}{\ln x + (x-1)\cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{-\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

(١٦,٣) صيغ عدم التعيين من الشكل 0^0 ، 1^∞ ، ∞^0

سنتعرف فيما يلي على أنواع جديدة من أوضاع عدم التعيين لم نصادفها من قبل، تواجهنا عندما نبحث عن نهايات بعض الدوال المعرفة، بالصورة:

$$y = f(x)^{g(x)} \quad , \quad f(x) > 0 \qquad (١٦,٢)$$

وذلك عندما تكون نهايتا الدالتين g, f عندما $x \to a$ ، وفق أحد الأوضاع التالية:

١) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (عدم التعيين من الشكل: 0^0)

٢) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (عدم التعيين على الصورة: ∞^0)

٣) $\lim_{x\to a} f(x)=1$, $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ (عدم التعيين على الشكل: 1^{∞})

تعالج الحالات السابقة جميعها، وفق الخطوات التالية:

١)نأخذ ln الطرفين للمقدار: $y=f(x)^{g(x)}$ ، فنجد:

$$\ln y = g(x)\ln(f(x))$$

٢)ننهي x نحو القيمة a، فنحصل على النهاية:

$\lim_{x\to a}(\ln y)=\lim_{x\to a} g(x)\cdot \lim_{x\to a}(\ln(f(x))$ (عدم تعيين من الشكل $0\times\infty$)

٣)نضع النهاية على الصورة:

$$\ln(\lim_{x\to a} y)=\lim_{x\to a}\frac{\ln(f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

٤) نطبــق قاعدة لوبيتال مع التأكد من توافر شروطها. إن كانت النهاية موجـودة وتسـاوي k،

فإن: (النهاية موجودة) $\ln(\lim_{x\to a} y)=k \Rightarrow \lim_{x\to a} y=e^{k}$ ، أو: $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{k}}$

إذا كانت: $k=\infty$ ، فإن: $\lim_{x\to a} y=\infty$. إذا كانت: $k=-\infty$ ، فإن: $\lim_{x\to a} y=0$.

مثـــال (١٦,٣)

أوجد النهايات التالية:

١) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$ ٢) $\lim_{x\to 0^{+}}(\sin x)^{\sin x}$ ٣) $\lim_{x\to\infty} x^{x}$

الحــل

١)الحالة من الشكل: 1^{∞}

(أ) نضع: $y=\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$ ، ثم نأخذ ln الطرفين فنجد:

$$\ln y = 3x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

(ب) ننهي $x\to\infty$ ، فنجد:

$\ln(\lim_{x\to\infty} y)=3\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ (الوضع من الشكل $0\times\infty$)

(ج) نكتب النهاية السابقة، بالصورة:

$$\ln(\lim_{x\to\infty} y) = 3\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= 3\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\cdot -\frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 3\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{x}} = 6$$

(د) النهاية موجودة، وبالتالي فإن:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = e^6$$

٢) (أ) نضع: $y = (\sin x)^{\sin x}$.

ثم نأخذ ln الطرفين، فنحصل على المساواة:

$$\ln y = \sin x \ln(\sin x)$$

(ب) ننهي $x \to 0^+$ ، فنجد:

$$\ln(\lim_{x\to 0^+} y) = \lim_{x\to 0^+}\sin x \ln(\sin x)$$

(الوضع من الشكل $(0\times(-\infty))$)

(ج) نكتب النهاية على الصورة:

$$\ln(\lim_{x\to 0^+} y) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0^+}\sin x = 0$$

(طبقنا قاعدة لوبيتال)

(د) $\lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$ ، إذن: $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\sin x} = 1$

٣) (أ) نضع: $y = x^{\frac{1}{x}} \quad , \quad x > 0$

ثم نأخذ: ln الطرفين، فنجد:

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln x = \frac{\ln x}{x}$$ (الوضع من الشكل ∞^{o})

(ب) نأخذ النهاية عندما: $x \to \infty$ فنحصل على الصيغة:

$$\ln(\lim_{x\to\infty} y) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

(الوضع عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$)

(ج) إذن: $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{0} = 1$

تمارين (١٦,١)

١) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$

٢) $\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

٣) $\lim_{x\to1}\frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$

٤) $\lim_{x\to0}\frac{\cosh x-1}{1-\cos x}$

٥) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}$

٦) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x-2\tan x}{1+\cos 4x}$

٧) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 5x}$

٨) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5}$

٩) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

١٠) $\lim_{x\to0}\frac{\frac{\pi}{x}}{\cot\frac{\pi x}{2}}$

١١) $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\sin(mx))}{\ln(\sin x)}$ ، (m>0)

١٢) $\lim_{x\to0}(1-\cos x)\cot x$

١٣) $\lim_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

١٤) $\lim_{x\to0}\sin^{-1}x\cot x$

١٥) $\lim_{x\to\infty}(x^n e^{-x})\ ,\ n>0$

١٦) $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{a}{x}$

١٧) $\lim_{x\to\infty}x^n\sin\frac{a}{x}\ ,\ a>0$

١٨) $\lim_{x\to1^+}\ln x\ln(x-1)$

١٩) $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

٢٠) $\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right)$

٢١) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-x^{\frac{1}{3}})}\right]$

٢٢) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\cot x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

٢٣) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

٢٤) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

٢٥) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

٢٦) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

٢٧) $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$

٢٨) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

٢٩) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

٣٠) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$

٣١) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$

٣٢) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$

٣٣) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{\sin x}$

٣٤) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

٣٥) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

الإجابـات

١) $\frac{1}{2}$	٢) $-\frac{1}{3}$	٣) ∞	٤) 1	٥) 3
٦) $\frac{1}{2}$	٧) 5	٨) ∞	٩) صفر	١٠) $\frac{\pi^2}{2}$
١١) 1	١٢) 0	١٣) $\frac{2}{\pi}$	١٤) 1	١٥) صفر
١٦) a ١٧) ∞ من أجل $n>1$، a من أجل n=1، صفر من أجل $n<1$				
١٨) صفر	١٩) $\frac{1}{2}$	٢٠) $\frac{1}{5}$	٢١) $\frac{1}{12}$	٢٢) -1
٢٣) 1	٢٤) 1	٢٥) e^3	٢٦) 1	٢٧) 1
٢٨) 1	٢٩) $\frac{1}{e}$	٣٠) $\frac{1}{e}$	٣١) $\frac{1}{e}$	٣٢) 1
٣٣) 1	٣٤) صفر	٣٥) 1		

الفصل السابع عشر

التكامــلات المعتلــة
IMPROPER INTEGRALS

(١ ,١٧) فترة التكامل محدودة

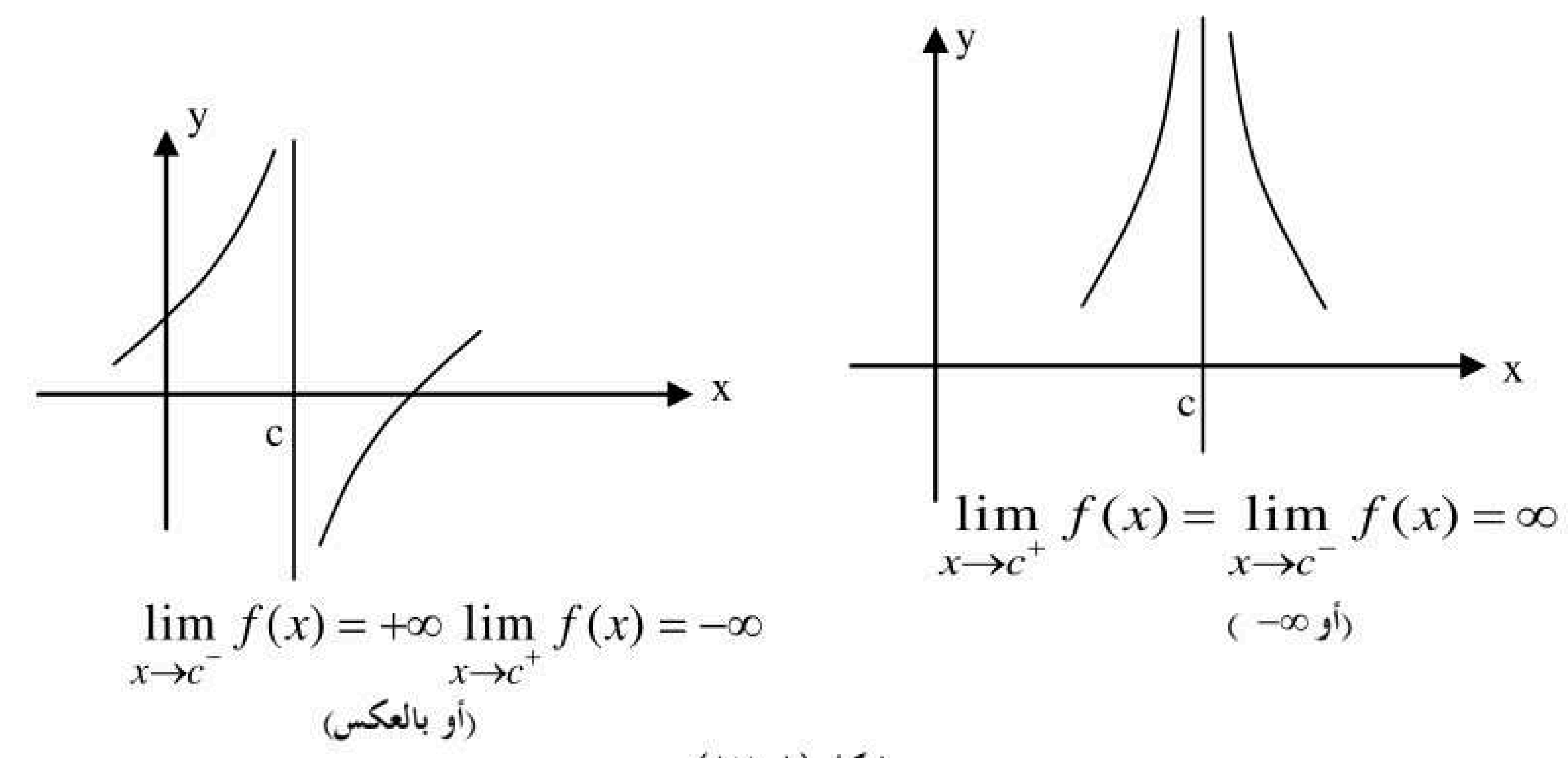
نعلم أنه إذا كانت f دالة متصلة على الفترة [a,b]، فإن:

١) f قابلة للتكامل على الفترة المغلقة [a,b]

٢) وإذا كانت c نقطة تنتمي للمفتوحة (a,b)، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (١٧ ,١)$$

لنتساءل الآن عن الحالة التي يختل فيها شرط الاتصال على الفترة [a,b] عند نقطة واحدة فقط $c \in (a,b)$ ، ويكون عدم الاتصال عند c من النمط الموضح في الشكل (١ ,١٧).



شكل (١ ,١٧).

نقول إن للدالة f عند c نقطة **عدم اتصال لانهائية**.

في هذه الحالة، نعرف الآن التكاملين الجزئيين في الطرف الثاني من (١ , ١٧)، بالشكل:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx$$
$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)dx \qquad (١٧ , ٢)$$

إذا كانت النهايتان السابقتان في (٢ , ١٧) موجودتين، عند ذلك نقبل التعريف أن المساواة في (١ , ١٧) هي مساواة صحيحة ونقول إن التكامل: $\int_a^b f(x)dx$ هو تكامل متقارب وموجود (رغم وجود علة عدم الاتصال للدالة f عند c)

تعريف (١ , ١٧)

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة [a,b] ، باستثناء نقطة واحدة c تنتمي للفترة (a,b)، وإذا كان التكاملان الجزئيان في (٢ , ١٧) موجودين. فبالتعريف: نقبل أن المساواة في (١ , ١٧) صحيحة، وأن:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)dx \qquad (١٧ , ٣)$$

ونقول عند ذلك، إن التكامل متقارب على الفترة [a,b]. إذا كانت إحدى النهايتين في (٣ , ١٧) غير موجودة أو كلاهما غير موجود، فإننا نقول إن التكامل في (٣ , ١٧) تكامل متباعد.
ونعني بكلمة موجود، أنه محدود وذو قيمة وحيدة.

مثـال (١ , ١٧)

اختبر تقارب (Converge)أو تباعد (Diverge) التكامل:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

الحـل

لاحظ أن المقدار: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$ غير متصل عند x = 1 لانعدام مقامه.

لاحظ انتهـــــاء الدالة نحو اللانهاية ∞ عندما $x \to 1^+$ ونحو سالب لانهايـة $-\infty$ عنـدما $x \to 1^-$. فالتكامل معتل عند هذه النقطة. لنتساءل عن إمكانية وجود النهايتين:

$$\lim_{t \to 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} \quad , \quad \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$ ، فنجد:

(١)
$$\lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} dx = \lim_{t \to 1^-} \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} \Big|_0^t$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{t \to 1^-} \left[(t-1)^{\frac{2}{3}} - (0-1)^{\frac{2}{3}} \right] = -\frac{3}{2}$$

(٢)
$$\lim_{t \to 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{t \to 1^+} \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} \Big|_t^2$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{t \to 1^+} \left[(2-1)^{\frac{3}{2}} - (t-1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{3}{2}$$

إذن: النهايتان موجودتان والتكامل يساوي مجموع النهايتين السابقتين، إذن:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

والتكامل متقارب نحو القيمة 0. من الممكن أن تكون علـة التكامـل وموضـع نقطـة عـدم الاتصال، عند أحد طرفي فترة التكامل والمثال التالي يوضح ذلك.

مثـال (٢, ١٧)

اختبر فيما إذا كان التكامل التالي متقاربا أو متباعدا.

$$\int_0^1 x \ln x dx$$

الحـل

لاحظ أن الدالة: $f(x) = x \ln x$ هي غير متصلة وغير معرفة عند x=0، وأن: $\lim_{t \to 0^+} In(x) = -\infty$. فالتكامل معتل عند هذه النقطة ويكتب على الشكل:

$$\int_0^1 x \ln x dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 x \ln x dx$$

من الواضح أن:

$$\int_t^1 (\ln x)(x dx) = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_t^1 - \int_t^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

(وضعنا: $xdx = du \Leftarrow u = \frac{x^2}{2}$ ، $\ln x = v \Leftarrow dv = \frac{1}{x}dx$)

$$= \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{t^2}{2}\ln t - \left.\frac{x^2}{4}\right|_t^1 = -\frac{t^2}{2}\ln t - \frac{1}{4} + \frac{t^2}{4}$$

بأخذ نهاية المقدار السابق عندما $t \to 0^+$ ، نجد:

$$\int_0^1 x\ln x dx = \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{t^2}{2}\ln t + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} t^2 \ln t - \frac{1}{4}$$

(عدم التعيين هو من الشكل $0\times\infty$)

$$= -\frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{t^{-2}} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-2t^{-3}} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{t\to 0^+} t^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$ (التكامل متقارب)

(طبقنا قاعدة لوبيتال، وعدم التعيين هو من الشكل $\frac{0}{0}$)

من الممكن أن تتعدد نقاط عدم الاتصال لدالة التكامل على فترة التكامل [a,b]. سنعالج بشكل عام هذا الأمر من خلال تجزئة فترة التكامل بحيث تحوي كل فترة جزئية على نقطة عدم اتصال وحيدة، ثم نختبر بعد ذلك تقارب التكامل على كل فترة جزئية وبشكل مستقل عن الأخرى، المثال التالي يوضح ذلك.

مثـــال (١٧,٣)

اختبر تقارب أو تباعد ا لتكامل التالي: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

الحـــل

من الملاحظ أن مجال دالة التكامل، هو: (0,1) وأن طرفي هذه الفترة نقطتي عدم اتصال لهذه الدالة.

لاحظ أن: $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \infty$ ، وأن: $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \infty$

لنجزئ فترة التكامل إلى تكاملين بالنقطة: $x = \frac{1}{2}$ مثلا، فنجد:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \lim_{t\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^t \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \lim_{t\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$ لاحظ أن:

$$x(1-x) = -x^2 + x = -(x^2 - x) = -\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

إذن: $$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \sin^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + c = \sin^{-1}(2x-1) + c$$

بالتالي، فإن:

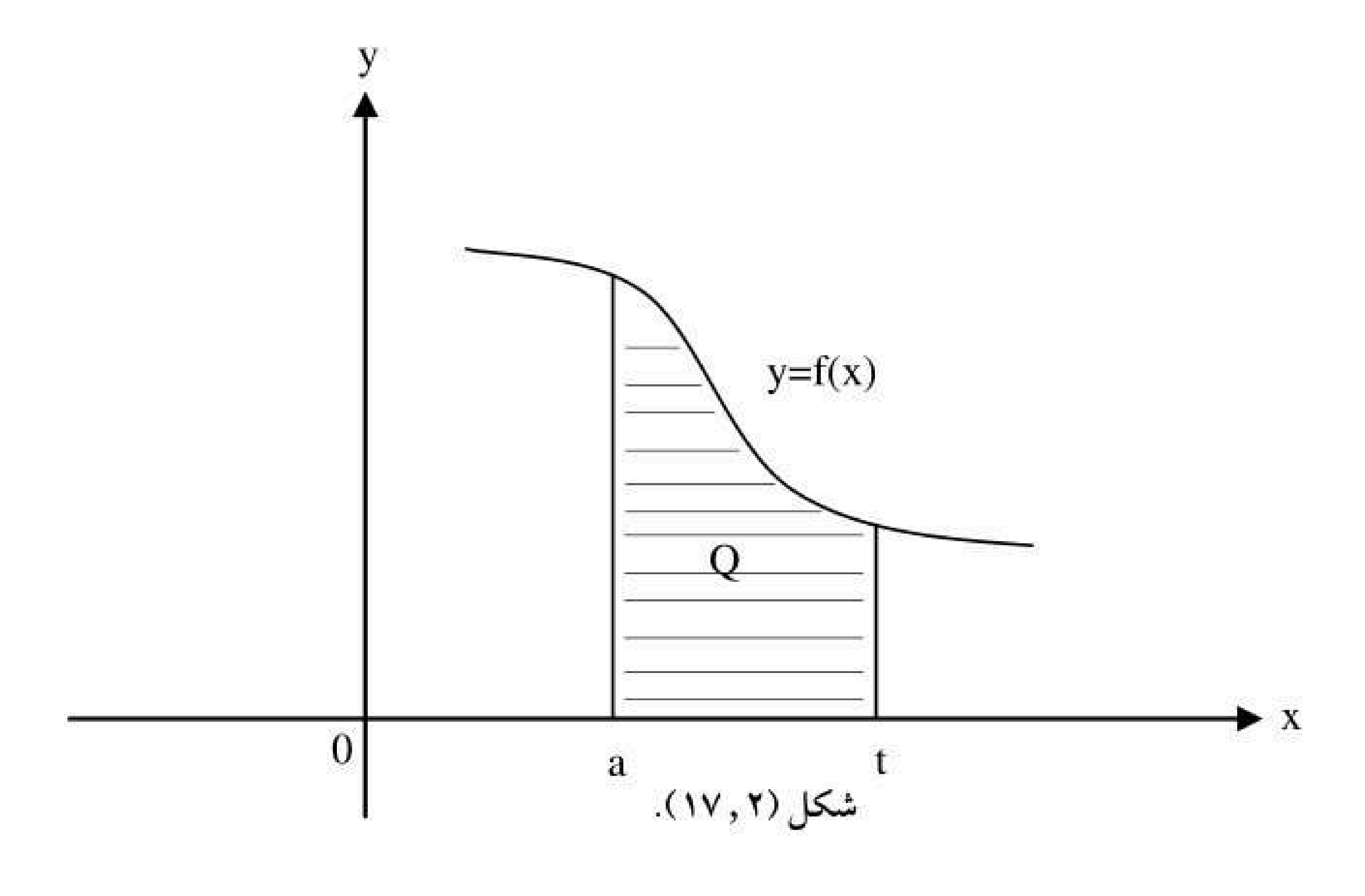
$$\lim_{t\to 0^+}\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{t\to 0^+} \sin^{-1}(2x-1)\Big|_t^{\frac{1}{2}} = \lim_{t\to 0^+}\left[\sin^{-1}0 - \sin^{-1}(2t-1)\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{t\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{t\to 1^-} \sin^{-1}(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{t} = \lim_{t\to 1^-}\left[\sin^{-1}(2t-1) - \sin^{-1}0\right] = \frac{\pi}{2}$$

فالتكامل متقارب ويساوي: $$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

(٢ , ١٧) فترة التكامل غير محدودة

لتكن f دالة متصلة وغير سالبة $(f(x) \ge 0)$ ، على الفترة اللانهائية $[a,\infty)$ وتحقق الشرط: $\lim_{t\to\infty} f(x) = 0$.



شكل (٢ , ١٧).

لنبحث عن مساحة المنطقة Q الواقعة تحت المنحنى $y = f(x)$ وفوق المحور x والمحصورة بين المستقيمين: $x = t$ و $x = a$ حيث: $t > a$، نجد:

$$S = \int_a^t f(x)dx$$

إذا انتهت المساحة S نحو قيمة محدودة ووحيدة، عندما $t \to \infty$ ، فبالتعريف نقول عن هذه القيمة، إنها تمثل مساحة المنطقة اللانهائية الواقعة فوق المحور x وتحت المنحني: $y = f(x)$ والمحدودة عند طرفها الأيسر بالمستقيم $x = a$ (شكل (٢ , ١٧))، وتعطى هذه المساحة بالصيغة:

$$S = \int_a^\infty f(x)dx$$

نقدم فيما يلي تعريفا يعمم هذا المفهوم.

تعريف (٢ , ١٧)

١) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة اللانهائية $[a,\infty)$ ، فإن:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx \qquad (١٧ , ٤)$$

٢) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة اللانهائية $(-\infty,a]$ ، فإن:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx \qquad (١٧ , ٥)$$

يدعى كل من التكاملين السابقين بالتكامل المعتل. العلة هنا تكمن في كون أحد حدي التكامل غير محدود. نقول إن التكامل في (٤ , ١٧) متقارب إذا كانت النهاية في الجانب الأيمن موجودة، وإلا فنقول إنه متباعد وبالمثل في (٥ , ١٧).

تعريف (٣ , ١٧)

إذا كانت الدالة f متصلة على R (مجموعة الأعداد الحقيقية)، فإن:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx \qquad (١٧ , ٦)$$

حيث a أي عدد حقيقي.

نقول إن التكامل في الجانب الأيسر من المساواة السابقة متقارب، إذا كان كل من التكاملين في الجانب الأيمن من نفس المساواة متقاربا وموجودا، أما إذا كان أحد التكاملين متباعدا أو كلاهما فنقول إنه تكامل متباعد.

مثـــال (٤, ١٧)

اختبر تقارب أو تباعد التكاملات التالية:

١) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx$ ٢) $\int_{0}^{\infty} \ln x dx$

الحـــل

١)
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-|x|}dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx$$
$$= \lim_{t\to-\infty} e^{x}\Big|_{t}^{0} - \lim_{t\to\infty} e^{-x}\Big|_{0}^{t}$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(1-e^{t}) + \lim_{t\to\infty}(-e^{-t}+1) = 1+1 = 2$$

فالتكامل متقارب نحو العدد 2.

٢)
$$\int_{0}^{\infty} \ln x dx = \int_{0}^{1} \ln x dx + \int_{1}^{\infty} \ln x dx$$

(التكامل معتل عند: $x = 0$ وعند $x = \infty$)

$$= \lim_{t\to 0^{+}} \int_{t}^{1} \ln x dx + \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \ln x dx$$

لاحظ أن: $\int \ln x dx = x\ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x\ln x - x + c$

(وضعنا: $dx = du \Leftarrow x = u$ ، $v = \ln x \Leftarrow dv = \frac{1}{x}dx$)

بالتالي، فإن:

$$\int_{1}^{\infty} \ln x dx = \lim_{t\to\infty}(x\ln x - x)\Big|_{1}^{t} = \lim_{t\to\infty} t(\ln t - 1) + 1 = \infty$$

فالتكامل الثاني متباعد. إذن التكامل: $\int_{0}^{\infty} \ln x dx$ تكامل متباعد.

تمارين (١٧,١)

بين فيما إذا كانت المعتلة التالية متقاربة أو متباعدة، أوجد قيمة التكامل في حالة تقاربها.

١) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ٢) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$

٣) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ ٤) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

٥) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ٦) $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$

٧) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ ٨) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$

٩) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ ١٠) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$

١١) $\int_0^\infty \sin x dx$ ١٢) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$

١٣) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ ١٤) $\int_a^\infty \frac{dx}{x\ln x}$ $(a>1)$

١٥) $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$ ١٦) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot x dx$

١٧) $\int_0^\infty e^{-2x} dx$ ١٨) $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$

١٩) $\int_2^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^2}$ ٢٠) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$

٢١) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$

الإجابـات

١) 2 ٢) متباعد

٣) $\frac{1}{1-P}$ إذا كان p < 1، متباعد إذا كان $P \geq 1$ ٤) متباعد

٥) $\frac{\pi}{2}$ ٦) متباعد

٧) 1	٨) $\frac{1}{1-P}$ إذا كان p>1 ومتباعد إذا كان $P \le 1$
٩) π	١٠) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$
١١) متباعد	١٢) متباعد
١٣) $\frac{1}{\ln 2}$	١٤) متباعد
١٥) $\frac{1}{\ln 2}$	١٦) متباعد
١٧) $\frac{1}{2}$	١٨) $\frac{\pi^2}{8}$
١٩) $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ln 3$	٢٠) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$
٢١) متباعد	

الفصل الثامن عشر

تطبيقات في حساب التكامل باستخدام الإحداثيات الوسيطية والقطبية

THE APPLICATIONS OF INTEGRAL BY USING THE PARAMETRIC AND POLAR COORDINATES

(١ ,١٨) المساحات
The Areas

أ) حساب المساحات باستخدام الإحداثيات الوسيطية

مثـــال (١ ,١٨)

احسب مساحة المنطقة التي تحد

الدائرة: $x^2 + y^2 = a^2$

الحـــل

مساحة القرص الدائري تساوي: $S = 4\int_0^a y\ dx$

(أربعة أمثال مساحة ربع الدائرة)

لنضع: $x = a \sin t$ ، فنجد: $y = a\cos t$

(التمثيل الوسيطي للدائرة)

y

x

شكل (١ ,١٨) .

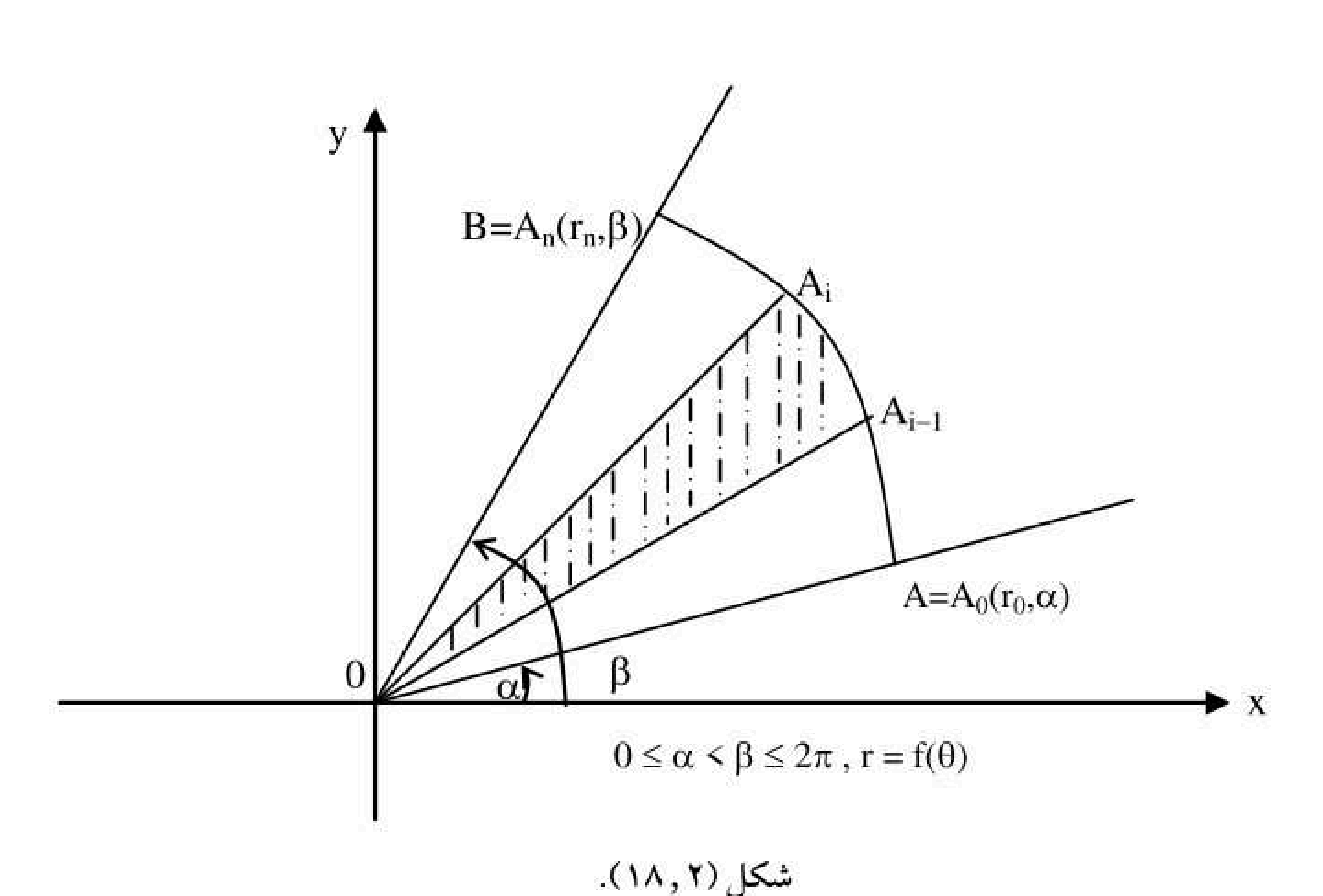
إذن: $S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\,(a\cos t dt) = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$

(لاحظ أن: $t=0 \Leftarrow \sin t=0 \Leftarrow x=0$

وأن: $t=\frac{\pi}{2} \Leftarrow \sin t=1 \Leftarrow x=a$)

$$= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = 2a^2\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2(\frac{\pi}{2}) = a^2\pi$$

ب) حساب المساحات باستخدام الإحداثيات القطبية:



شكل (٢ ,١٨).

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[\alpha,\beta]$ وتحقق الشرط: $f(\theta)\geq 0$ على هذه الفترة. وليكن C منحنيا قطبيا معرفا بالمعادلة: $r=f(\theta)$. لنفرض أن $A_0(r_0,\alpha)$ ، $B(r_n,\beta)$ نقطتين من هذا المنحني حيث: $0\leq\alpha<\beta\leq 2\pi$. لإيجاد مساحة المنطقة Q المحصورة بين قوس المنحني $\overset{\frown}{AB}$ ونصفي المستقيمين: [OA، [OB والموضحة في الشكل (٢ ,١٨)، نقسم المنطقة Q إلى n قطاع منحني وذلك بتجزئة القوس $\overset{\frown}{AB}$ بالنقاط: $A=A_0, A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_i, ..., A_n$ إلى n قوس ثم وصل النقطة 0 بهذه النقاط. من الملاحظ أن الزوايا التي تحدد هذه النقاط هي على الترتيب: $\theta_0=\alpha, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n=\beta$ ، وأن مساحة القطاع المنحني المظلل في الشكل (٢ ,١٨) وليكن ΔS_i

والذي زاويته المركزية تساوي: $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ محصورة بين القيمتين: $\frac{1}{2}(f(u_i))^2\Delta\theta_i$ ، $\frac{1}{2}(f(v_i))^2\Delta\theta_i$. حيث $\mathrm{f(u_i)}$ هي القيمة الصغرى للدالة f على الفترة $[\theta_{i-1},\theta_i]$ و $f(v_i)$ هي القيمة العظمى لهذه الدالة على نفس الفترة (لاحظ أن مساحة أي قطاع دائري طول نصف قطر دائرته يساوي a وزاويته المركزية تساوي w تعطى بالصيغة: $\frac{1}{2}a^2w$) . إذن:

$$\frac{1}{2}(f(u_i))^2\Delta\theta_i \le \Delta S_i \le \frac{1}{2}(f(v_i))^2\Delta\theta_i$$

بملاحظة أن مساحة المنطقة Q تساوي: $S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$ ، فإن:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(f(u_i))^2\Delta\theta_i \le \sum_{i=1}^{n}\Delta S_i \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(f(v_i))^2\Delta\theta_i$$

وعندما: $\max\Delta\theta_i \to 0$ ، فإن مجموع ريمان الأعلى في الجانب الأيمن من المتباينة السابقة، ومجموع ريمان الأدنى في الجانب الأيسر ينتهي نحو نفس النهاية والتي تساوي:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(f(\theta))^2\,d\theta} = \boxed{\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2\,d\theta}$$

مثــال (٢, ١٨)

أوجد المساحة المحصورة بين الدائرتين:

$$r=-2\sin\theta \text{ و } r=2\cos\theta \qquad (١٨,١)$$

الحــل

لنبحث عن المعادلتين الديكارتيتين للمنحنيين السابقين، فنجد بضرب طرفي كل من المعادلتين (١٨,١) بالمتغير r:

(أ) $r^2=2r\cos\theta \Leftarrow x^2+y^2=2x \Leftarrow (x-1)^2+y^2=1$

(لاحظ أن: r=0 نقطة من نقاط المنحني: $r=2\cos\theta$ توافق $\theta=\frac{\pi}{2}$).

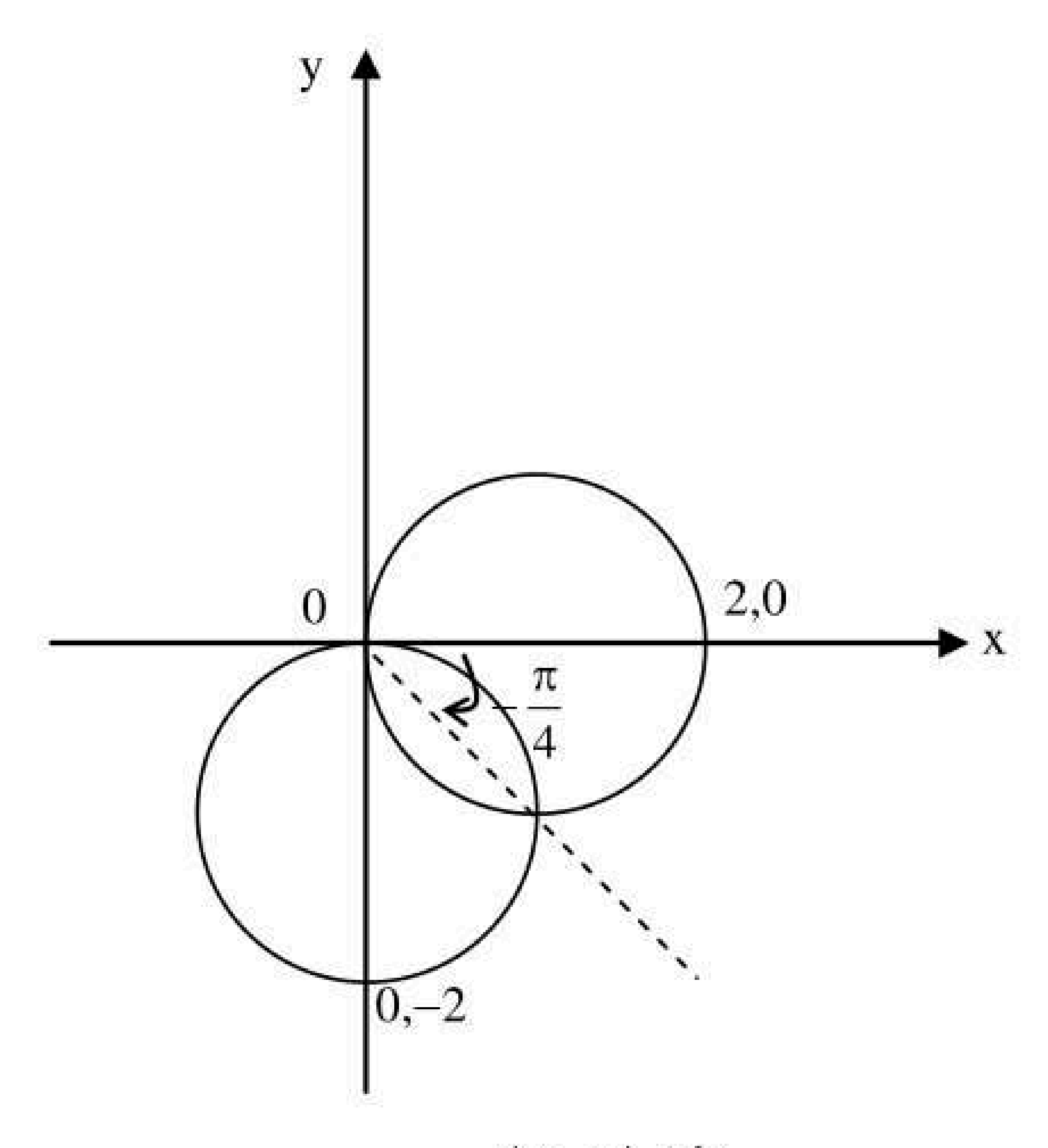
(ب) $r^2=-2r\sin\theta \Leftarrow x^2+y^2=-2y \Leftarrow x^2+(y+1)^2=1$

(لاحظ أن r=0 نقطة من نقاط المنحني: $r=-2\sin\theta$ توافق $\theta=0$)

نحصل على نقطة التقاطع الأخرى للدائرتين خلاف نقطة الأصل، من المعادلة:

$$2\cos\theta=-2\sin\theta \Rightarrow \tan\theta=-1 \Rightarrow \theta=-\frac{\pi}{4}$$

لاحظ أن الدائرتين متماثلتان بالنسبة لمنصف الربع الثاني.



شكل (١٨,٣).

إذن المساحة المحصورة بينهما تساوي:

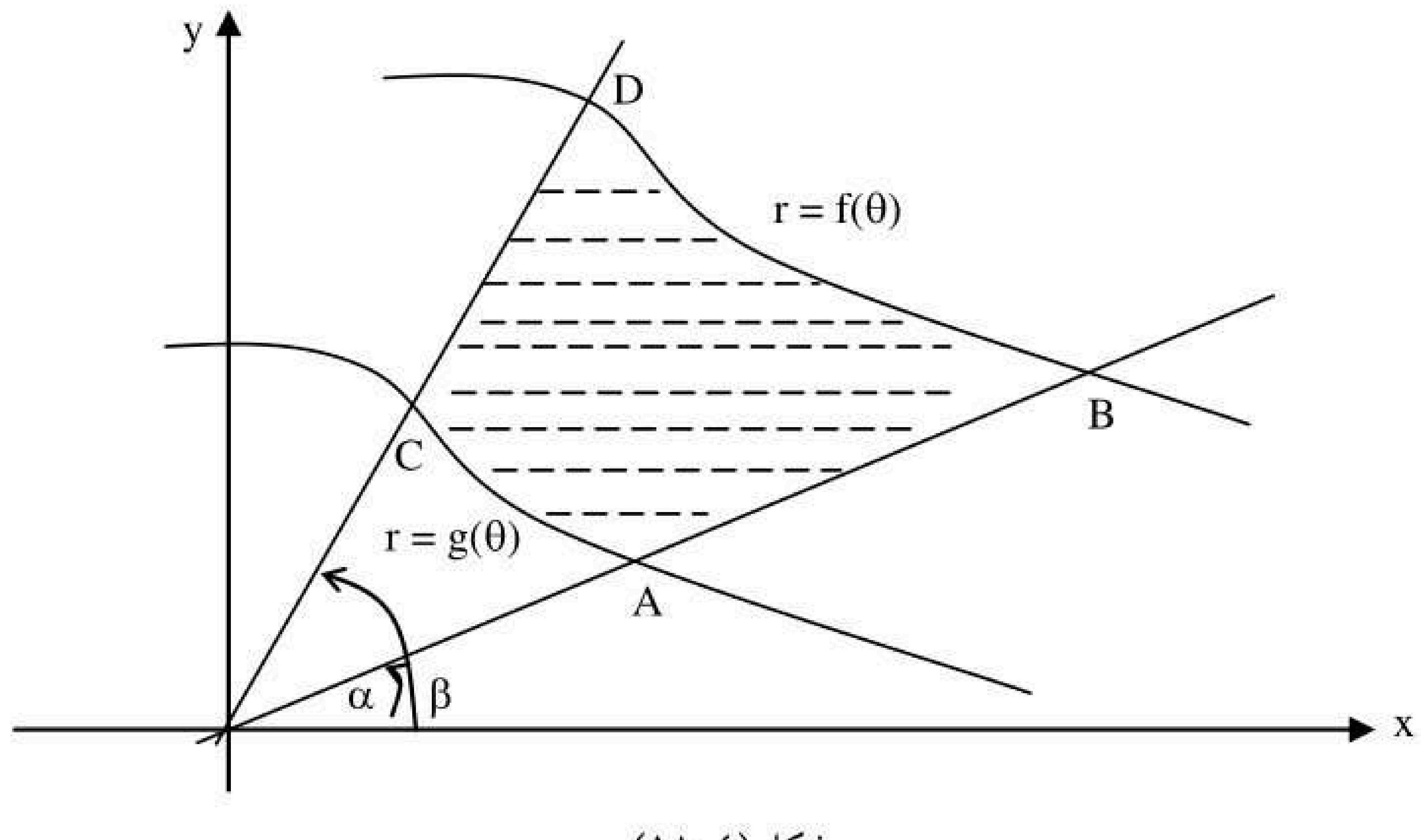
$$2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{1}{2}r^2 d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}4\sin^2\theta d\theta=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$=2\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}=\frac{\pi}{2}-1$$

ج) حساب المساحة بين منحنين قطبيين

ليكن: $r=f(\theta)$ ، $r=g(\theta)$ منحنيين قطبيين يخضعان لنفس الشروط التي ذكرت في الفقرة (ب). إذا كان: $f(\theta)\geq g(\theta)$ فإن المساحة المظللة بين المنحنيين، شكل (١٨,٤) تعطى بالصيغة:

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[(f(\theta))^2-(g(\theta))^2\right]d\theta$$



شكل (١٨,٤).

مثـــال (١٨,٣)

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين:

$r=6$ ، $r=3\sec\theta$ ، إذا كان: $x\geq 3$

الحـــل

المعادلة: $r=6$ ، تمثل دائرة طول نصف قطرها 6 ومركزها نقطة الأصل.

والمعادلة: $r=3\sec\theta$ أو $r\cos\theta=3$ ، تمثل مستقيما معادلة الديكارتية: $x=3$.

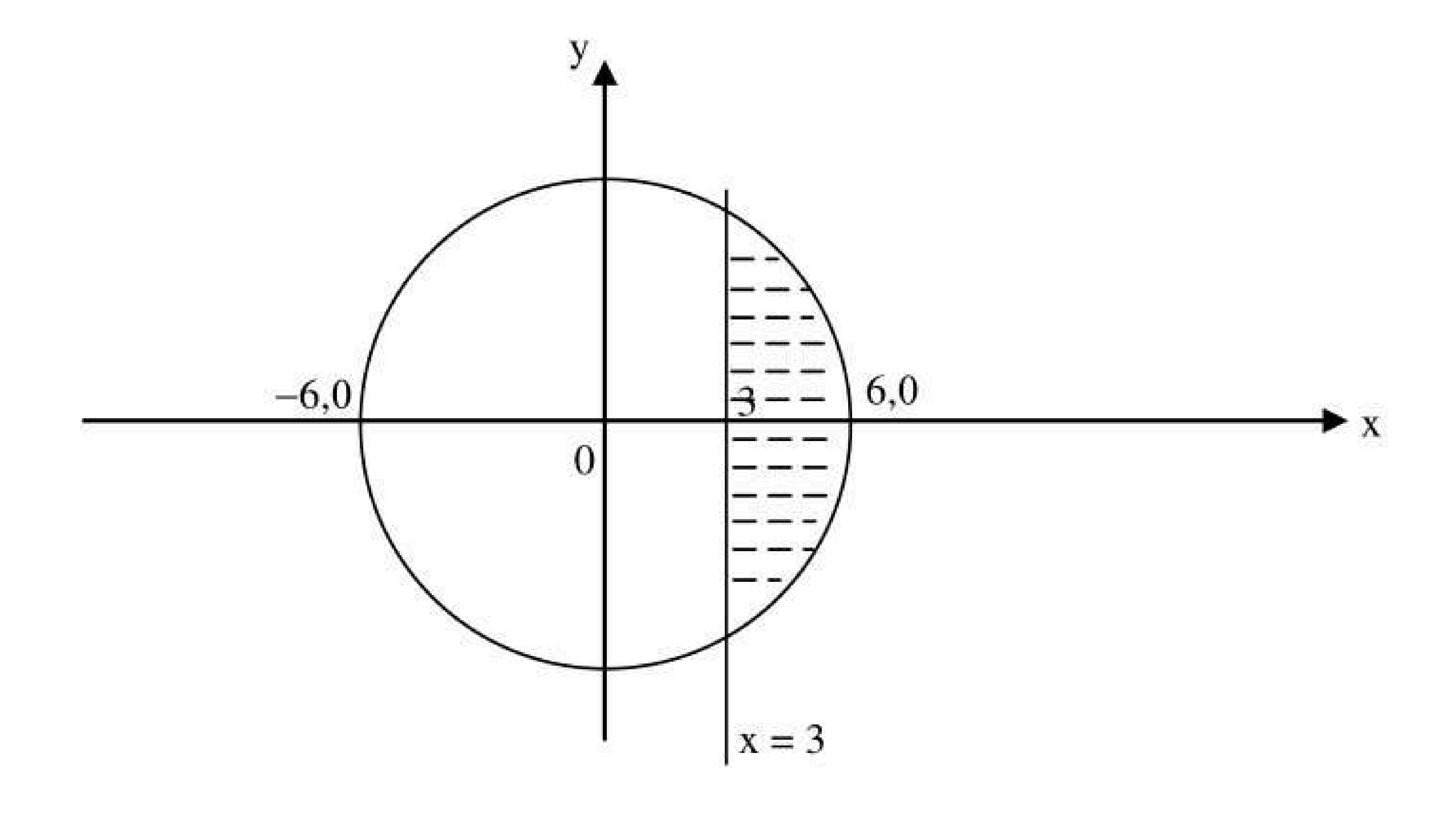
نحصل على نقاط التقاطع بين المنحنيين، من المعادلة:

$$3\sec\theta=6 \Leftarrow \cos\theta=\frac{1}{2} \Leftarrow \theta=\pm\frac{\pi}{3}$$

المساحة تساوي:

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(36-9\sec^2\theta)d\theta$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(36-9\sec^2\theta)d\theta=36\theta-9\tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=12\pi-9\sqrt{3}$$



شكل (٥ ,١٨) .

تمارين (١ ,١٨)

١) أوجد مساحة المنطقة التي يحدها المنحني: $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t$.

٢) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمحور x وقوس السيكلوئيد المعرف بالمعادلتين:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

٣) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بقوس المنحني:

$$\begin{cases} x = at - b\sin t \\ y = a - b\cos t \end{cases} \quad \left(a < b \le a\right)\Big)$$

والقطعة المستقيمة المارة بالنقطتين الموافقتين: $t = 0$ ، $t = 2\pi$.

٤) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني:

$$x = a(2\cos t - \cos 2t)$$
$$y = a(2\sin t - \sin 2t)$$

٥) أوجد مساحة الجزء المغلق من المنحني:

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \quad , \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

٦) أوجد المساحة التي يحدها منحني القلب: $r = a(1+\cos\theta)$.

٧) أوجد مساحة إحدى وريقات الشكل المعرف بالمعادلة: $r = a\cos 2\theta$.

٨) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $r^2 = a^2 \sin 4\theta$.

٩) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $r = a\sin 3\theta$.

١٠) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $r = 2 + \cos\theta$.

١١) أوجد مساحة الشكل المحدود بالقطع المكافئ: $r = a\sec^2 \dfrac{\theta}{2}$ ، ونصفي المستقيمين: $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ ، $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

١٢) أوجد مساحة القطع الناقص: $r = \dfrac{P}{1 + e\cos\theta}$ $(e < 1)$.

١٣) أوجد مساحة الشكل الواقع خارج الدائرة: r = a والمحدود بالمنحني: $r = 2a\cos 3\theta$.

١٤) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ ، (استخدم المعادلة القطبية).

الإجابات

١) $\dfrac{3}{8}\pi ab$ ٢) $3\pi a^2$ ٣) $\pi(b^2 + 2ab)$

٤) $6\pi a^2$ ٥) $\dfrac{3}{2}a^2$ ٦) $\dfrac{3}{2}\pi a^2$

٧) $\dfrac{\pi a^2}{8}$ ٨) a^2 ٩) $\dfrac{\pi a^2}{4}$

١٠) $\dfrac{9}{2}\pi$ ١١) $\dfrac{14 - 8\sqrt{2}}{3}a^2$ ١٢) $\dfrac{\pi p^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}$

١٣) $a^2\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ١٤) $\pi\sqrt{2}$

(١٨,٢) طول قوس
Arc Length

أ) طول قوس منحن معرف بمعادلتيه الوسيطيتين

ليكن C منحنيا مستويا معرفا وسيطيا بالمعادلتين:

$$x = \varphi(t) \text{ و } y = g(t)(\alpha \le t \le \beta)$$

لنفرض أن φ' ، g' دالتان متصلتان على هذه الفترة ولا تنعدمان معا (ربما تساويان الصفر معا عند أحد طرفي الفترة أو عند الطرفين معا)، مثل هذا المنحني يسمى **بالمنحني الأملس. لنفرض أن المنحني C لا يقطع نفسه وهذا يعني أن أية قيمتين مختلفتين للوسيط t بين α, β تحددان نقطتين مختلفتين على المنحني C (ربما تنطبق نقطة البداية للمنحني على نقطة النهاية)**. نجزئ القوس A_0A_n شكل (١٨,٦) بالنقاط المتتابعة:

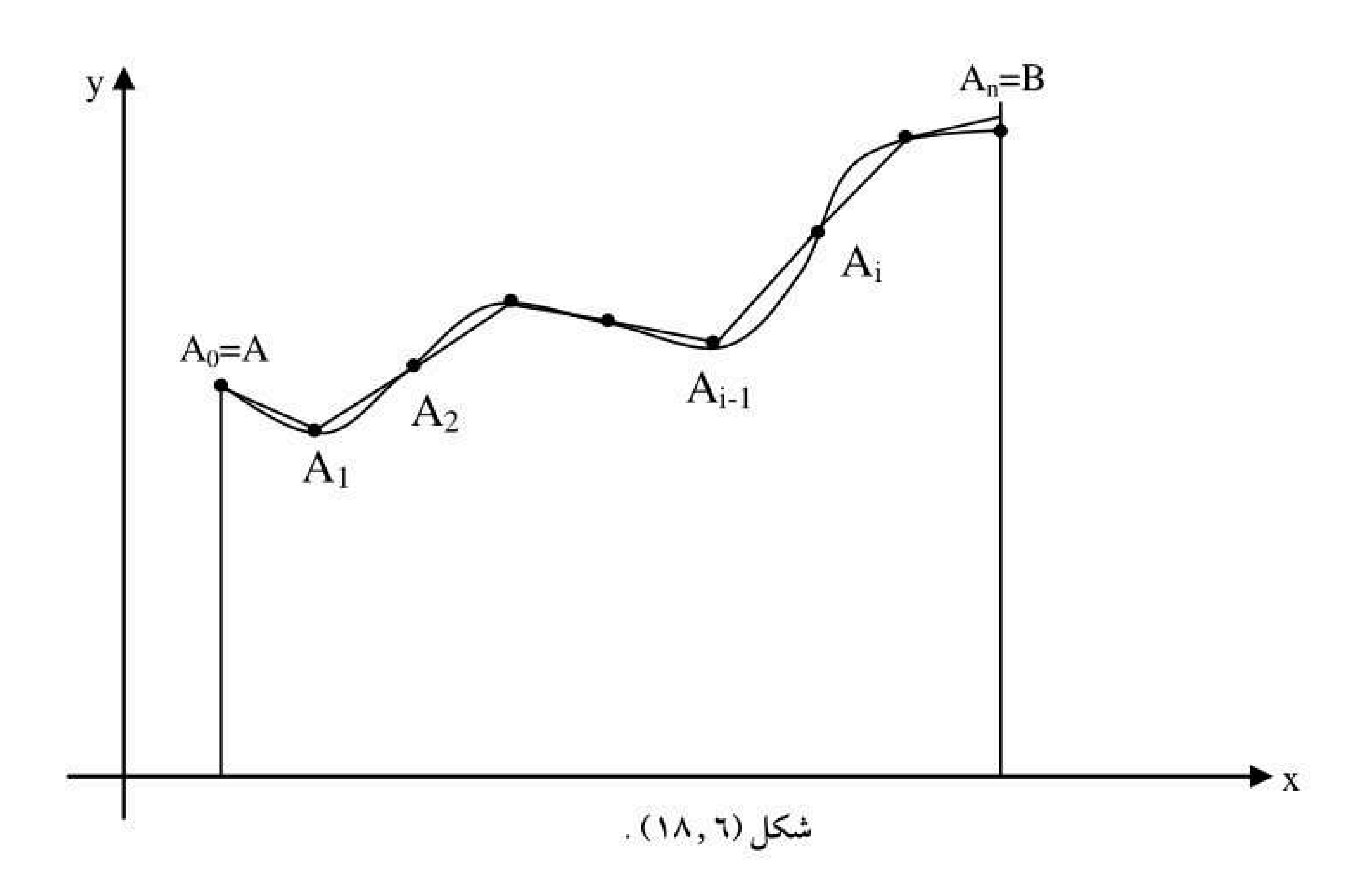
$$A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n = B$$

الموافقة وعلى الترتيب للقيم المتزايدة:

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_n = \beta$$

إلى n قوس جزئي، حيث $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

النقطة: $A_i = (f(t_i), g(t_i))$ على C توافق القيمة t_i للوسيط t.



شكل (١٨,٦).

من الملاحظ أن طول القطعة $[A_{i-1}, A_i]$ يساوي:

$$|A_{i-1}A_i| = \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2} \qquad (١٨,٢)$$

لكن:

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})f'(\lambda_i)\ ,\ g(t_i) - g(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})g'(w_i)$$

(حسب نظرية القيمة المتوسطة، حيث λ_i, w_i محصورتان بين t_i, t_{i-1})

بالتالي، فإن: $|A_{i-1}A_i| = \sqrt{(f'(\lambda_i))^2 + g'(w_i))^2}\ \Delta t_i$

عندما ينتهي تنظيم التجزئة نحو الصفر $\max \Delta t_i \to 0$ ، فإن نهاية:

$\sum_{i=1}^{n} |A_{i-1}A_i|$ (مجموع أطوال أضلاع المضلع المرسوم على المنحني)، تسمى بالتعريف طول قوس المنحني C الواصل بين النقطتين A,B ، ويساوي:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\ dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt \qquad (١٨,٣)$$

(رمزنا لطول القوس بالرمز L)

ملحوظة (١٨,١)

نعلم أن طول القوس الواصل بين النقطتين

$$A_0(f(t_0), g(t_0)), B(f(t), g(t))$$

حيث t قيمة للوسيط ويوافقها نقطة على المنحني C ، يعطى بالصيغة:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt \qquad (١٨,٤)$$

بالاستفادة من النظرية الأساسية في التكامل، نجد:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt \Rightarrow ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

تصبح الصيغة (١٨,٣) على الشكل:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt \qquad (١٨,٥)$$

إذا لم يكن قوس المنحني أملسا بل اتحادا لعدة أقواس متتابعة كل منها أملس بنفسه. فبالتعريف، طول هذا القوس يساوي مجموع أطوال هذه الأقواس.

مثـــال (١٨,٤)

أوجد طول محيط الدائرة:

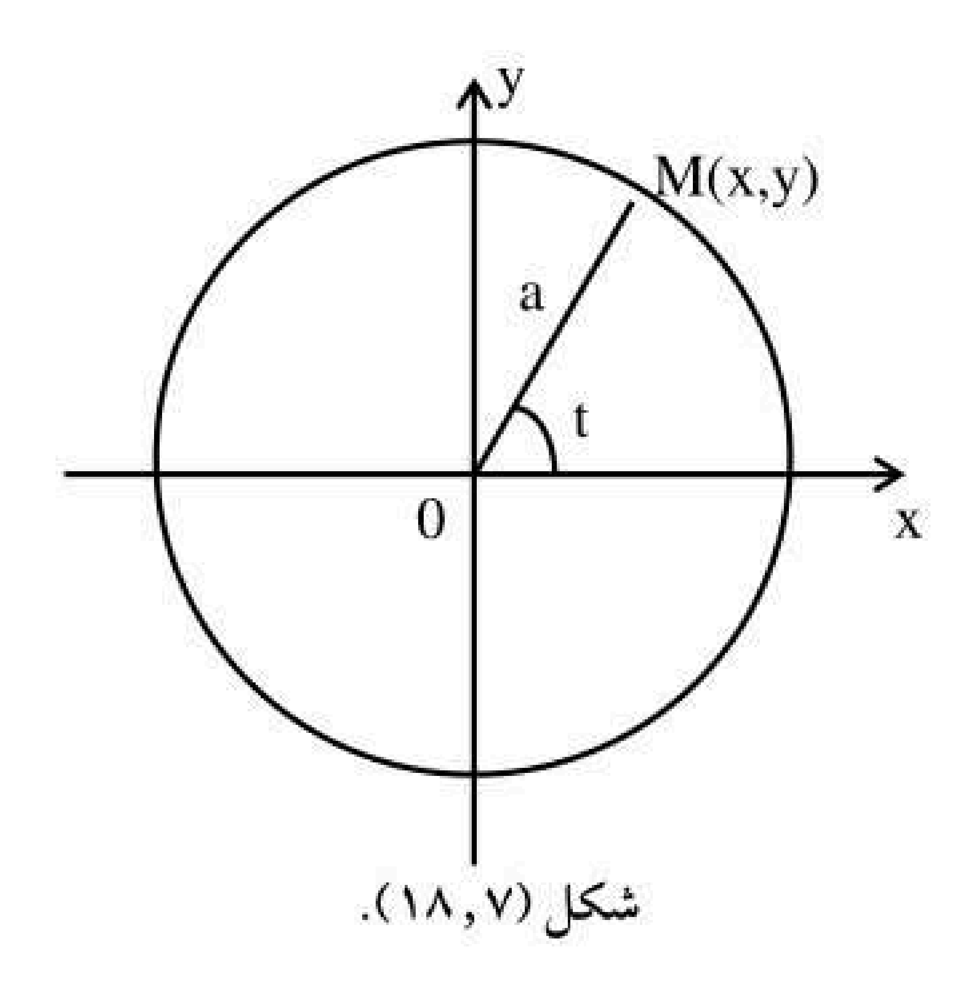
$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (١٨,٥)$$

الحـــــل

بفرض أن t هي الزاوية الموجهة التي يصنعها المتجه $\vec{OM}$ مع المحور x، فإن:

$$y = a\sin t \text{ ، } x = a\cos t \qquad (١٨,٦)$$

$$t \in [0, 2\pi]$$



شكل (١٨,٧).

نسمي المعادلتين (١٨,٦)، بالمعادلتين الوسيطيتين للدائرة .

من الملاحظ ، أن: $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi} dt = 2\pi a$

مثـــال (١٨,٥)

أوجد طول قوس السيكلوئيد: $x = 2(t - \sin t) \quad , \quad y = 2(1 - \cos t)$

الموضح في الشكل (١٨,٨).

الحــل

من الواضح أن:

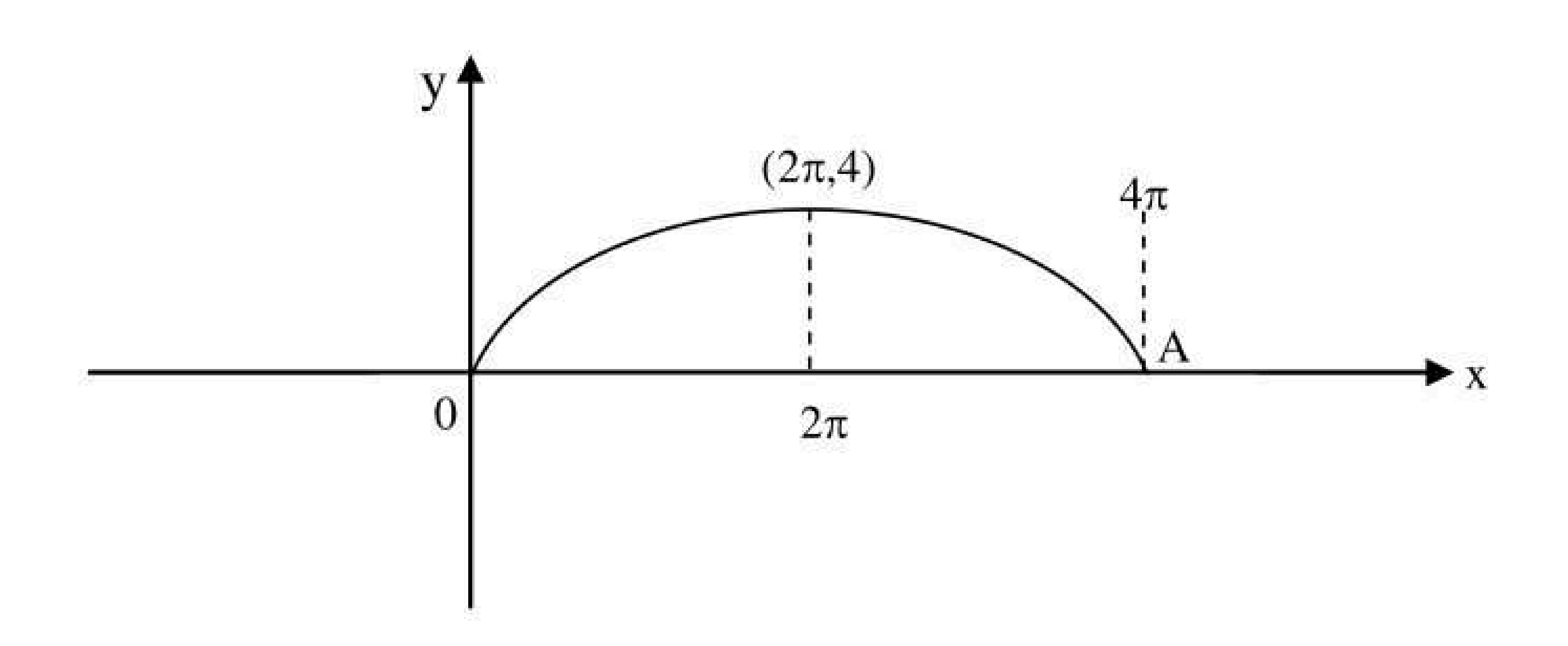
$$\frac{dx}{dt} = 2(1-\cos t) \ , \ \frac{dy}{dt} = 2\sin t$$

وأن نقطتي تقاطع المنحني مع المحور x يوافقهما $t = 2\pi$, $t = 0$، إذن:

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\ dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\ dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\ dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\ dt = 4\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\ dt = -4\frac{\cos\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{2\pi} = -8(-1-1) = 16$$

(لاحظ أن: $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$)



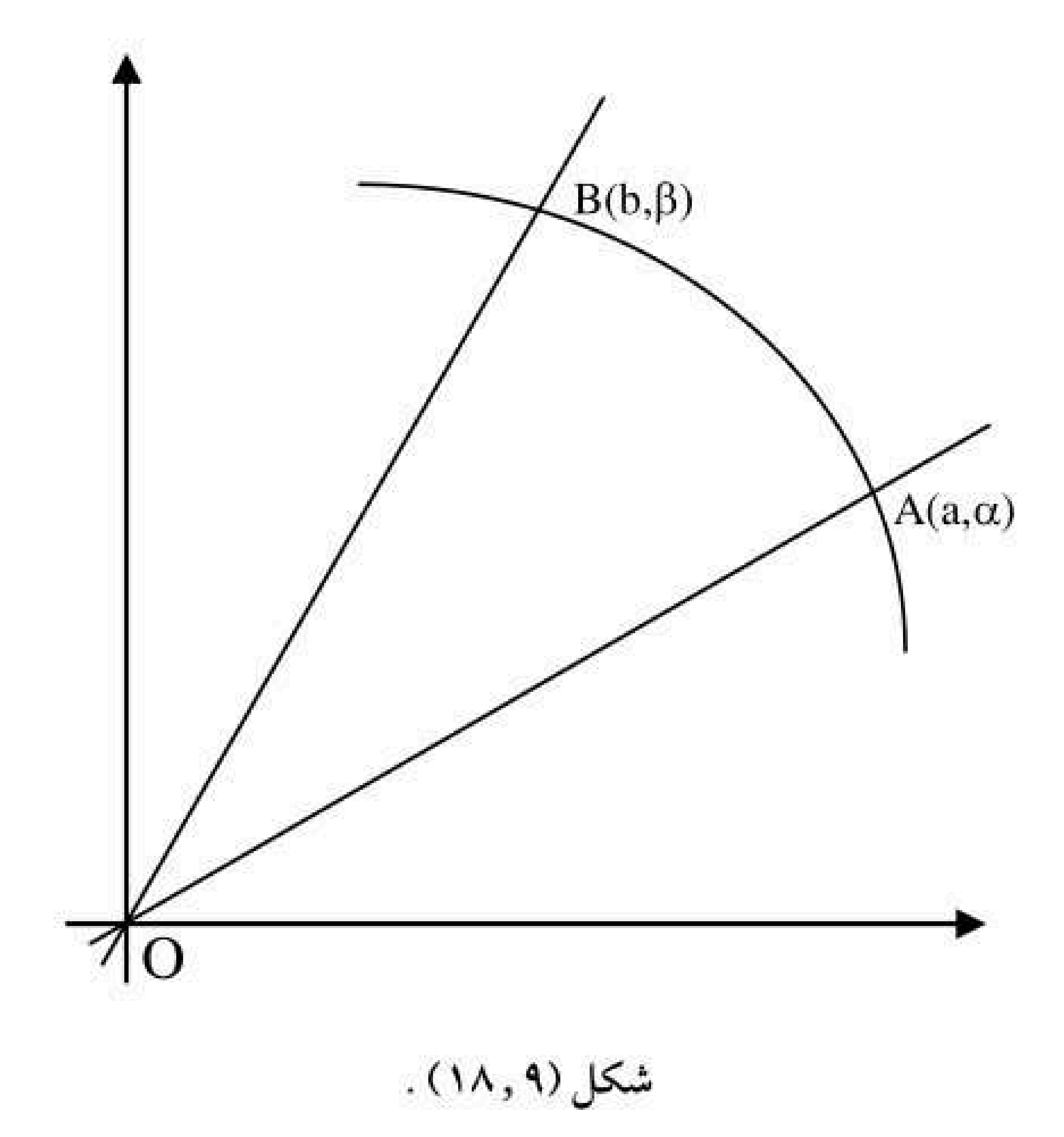
شكل (٨ , ١٨).

ب) طول قوس منحن معرف بمعادلته القطبية

ليكن C منحنيا مستويا (أملسا لا يقطع نفسه) معرفا بمعادلته القطبية: $r = f(\theta)$ ، حيث f دالة متصلة على الفترة [c,d] ومشتقتها متصلة على هذه الفترة.

ليكن $\overset{\frown}{AB}$ قوسا من هذا المنحني نقطة بدايته A محددة بالزوج المرتب (a, α)، ونقطة نهايته B محددة بالزوج المرتب (b, β).

نعلم أن C يقبل التمثيل الوسيطي: $x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta$



شكل (١٨,٩) .

ونعلم أن L طول قوس المنحني، يعطى بالصيغة:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \qquad (١٨,٧)$$

لكن: $\frac{dx}{d\theta} = x' = r'\cos\theta - r\sin\theta$ ، $\frac{dy}{d\theta} = y' = r'\sin\theta + r\cos\theta$

إذن: $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = r^2 + r'^2$

بالتالي، فإن طول القوس يعطى بالصيغة:

$$\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta}$$

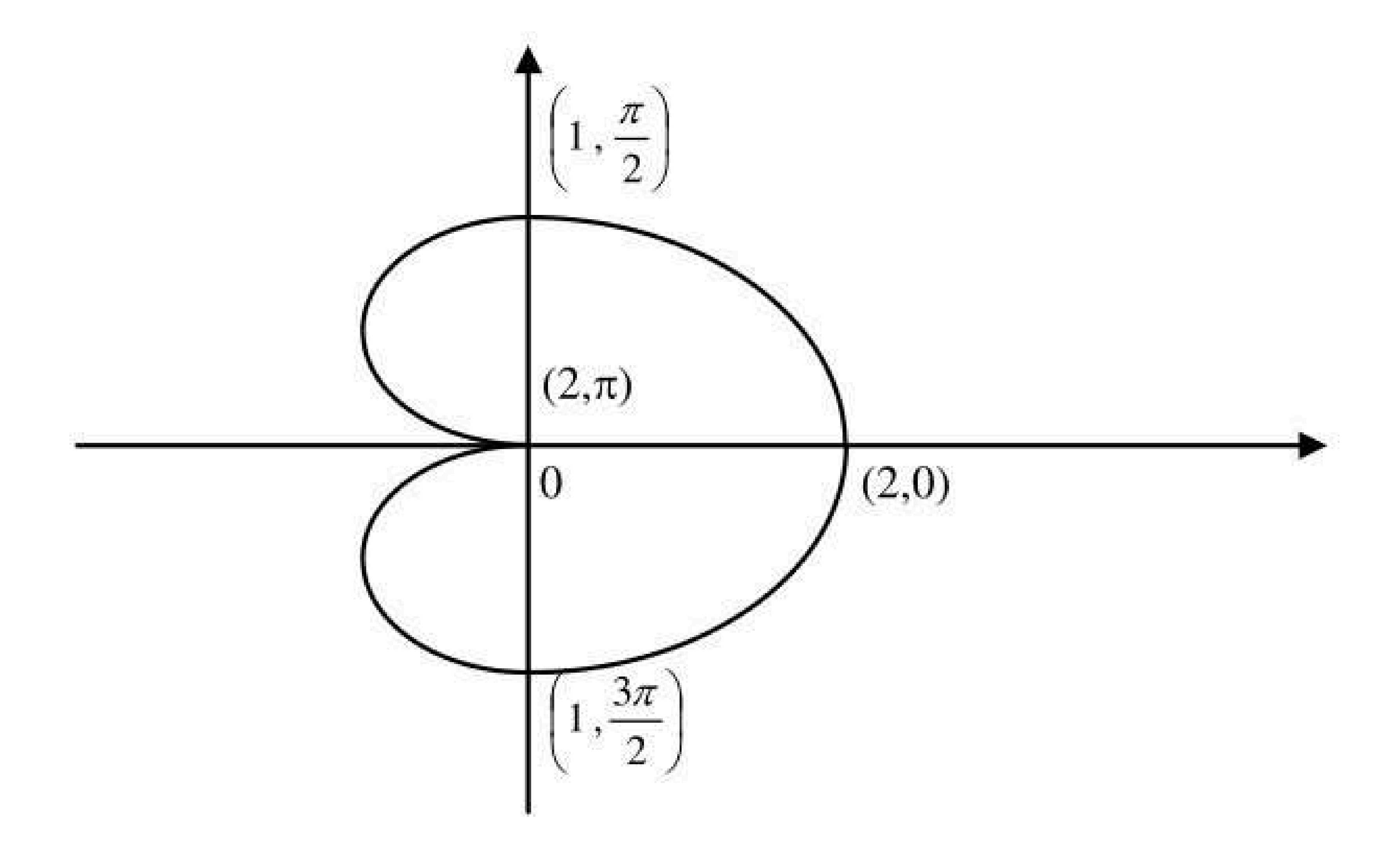
مثـــال (١٨,٦)

أوجد طول قوس منحني القلب (الكاردوئيد)، المعطى بالمعادلة:

$$r = f(\theta) = a(1 + \cos\theta) \;\;,\;\; a > 0$$

الحـــل

من الملاحظ أن المنحني متماثل بالنسبة للمحور x، لاحظ أن: $f(-\theta) = f(\theta)$.



شكل (١٠, ١٨) .

يكفي أن نحسب نصف طول قوس المنحني على الفترة $[0,\pi]$، ثم نضاعف قيمة الناتج. إذن:

$$L = 2\int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = 2a\int_0^\pi \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= 2a\int_0^\pi \sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}\, d\theta = 2a\int_0^\pi \sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta$$

(لاحظ أن: $1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta \Leftarrow 1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$)

$$= 2a\int_0^\pi \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4a \left.\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}}\right|_0^\pi = 8a$$

تمارين (٢,١٨)

أوجد طول قوس كل من المنحنيات المعرفة فيما يلي، والمحصور بين النقطتين الموافقتين للقيمتين المرفقتين:

١) $r = \sin^3 \frac{\theta}{3}$ $(\theta = 3\pi \ , \ \theta = 0)$

٢) $x = 2\cos t - \cos 2t$ $y = 2\sin t - \sin 2t$ $(t = 2\pi \ , \ t = 0)$

٣) $r = \frac{1}{\theta}$ $(\theta = \frac{1}{2} \ , \ \theta = 2)$

٤) $\theta = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ $(r = 3 \ , \ r = 1)$

أوجد أطوال أقواس كل من المنحنيات التالية ضمن الشروط المرافقة:

٥)قوس القطع المكافئ: $r = \sec^2 \frac{\theta}{2}$ المحدود بالمستقيم العمودي على المحور القطبي والمار بالقطب.

٦)قوس الحلزون اللوغاريتمي: $r = e^{2\theta}$ والواقع داخل الدائرة $r = 1$.

الإجابات

١) $\frac{3\pi}{2}$

٢) 16

٣) $\frac{\sqrt{5}}{2} + \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

٤) $\frac{1}{2}(4 + \ln 3)$

٥) $2[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$

٦) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(١٨,٣) الحجوم الدورانية
The Volumes of Revolution

أ) الحجم باستخدام الإحداثيات الوسيطية

مثـــال (١٨,٧)

أوجد الحجم المتولد من دوران الدائرة: $x^2 + y^2 = a^2$
عند دورانها حول المحور y .

الحـــل

تقبل الدائرة التمثيل الوسيطي: $x = a\cos t , y = a\sin t$
(راجع المثالين: (١٨,١) و (١٨,٤))
من دوران ربع القرص الدائري الواقع في الربع الأول من المستوي حول المحور y نحصل على نصف حجم الكرة. بالتالي، فإن حجم الكرة يساوي:

$$V = 2\pi\int_0^a x^2 dy = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t \cdot a\cos t dt$$

بإجراء التغيير: $\sin t = u$ ، نجد: $du = \cos t dt , \cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - u^2$

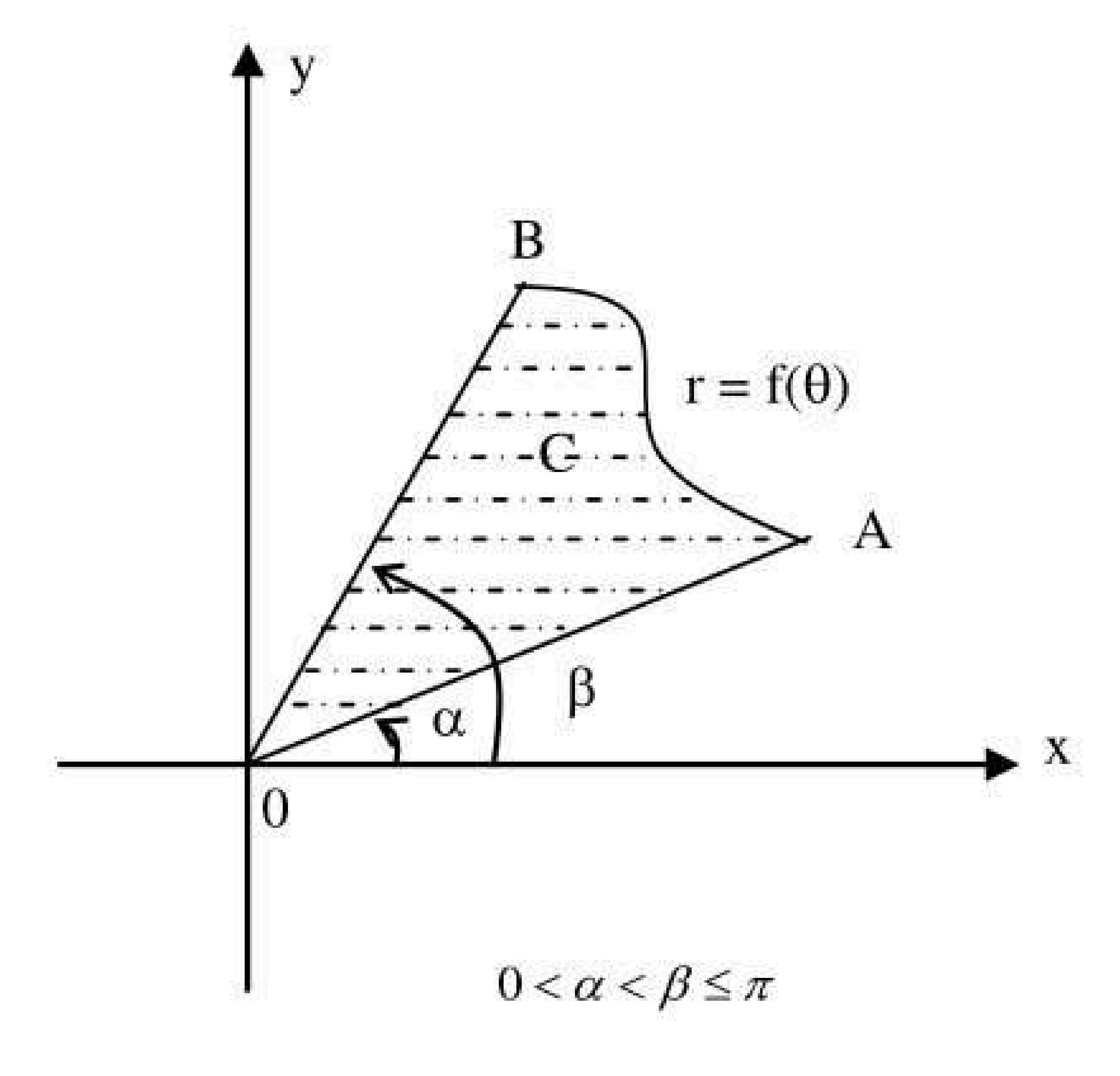
إذن: $$V = 2\pi a^3\int_0^1 (1-u^2)du = 2\pi a^3 (u - \frac{u^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\pi a^3$$

ب) الحجم المتولد من دوران قطاع منحني محدود بمنحن قطبي

ليكن Q قطاعا منحنيا محدودا بالمنحني $C: r = f(\theta)$ والمستقيمين: $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ ، شكل (١٨,١١). حيث:

$0 < \alpha < \beta \le \pi$ ، f دالة متصلة على الفترة $[\alpha, \beta]$ وغير سالبة والمنحني C لا يقطع نفسه (ربما تنطبق نقطة بدايته على نهايته).

الحجم الناتج من دوران Q حول المحور القطبي، يعطى بالصيغة:



شكل (١١ ,١٨).

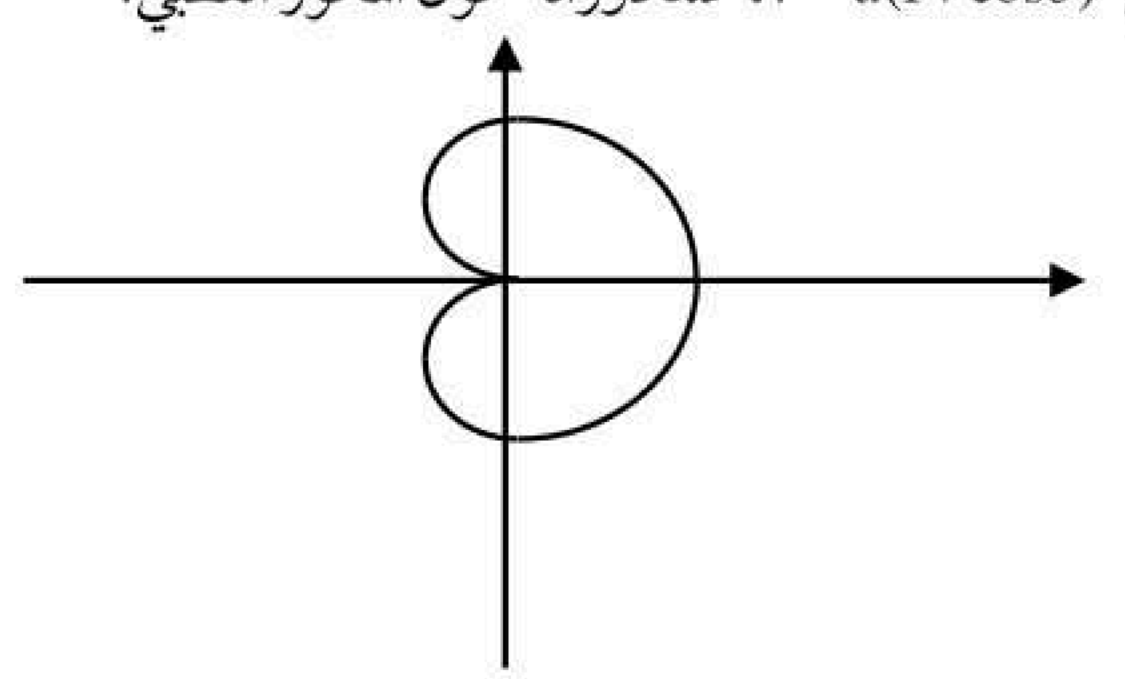
$$V = \frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\theta d\theta$$

مثـــال (١٨,٨)

أوجد الحجم الناتج من دوران المنحني $r = a(1+\cos\theta)$ ، عند دورانه حول المحور القطبي.

الحـــل

نحصل على الحجم المطلوب من دوران نصف الكاردوئيد العلوي حول المحور القطبي. بالتالي، فإن الحجم يساوي:



شكل (١٢ ,١٨) .

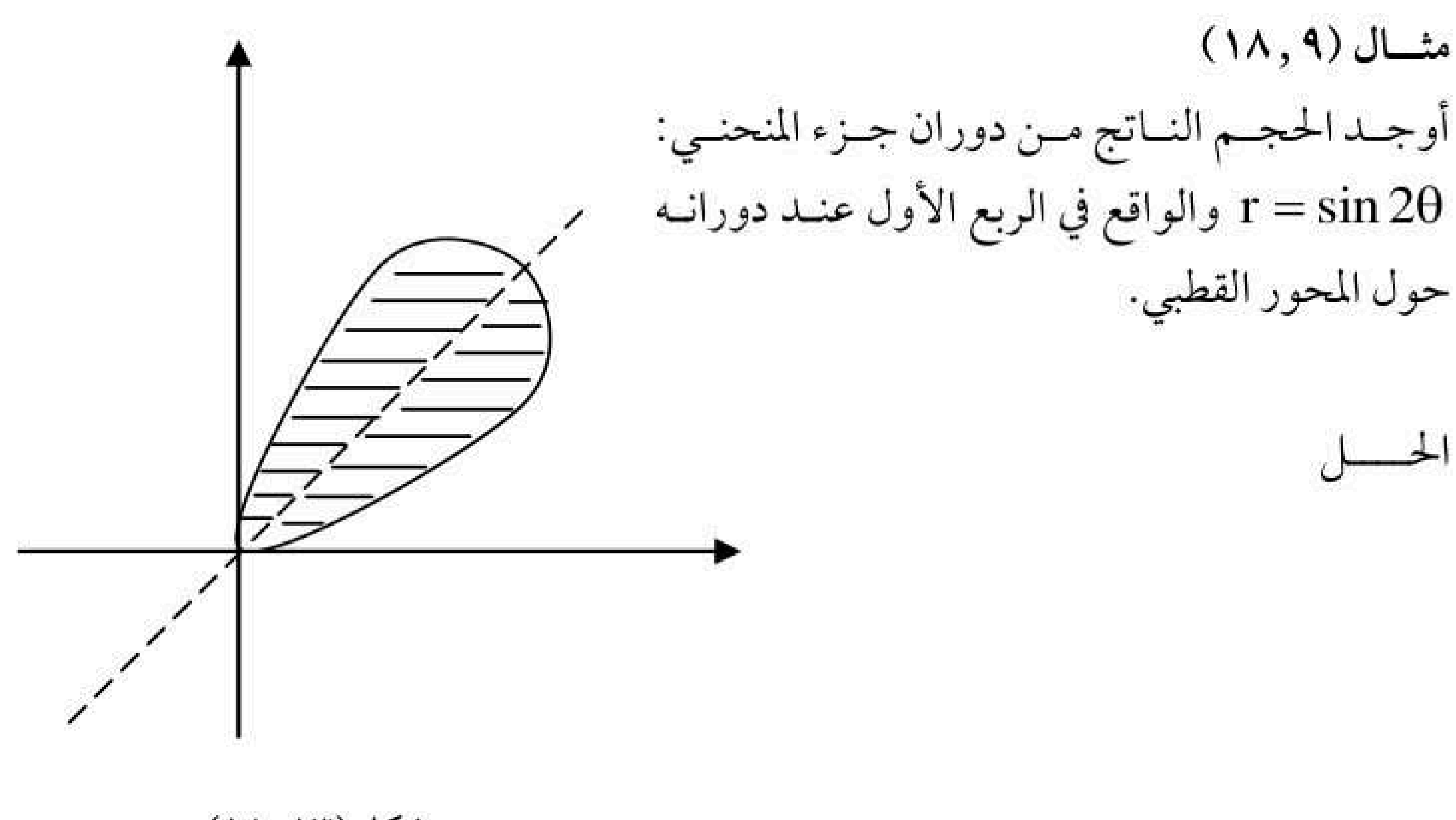
$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{0}^{\pi} a^3(1+\cos\theta)^3 \sin\theta d\theta = \frac{-2\pi a^3}{3}\int_{0}^{\pi}(1+\cos\theta)^3(-\sin\theta d\theta)$$

$$= \frac{-2\pi a^3}{3}\left.\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}\right|_{0}^{\pi} = \frac{8\pi a^3}{3}$$

مثــال (٩ ,١٨)

أوجـد الحجـم النـاتج مـن دوران جـزء المنحنـي: $r = \sin 2\theta$ والواقع في الربع الأول عنـد دورانـه حول المحور القطبي.

الحـــــل



شكل (١٣ ,١٨).

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin\theta d\theta = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin\theta\cos\theta)^3 \sin\theta d\theta$$

(لاحظ أن: $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$)

إذن: $$V = \frac{16\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^2\theta(\cos\theta d\theta)$$

$$= \frac{16\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta(1-\sin^2\theta)(\cos\theta d\theta)$$

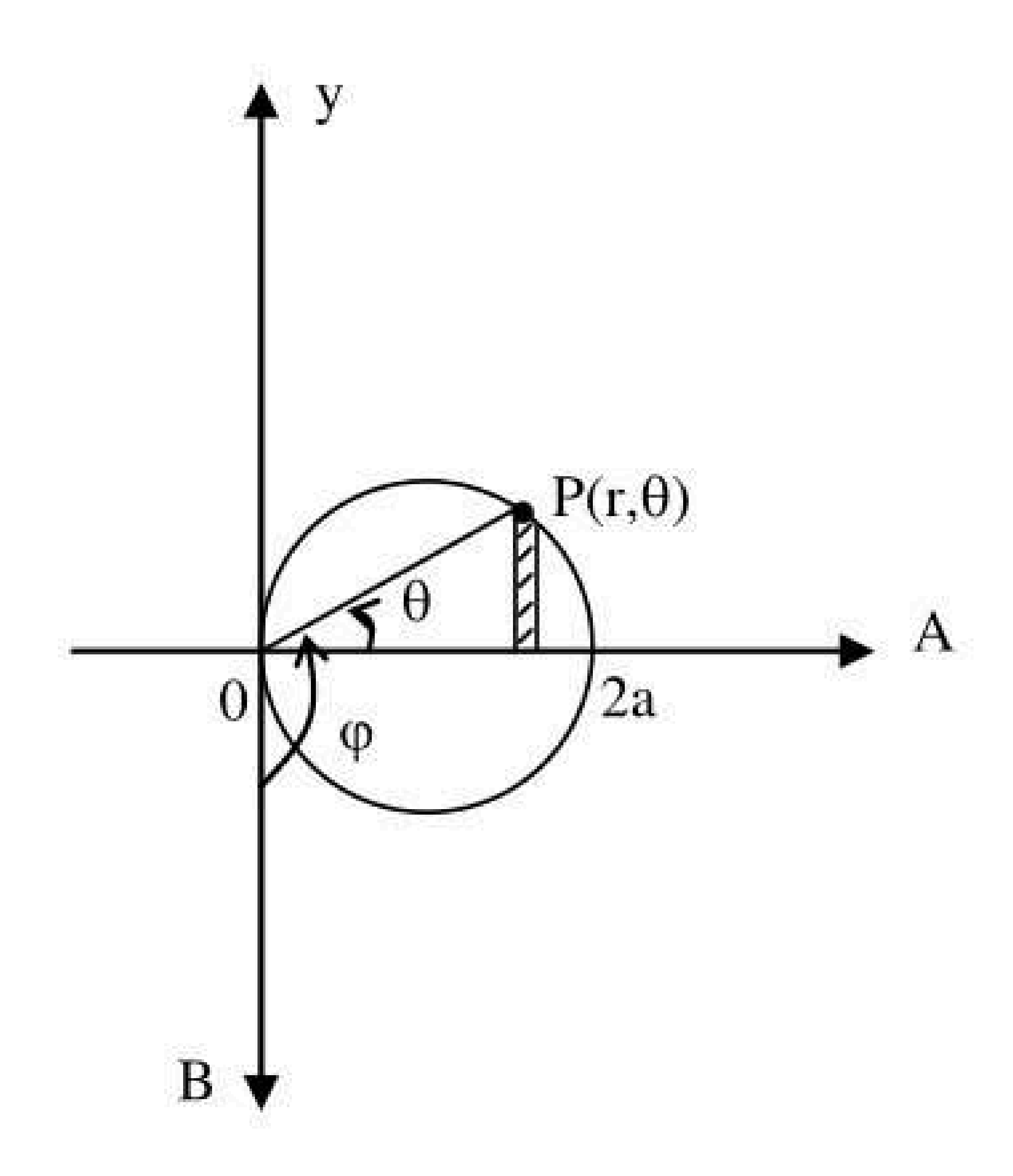
$$= \frac{16\pi}{3}\left(\frac{\sin^5\theta}{5} - \frac{\sin^7\theta}{7}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\pi}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{32\pi}{105}$$

(وضعنا: $\sin\theta = u \Leftarrow du = \cos\theta d\theta$)

(لاحظ أن نقطة بداية القوس يوافقها: $\theta = 0$ ونقطة النهاية يوافقها $\theta = \frac{\pi}{2}$)

مثــال (١٠ ,١٨)

أوجـد الحجم الناتـج عن دوران المنحــني: $r = 2a\cos\theta$ ، عند دورانه حول المحور y.



شكل (١٤, ١٨).

الحـــل

النقطة $P(r,\theta)$ المنسوبة إلى المحور القطبي OA، تصبح إذا نسبت إلى المحور القطبي OB العمودي على OA، بالصورة: $P(r,\varphi)$ حيث: $\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta$، شكل (٦٩ , ١٠). بالتالي فإن المعادلة القطبية للمنحني تتحول إلى الشكل:

$r = 2a\cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) = 2a\sin\varphi$ وهي تمثل دائرة.

(لاحظ أن: $\cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) = \cos\varphi\cos\frac{\pi}{2} + \sin\varphi\sin\frac{\pi}{2}$)

إذن: الحجم الناتج من دوران الدائرة حول OB، يساوي:

$$\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} r^3 \sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi}{3}\cdot 8a^3\int_0^{\pi}\sin^4\varphi d\varphi = \frac{16}{3}\pi a^3\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi$$

$$= \frac{4\pi}{3}a^3\int_0^{\pi}\left(1 - 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3}\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 2\pi^2 a^3$$

تمارين (١٨,٣)

١) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالسكلوئيد: $x = a(t - \sin t)$ ، $y = a(1 - \cos t)$ ، والمحور x، عند دورانها حول:

(أ) المحور x (ب) المحور y (ج) محور التماثل لهذا المنحني

٢) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحني:
$x = a\cos^3 t$ ، $y = b\sin^3 t$ عند دورانها حول المحور y.

٣) أوجد الحجم الناتج من دوران منحني القلب: $r = a(1+\cos\theta)$ ، عند دورانه حول المحور القطبي.

٤) أوجد الحجم الناتج من دوران المنحني: $r = a\cos^2\theta$ ، عند دورانه حول المحور القطبي.

الإجابات

١) حول x : $5\pi^2 a^3$ ، حول y : $6\pi^3 a^3$ ، حول محور التماثل: $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2 - 16)$

٢) $\frac{32\pi}{105}\pi a^3$

٣) $\frac{8}{3}\pi a^3$

٤) $\frac{4}{21}\pi a^3$

(١٨,٤) السطوح الدورانية
The Surfaces of Revolution

أ) مساحة السطح الدوراني باستخدام الإحداثيات الوسيطة

لو أعطي المنحني C في هذه الحالة، بمعادلتيه الوسيطتين وبنفس الشروط التي ذكرناها على المنحني في البند (١٨,٢) (المنحني أملس ولا يقطع نفسه) وفضلا على ذلك، إذا كان $y = g(t) \geq 0$ ، فإن مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران القوس $\overset{\frown}{AB}$ حول المحور x تعطى بالصيغة:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi\, y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

مثــال (١١, ١٨)

أوجد مساحة الكرة الناتجة عن دوران نصف الدائرة:

$y=\sqrt{a^2-x^2}$ حول المحور x.

الحـــــل

تقبل نصف الدائرة التمثيل الوسيطي:

$x = a\cos t$ ، $y = a\sin t$ $(t\in[0,\pi])$

فمساحة الكرة تساوي:

$$S=\int_0^{\pi} 2\pi a\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=2\pi a^2\int_0^{\pi}\sin t\,dt=2\pi a^2[-\cos t]_0^{\pi}=4\pi a^2$$

مثــال (١٢, ١٨)

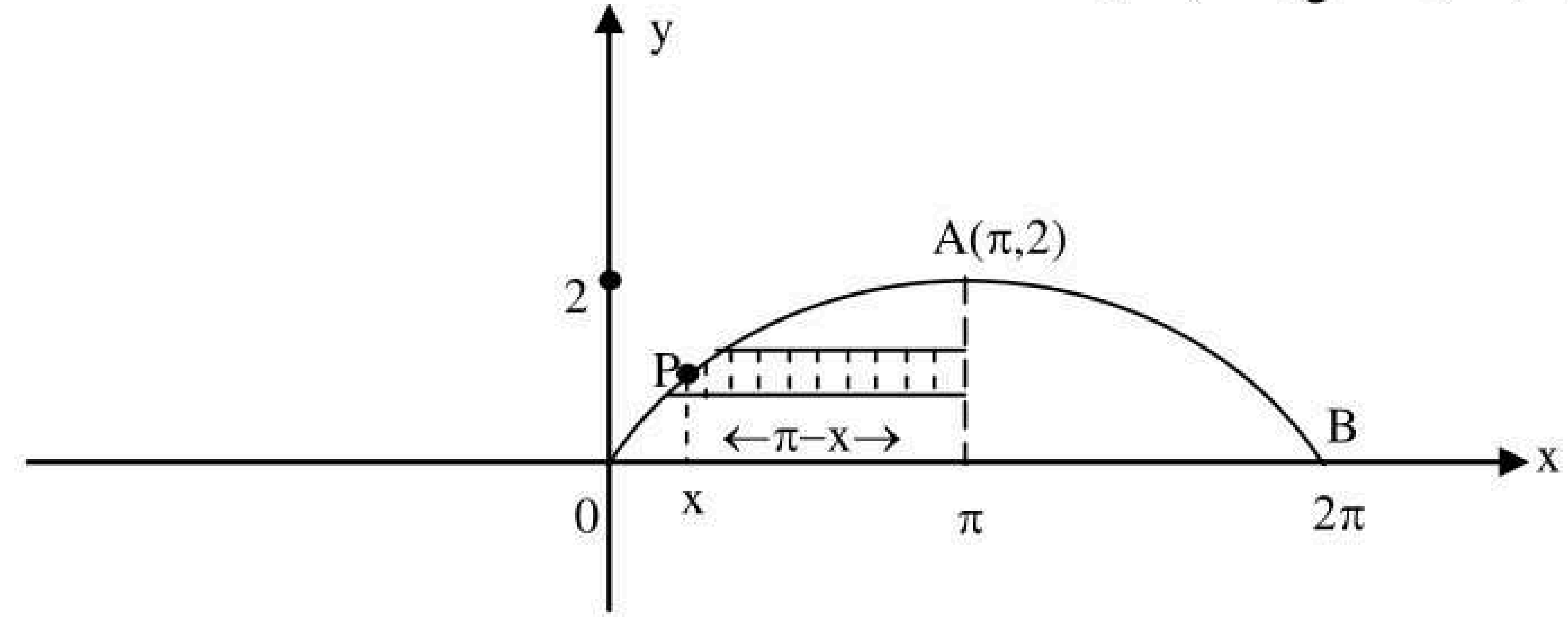
أوجد مساحة السطح الناتج من دوران قوس السيكلوئيد:

$x=t-\sin t$ ، $y=1-\cos t$ ، عند دورانه حول محول تماثله.

الحــل

معادلة محور تماثل الشكل: $x=\pi$

المتوسط الحسابي لنصفي قطري جـذع المخـروط، يســـاوي: $\pi-x$ (بعـد P عـن محـور الدوران). (انظر الشكل (١٥, ١٨)).



شكل (١٥, ١٨).

بملاحظة أن السطح يتولد من دوران القوس $\overset{\frown}{OA}$ حول محور تماثله، فإن:

$$S = 2\pi\int_0^\pi (\pi - x)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt = 2\pi\int_0^\pi (\pi - t + \sin t)2\sin\frac{t}{2}dt$$

(النقطة 0 يوافقها t=0 والنقطة A يوافقعها $t = \pi$)

لاحظ أن: $ds = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = \sqrt{2(1-\cos t)}dt = \sqrt{2\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)}dt = 2\sin\frac{t}{2}dt$

إذن:

$$S = 2\pi\left[2\pi\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}dt - 2\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}dt + 2\int_0^\pi \sin t\sin\frac{t}{2}dt\right]$$

(أ) $\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}dt = -2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = 2$ (ب) $\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}dt$

نضع: $du = \sin\frac{t}{2}dt \Leftarrow u = -2\cos\frac{t}{2}$ ، $t = v \Leftarrow dv = dt$ إذن:

$$\int t\sin\frac{t}{2}dt = uv - \int u dv = -2t\cos\frac{t}{2} + 2\int\cos\frac{t}{2}dt$$
$$= -2t\cos\frac{t}{2} + 4\sin\frac{t}{2} + c$$

ومنه:

$$\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}dt = -2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi + 4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = 4$$

(ج) $$\int_0^\pi \sin t\sin\frac{t}{2}dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{3t}{2}\right)dt = \left(\sin\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\sin\frac{3t}{2}\right)\Big|_0^\pi$$
$$= \frac{4}{2}$$

(لاحظ أن: $\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)$)

إذن:

$$S = 2\pi\left(4\pi - 8 + \frac{8}{3}\right) = 8\pi^2 - \frac{32}{3}\pi$$

ب) مساحة سطح دوراني باستخدام الإحداثيات القطبية

مثـــال (١٨,١٣)

أوجـد مساحـة السطـح الناتـج مـن دوران نصف الـدائرة الموضـحة في الشـكل (١٨,١٦)، عند دورانها حول المحور x.



من الواضح أن المعادلة القطبية لنصف الدائرة في الشكل (١٦ ,١٨)، هي:

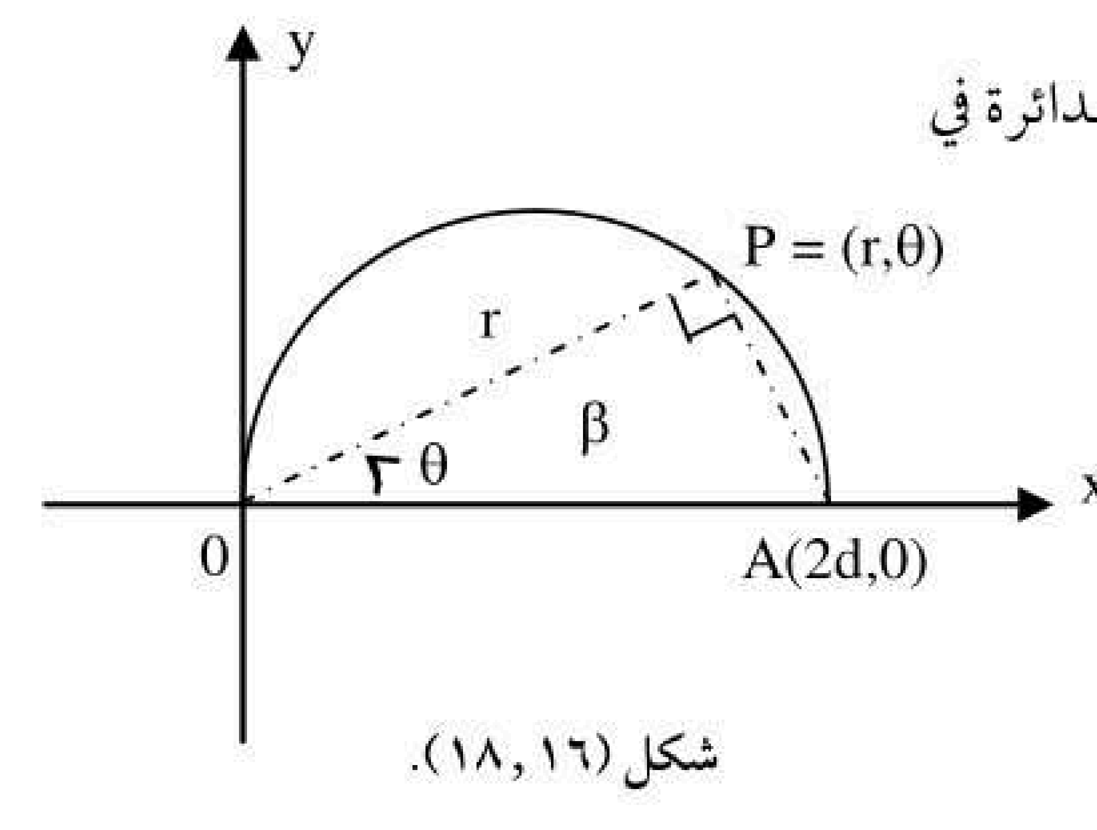
$r = 2d\cos\theta \quad \left(\frac{\pi}{2} \geq \theta \geq 0\right)$،

نعلم أن مساحة السطح الدوراني تعطى بالصيغة:

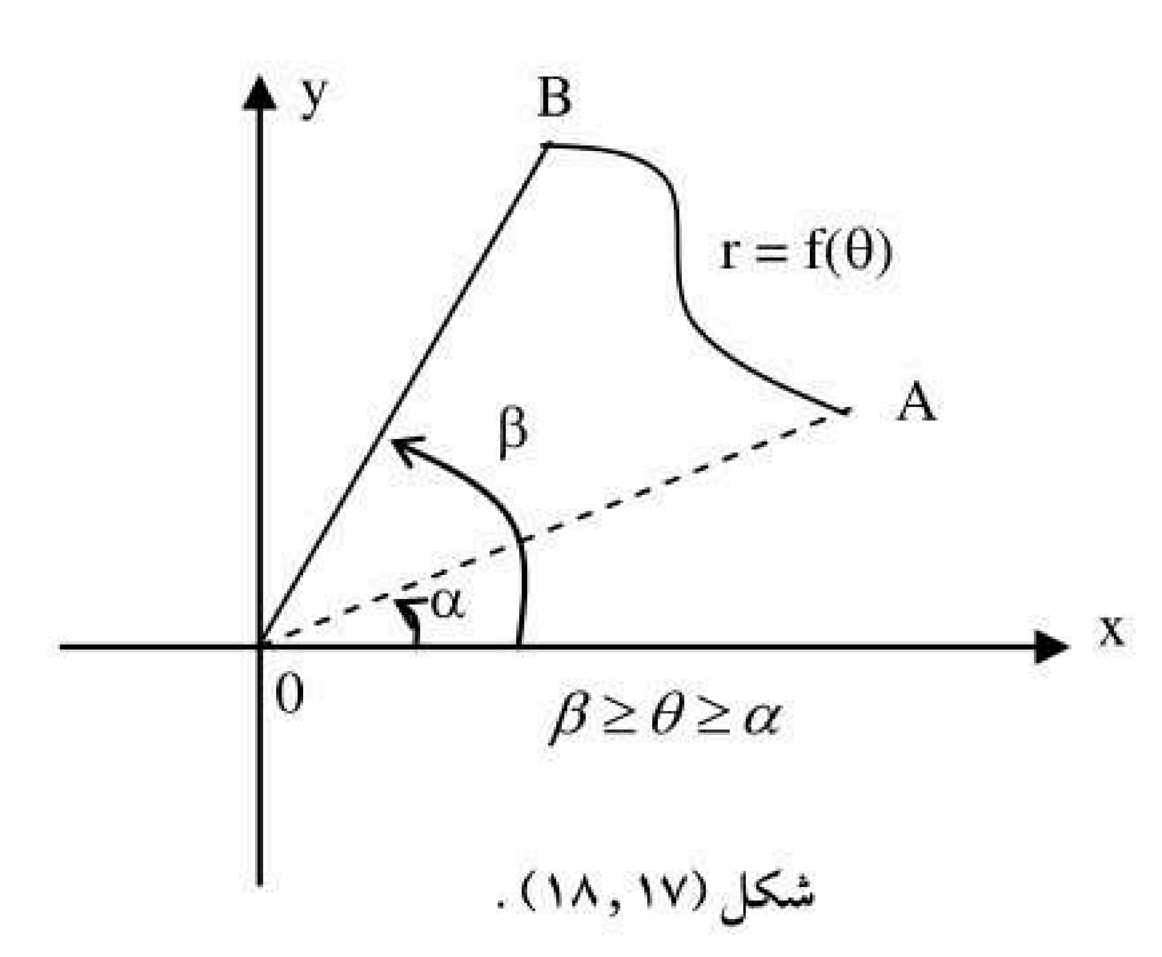
$$S = 2\pi\int_a^b y\,ds \quad \text{(دوران حول المحور x)}$$

بالتعويض عن y بقيمتها بدلالة (r,θ) وكذلك عن ds، نجد:

$$\boxed{S = 2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta}$$



شكل (١٦ ,١٨).



شكل (١٧ ,١٨).

حيث α قيمة θ الموافقة للنقطة A (نقطة البداية للقوس)، β قيمة θ الموافقة للنقطة B (نقطة النهاية للقوس) شكل (١٧ ,١٨) . بالتالي، فإن S في مثالنا تعطى بالصيغة:

$$S = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2d\cos\theta\sin\theta\sqrt{4d^2\cos^2\theta + 4d^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4d^2\sin\theta(\cos\theta d\theta) = 8\pi d^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta(\cos\theta d\theta)$$

$$= 8\pi d^2\cdot\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi d^2$$

(وضعنا: $u = \sin\theta \Leftarrow du = \cos\theta d\theta$)

لاحظ أن $4\pi d^2$ تمثل مساحة الكرة الناتجة من دوران نصف الدائرة حول المحور x.

تمارين (٤ ,١٨)

١) أوجد مساحة السطح الدوراني الناتج من دوران قوس السيكلوئيد:

$$x = a(t - \sin t) \quad , \quad y = a(1 - \cos t)$$

عند دورانه حول:

(أ) المحور x (ب) المحور y (ج) المماس للمنحني الموازي للمحور x.

٢) أوجد مساحة السطح الناتج من دوران المنحني:

$$x = a(2\cos t - \cos 2t)$$
$$y = a(2\sin t - \sin 2t)$$

عند دورانه حول المحور x.

٣) أوجد مساحة السطح الناتج عن دوران المنحني: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ عند دورانه حول المحور القطبي.

٤) أوجد مساحة السطح الناتج من دوران المنحني: $r = 2a(1 + \cos\theta)$ عند دورانه حول المحور القطبي.

الإجابات

١) حول x : $\dfrac{64\pi a^2}{3}$

حول y : $16\pi^2 a^2$

حول المماس: $\dfrac{32}{3}\pi a^2$

٢) $\dfrac{128}{5}\pi a^2$

٣) $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$

٤) $\dfrac{128}{5}\pi a^2$

الملاحق

نماذج اختبارات

النموذج الأول
اختبار نهائي

الجزء الأول: ضع رمز الإجابة الصحيحة في المربع المقابل للسؤال

١)مجموعة حل المتباينة $|2-x| \geq 10$ هي:

(أ) $(12,8]$ (ب) IR (جـ) $(-\infty,-8]\cup[12,\infty)$ (د) $[-\infty,-8]$

٢)النهاية $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+7x-16}{(x^2+1)^2}$ تساوي:

(أ) 1 (ب) 1/3 (جـ) صفر (د) 1/2

٣)النهاية $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ تساوي:

(أ) غير موجودة (ب) 2 (جـ) 4 (د) صفر

٤)النهاية $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{|1-x|}$ تساوي:

(أ) 3 (ب) غير موجودة (جـ) صفر (د) -3

٥)إذا كانت $f(x) = 2x$ و $(fog)(x) = x^2$ فإن $g(4)$ هي:

(أ) 4 (ب) 2 (جـ) 6 (د) 8

٦) الدالة $f(x)=\frac{1}{x^3+1}$ غير متصلة عند x تساوي:

(أ) 1 (ب) -1 (جـ) $\{-1,1\}$ (د) 0

٧) قيم a التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases}x^3, x\le a\\ x^2, x>a\end{cases}$ متصلة على IR هي:

(أ) {0,1}   (ب) {−1,0}   (جـ) {−2,2}   (د) {1,2}

٨)عند x = 0 تكون الدالة f(x) = x|x|

(أ) متصلة وقابلة للاشتقاق   (ب) قابلة للاشتقاق ومتصلة

(جـ) متصلة وغير قابلة للاشتقاق (د) قابلة للاشتقاق وغير متصلة

٩)(-1)′ f للدالة $f(x)=\dfrac{x}{(x+2)^2}$ هي:

(أ) 10   (ب) 15   (جـ) 3   (د) 20

١٠)معادلة المماس للمنحنى: $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ عند النقطة (3− ,2−) هي:

(أ) y + 2x + 7 = 0   (ب) y − 2x + 7 = 0

(جـ) x − 3y − 7 = 0   (د) 2y + x + 7 = 0

١١) النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\tan^2 \pi x}$ تساوي:

(أ) ∞ (ب) π^2 (جـ) 1   (د) $\dfrac{1}{\pi^2}$

١٢)إذا كانت $f(x)=\sqrt{\sin x+x^3+1}$ فإن f ′(0) هي:

(أ) $\dfrac{1}{2}$ (ب) 3   (جـ) 2   (د) 0

١٣)إذا كانت h(x) = f(g(x)) و g(3) = 6 و g′(3) = 4 و f ′(3)=2

و f ′(6)=7 فإن h′(3) هي:

(أ) 8   (ب) 16   (جـ) 28   (د) 24

١٤)إذا كانت x cosy + y cosx = π/2 فإن $\dfrac{dy}{dx}$ عند النقطة $(0,\dfrac{\pi}{2})$

هي: (أ) $\dfrac{\pi}{2}$ (ب) صفر   (جـ) $-\dfrac{\pi}{2}$ (د) 1

١٥) f ″(x) للدالة f(x) = sec 2x هي:

(أ) 4sec 2x (2tan^2 2x +1)   (ب) 2sec 2x (tan^{2}2x + 1)

(جـ) sec^{2}2x (2tan^2 2x − 1)   (د) tan^2 2x + 1

١٦)القيمة الصغرى المطلقة للدالة $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 7$

على الفترة [0,3] هي:

(أ) 4 −   (ب) 0   (جـ) 3−   (د) 3

١٧) الخطوط التقاربية الرأسية للدالة $f(x)=\frac{3x^2}{x^2-x}$ هي:

(أ) $x = 1$ (ب) $x=0$ ، $x=1$ (جـ) $x = 0$ (د) $x = -1$

١٨) عند $x=\frac{\pi}{12}$ يكون للدالة $f(x) = x + \cos 2x$ قيمة:

(أ) صغرى محلية (ب) عظمى محلية

(جـ) صغرى مطلقة (د) عظمى مطلقة

١٩) الدالة $f(x) = \tan^{-1} x$:

(أ) تزايدية على $[0,\infty)$ وتناقصية على $(0, \infty)$ (ب) تناقصية $[-1, \infty)$

(جـ) تزايدية على IR (د) تناقصية على IR

٢٠)مركز القطع المخروطي $4x^2 - y^2 + 2y = 5$ هو :

(أ) $(1,1)$ (ب) $(4,1)$ (جـ) $(-1,2)$ (د) $(0,1)$

الجـزء الثـــاني: أجب عن الأسئلة الآتية:

١)إذا كانت $f(x) = x^4 - 8x^2$ أوجد:

(أ) النقاط الحرجة (ب) فترات التزايد وفترات التناقص

(جـ) نقاط الانقلاب (د) فترات التقعر إلى الأعلى والتقعر إلى الأسفل ثم ارسم المنحنى.

٢)حل المتباينة $\left|\frac{x}{2+x}\right| < 1$

٣) يتمدد متوازي مستطيلات معدني بالحرارة، فإذا كانت قاعدته مربعة الشكل ويزيد طول ضلعها بمعدل 0.1سم/ ث، ويزيد ارتفاعه بمعدل 0.15سم/ ث، فأوجد معدل تغير حجمه في اللحظة التي يكون فيها طول ضلع قاعدته مساويا 12سم وارتفاعه مساويا 25سم.

٤) أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما $(2,1)$ و $(2, -3)$ وطول محوره الأكبر 6.

النموذج الثاني
اختبار نهائي

الجـــزء الأول: اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة من ١ إلى ١٣ وضع الرمز الموافق في الجدول التالي:

	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣
الرمز													

السؤال ١: مجموعة حل المتباينة $\frac{x^2-3x+2}{x} \geq 0$ هي:

(أ) $(0,1] \cup [2,\infty)$ (ب) $(-\infty,0) \cup (1,2]$

(جـ) $(-\infty,0) \cup [1,2]$ (د) $(-\infty,0) \cup [2,\infty)$

السؤال ٢: مجموعة حل المتباينة $|x-1| \geq x$ هي:

(ا) $(0,1] \cup [2,\infty)$ (ب) $(-1,\frac{1}{2}]$

(جـ) $[-1, 1]$ (د) لا شيء مما ذكر

السؤال ٣: مجال (نطاق) الدالة $f(x) = 1 - x + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

(أ) $(-\infty,1)$ (ب) Φ

(جـ) $(1,\infty)$ (د) $\{1\}$

السؤال ٤ : إذا كان A هو مجال (نطاق) الدالة f وكانت g دالة معرفة كما يلي: $g(x) = f(x) . f(x)$،فإذا رمزنا لمجال (نطاق) g بالحرف B فإن:

(أ) $B = A$ (ب) $B \not\supset A$

(جـ) $B \not\subset A$ (د) $B = A \times A$

السؤال٥: كي نثبت أن $\lim_{x\to1} (3x+1) = 4$ عن طريق التعــريف (باستخـــــدام ε و δ) فإنه لكـــــل $\varepsilon > 0$ نأخذ ε بحيث يكون:

(أ) $0 < \delta < 1$ (ب) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

(جـ) $d = \min\{1,2\varepsilon\}$ (د) $\delta = 3\varepsilon$

السؤال ٦: $\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\tan 3x}$ ، هي:

(أ) 1 (ب) 3/2 (جـ) 2/3 (د) غير معرفة

السؤال ٧: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$ هي:

(أ) $\sqrt{2}$ (ب) صفر (جـ) $\infty-\infty$ (د) ∞

السؤال ٨: مجموعة حل المتباينة $0 < |x-7| \le 4$ ، هي:

(أ) $(-3,11)$ (ب) $[-3,11]$ (جـ) $[3,11]$ (د) لا شيء مما ذكر

السؤال ٩: من المعلومات الآتية:

x	f(x)	g(x)
0	2	3
1	6	0
2	4	1
3	8	7

فإن g(f(0)) هي:

(أ) 3 (ب) 7 (جـ) 8 (د) 1

السؤال ١٠: إذا كانت الدالة g معطاة بالصيغة: $g(x)=\begin{cases}2x, x<3\\ 6, x\ge 3\end{cases}$ فإن مدى g هو:

(أ) R (ب) $(-\infty,6]$ (جـ) $(-\infty,6)$ (د) $(-\infty,-6]\cup\{6\}$

السؤال ١١: إذا كانت $f(x)=\begin{cases}K-x, x<16\\ \sqrt{x}, x\ge 16\end{cases}$ ، فإن قيمة K التي تجعل $\lim_{x\to16}f(x)$ موجودة هي:

(أ) 4 (ب) -4 (جـ) 16 (د) 20

السؤال ١٢: إذا كانت $f(x) = -3 + x$ وكانت $g(x) = 7 + x$ فإن منحنى الدالة g يمكن الحصول عليه بإزاحة منحنى الدالة f

(أ) عشر وحدات إلى اليمين (ب) ثلاث وحدات إلى أعلى وست وحدات إلى اليسار

(جـ) عشر وحدات إلى أسفل (د) عشر وحدات إلى أعلى

السؤال ١٣: إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ فإن:

(أ) النقطة التي فيها $x = 7, y = 3$ موجودة في بيان (رسم) الدالة العكسية

(ب) النقطة التي فيها $x = 3, y = 7$ موجودة في بيان الدالة العكسية

(جـ) الدالة العكسية غير معرفة

(د) الدالة العكسية: $f^{-1}(x)=\frac{1}{2x+1}$

الجزء الثاني: أجب عن السؤالين الآتيين في الفراغات المعطاة

السؤال ١٤: برهن أن $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

السؤال ١٥: أثبت أن: $f(x) = x^3 - 5$ أحادية (متباينة) وأوجد الدالة العكسية.

النموذج الثالث

اختبار نهائي

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة من ١ إلى ١٥ وضع الرمز الموافق في الجدول التالي:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
رمز الإجابة								

رقم السؤال	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥
رمز الإجابة							

١) نقاط الانقلاب للدالة $f(x) = x^4 - 2x^3$ هي:

(أ) $(0,0), (1,-1)$ (ب) $(0,1)$ (جـ) $(1,1)$ (د) $(0,0), (-1,1)$

٢) الدالة f : $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$ متزايدة على:

(أ) $[-2,0]\cup[1,\infty)$ (ب) $[0,1]$ (جـ) $(-\infty, -2]$ (د) R

٣) ميل المماس للمنحنى: $\sin(xy) + y = \tan x - 1$ عند النقطة $(0, -1)$ هو:

(أ) π (ب) 2 (جـ) -1 (د) 1

٤) المستقيمات المقاربة للمنحني: $y = \tan^{-1} x$ هي

(أ) $x = -\frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}$ (ب) $x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}$

(جـ) $x = \pm\frac{\pi}{2}$ (د) $y = \pm\frac{\pi}{2}$

٥) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ (k^2+1)x - k & x < 1 \end{cases}$ ، فإن f متصلة وغير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$ عندما:

(أ) k=1 ، k=0 (ب) k=0 (جـ) k=1 (د) لا شيء مما ذكر

٦) النقاط الحرجة للدالة f، حيث: $f(x) = x(x+4)^{\frac{1}{3}}$ ، هي:

(أ) -4 (ب) -3 (جـ) 0 (د) -3 ، -4

٧) للدالة f، حيث: $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ قيمة صغرى محلية عندما:

(أ) x=1 (ب) x=0 (جـ) x=1 ، x=0 (د) لا شيء مما ذكر

٨) إذا كانت $f(x) = \frac{8}{x}$ فإن المشتقة الخامسة $f^{(5)}(2)$ تساوي:

(أ) 8 (ب) -15 (جـ) 0 (د) 2

٩) المقدار $\sin^{-1}(\sin\frac{2\pi}{3})$ يساوي:

(أ) $\pi/3$ (ب) $2\pi/3$ (جـ) 0 (د) لا شيء مما ذكر

١٠) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan 2x}{3x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ ، فإن قيمة k التي تجعل f متصلة عند x=0 هي:

(أ) $3/2$ (ب) $2/3$ (جـ) 0 (د) 1

١١) القيمة العظمى المطلقة للدالة f، حيث: $f(x) = \sin x + \cos x$ على $[0,2\pi]$ هي:

(أ) 0 (ب) 2 (جـ) $\sqrt{2}$ (د) 1

١٢) الدالة f، حيث: $f(x) = x^4 + 2x^3 + 5$ مقعرة لأعلى على:

(أ) $(-1,\infty)$ (ب) R (جـ) $(-\infty, -1)\cup(0, \infty)$ (د) $(1,0)$

١٣) إذا كانت: $g(x) = \sqrt{x+3}, f(x) = \tan x$ ، فإن المشتقة $(g \circ f)'(\frac{\pi}{4})$ تساوي:

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\sqrt{\pi}$ (جـ) $1/2$ (د) 1

١٤) المستقيمات المقاربة للدالة f، حيث: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، هي:

(أ) $x = 0$ (ب) $y = 0$ (جـ) $y = 1$ (د) $y = \pm 1$

١٥) المقدار $\tan(\cos^{-1}\frac{3}{5})$ يساوي:

(أ) $4/3$ (ب) $-4/3$ (جـ) $4/5$ (د) 0

١٦) ضع علامة √ على التقرير الصائب وعلامة × على التقرير الخاطىء:

التقرير	
إذا كانت $f''(c)=0$ ، فإن $(c,f(c))$ نقطة انقلاب للدالة f	
إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند c ، فإن f متصلة عند c	
إذا كانت c نقطة حرجة للدالة f ، فإن $f'(c)=0$	
إذا كانت f متصلة على (a,b) ، فإن للدالة f قيمة عظمى على (a,b)	
إذا كانت f, g متصلتين عند c ، فإن f . g متصلة عند c	
إذا كانت f(c) قيمة قصوى محلية ، فإن c نقطة حرجة للدالة f	

١٧) احسب $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي:

(أ) $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$ (ب) $y=\cos^2(x+\tan^{-1}x)$

النموذج الرابع

اختبار نهائي

الجزء الأول

ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من ١ إلى ٢٠ في الجدول الآتي:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة										

رقم السؤال	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
رمز الإجابة										

س١) مجموعة حل المتباينة $|5x-1|>9$ هي:

(أ) $(-8/5, 2)$ (ب) $R-[-8/5, 2]$ (جـ) R (د) ϕ

س٢) مجال الدالة $f(x)=\sqrt{1+|x|}$ هو:

(أ) R (ب) $(-\infty,1)$ (جـ) $[-1,\infty)$ (د) غير موجود

س٣) الدالة العكسية للدالة $\frac{1}{x+1}$ هي:

(أ) $(1-x)/x$ (ب) $-1/(1+x)$ (جـ) $x+1$ (د) لا شيء مما ذكر

س٤) إذا كان $\lim_{x\to0} h(x)=\frac{3}{4}, \lim_{x\to0} g(x)=\frac{3}{2}, \lim_{x\to0} f(x)=\frac{2}{3}$، فإن $\lim_{x\to0}(\frac{f+g}{h})(x)$ تساوي:

(أ) $3/4$ (ب) $4/3$ (جـ) $26/9$ (د) لا شيء مما ذكر

س٥) حل المتباينة $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\geq 1$ ، هو:

(أ) $[0,\infty)$ (ب) IR (جـ) ϕ (د) $(-\infty,0)$

س٦) المشتقة الثانية للدالة f، حيث: $y=f(x)=\sin 2x-\cos 2x$ وهي:

(أ) $-y$ (ب) y (جـ) $-4y$ (د) $4y$

س٧) مركز القطع الزائد الذي مستقيماه المقاربان: $\begin{matrix} 2y=3x-5 \\ 2y=-3x+1 \end{matrix}$ ، هو:

(أ) $(3,5)$ (ب) $(1,-1)$ (جـ) $(-3,5)$ (د) $(2,3)$

س٨) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)$ ، هي:

(أ) ∞ (ب) $-\infty$ (جـ) 0 (د) لا شيء مما ذكر

س٩) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ ، هي:

(أ) 0 (ب) 8 (جـ) -1 (د) ∞

س١٠) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\sin x+\tan x}{x}}$ ، هي:

(أ) 0 (ب) ∞ (جـ) $\sqrt{2}$ (د) غير موجودة

س١١) المشتقة العشرون للدالة f، حيث: $f(x)=\frac{x^{14}}{20}+\frac{x^3}{20}+x$ ، هي:

(أ) 2117 (ب) 0 (جـ) $\frac{14!}{20}$ (د) 3/20

س١٢) ميل المماس للمنحني: $\tan(xy)+y=1$ ، عند النقطة (0,1) هو:

(أ) 1 (ب) 3 (جـ) -1 (د) 2

س١٣) الدالة f، حيث: $f(x)=\frac{1}{|x-2|}$ تحقق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة:

(أ) R (ب) [0,2] (جـ) [0,1] (د) لا شيء مما ذكر

س١٤) إذا كان: $f(x)=\tan^{-1}\sqrt{x}$ ، فإن المشتقة $f'(1)$ تساوي:

(أ) 1/4 (ب) $-1/4$ (جـ) $-1/2$ (د) 1/2

س١٥) المستقيم المقارب الأفقي للمنحني: $f(x)=\frac{1+\sin x}{x}$ هو:

(أ) $y=1$ (ب) $y=0$ (جـ) $x=-1$ (د) $x=0$

س١٦) قيمة k التي تجعل الدالة التالية: $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-8}{x^2-4}, & x\neq 2\\ k, & x=2\end{cases}$ متصلة عند x=2 هي:

(أ) غير موجودة (ب) 12 (جـ) 3 (د) -3

س١٧) للدالة $f(x)=3x^{\frac{1}{3}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$ نقاط حرجة عندما تكون:

(أ) $x=-1, x=0$ (ب) $x=0$ (جـ) $x=1$ (د) $x=3, x=4$

س١٨) القيمة العظمى المطلقة للدالة: $f(x)=\sin x-\cos x$ على الفترة $[0,\pi]$ تساوي:

(أ) -2 (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) 2 (د) $-\sqrt{2}$

س١٩) أكبر مساحة لمستطيل محيطه 36 سم، هي:

(أ) 81 (ب) 89 (جـ) 102 (د) لا شيء مما ذكر

س٢٠) إذا كان: $g(1)=7, f(5)=8, f'(7)=2, g'(1)=3$ ، فإن $(fog)'(1)$ تساوي:

(أ) 6 (ب) 12 (جـ) 14 (د) 16

الجزء الثاني

اكتب الإجابة المناسبة بجانب كل فقرة في السؤالين التاليين (بدون شرح):

السؤال الأول: إذا كان $f(x) = 2x^3 - x^4$ ، فإن:

فترات التزايد هي:	
فترات التقعر نحو الأعلى هي:	
نقاط الانقلاب هي:	
قيم x التي يكون للدالة عندها قيم عظمى محلية هي:	

السؤال الثاني: إذا كانت معادلة القطع المكافىء هي:

$y^2 + 2y = 4x - 3$ ، فإن:

بؤرته هي:	
معادلة دليله هي:	
رأسه هو:	

منحنيه البياني مبينًا عليه المعلومات السابقة هو:

أجب عن السؤالين التاليين إجابة كاملة:

السؤال الثالث: أثبت باستخدام التعريف أن، مشتقة sin x هي cos x.

السؤال الرابع: نقطة تتحرك على القطع الناقص: $x^2 + 2y^2 = 3$ ، فإذا كان $\frac{dx}{dt} = 2$ ، فأوجد $\frac{dy}{dt}$ عند النقطة (1,1).

النموذج الخامس
اختبار نهائي

الجزء الأول: ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من ١ إلى ٢٠ في الجدول التالي:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة										

رقم السؤال	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
رمز الإجابة										

س١) مجموعة حل المتباينة: $\frac{1-x}{x} > 0$ ، هي:

(أ) $IR-\{0\}$ (ب) $(0,1)$ (جـ) IR (د) $(-\infty,1)$

س٢) مجموعة حل المتباينة $|3x+7| > 5$ ، هي:

(أ) $(-2/3, 8)$ (ب) $IR -[-4, -2/3]$ (جـ) IR (د) $(-\infty, -4)$

س٣) مجال (نطاق) الدالة: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ ، هو:

(أ) $IR - [2,3]$ (ب) $IR - \{2,3\}$ (جـ) IR (د) $(3, \infty)$

س٤) إذا كانت $g(x) = \sqrt{x+1}, f(x) = \frac{1}{x}$ فإن مجال (نطاق) $\frac{f}{g}$ ، هو:

(أ) $IR -\{0\}$ (ب) $IR -\{0,-1\}$ (جـ) $(-1, \infty) -\{0\}$ (د) IR

س٥) إذا كان: $g(x) = 8 + \frac{1}{x^3}$ ، فإن $g^{-1}(x)$ تساوي:

(أ) $x^3/(8x^3+1)$ (ب) $1/8+x^3$ (جـ) غير موجودة (د) $(x-8)^{-1/3}$

س٦) $\lim_{x\to4} \frac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}$ ، هي:

(أ) 1 (ب) ∞ (جـ) $5/2$ (د) 0

س٧) $\lim_{x\to0} \sqrt{\frac{\tan 2x - x}{3x}}$ ، هي:

(أ) $1/\sqrt{3}$ (ب) غير موجودة (جـ) 0 (د) $1/3$

س٨) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2-4}}{2x-3}$ ، هي:

(أ) غير موجودة (ب) 0 (جـ) $3/2$ (د) $-3/2$

س٩) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ ، هي:

(أ) 0 (ب) 2 (جـ) $1/4$ (د) 1

س١٠) القيمة الصغرى للدالة: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$، على الفترة $[0,2]$ هي:

(أ) 0 (ب) -3 (جـ) 5 (د) 1

س١١) معادلة المماس للمنحنى: $y = \tan^{-1}x^2$ ، عند نقطة الأصل هي:

(أ) $y = 0$ (ب) $x = 0$ (جـ) $y = x$ (د) $y = -x$

س١٢) إن فترة التزايد للدالة: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ هي:

(أ) IR (ب) $[-1,1]$ (جـ) $[0,\infty)$ (د) $[-1,2]$

س١٣) فترة التقعر نحو الأسفل للدالة: $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ ، هي:

(أ) IR (ب) $(3/2, 8)$ (جـ) $(-\infty, 3/2)$ (د) $(0,1)$

س١٤) إذا كان: $z = x + xy$، وكان $\frac{dx}{dt} = 2$ ، $\frac{dy}{dt} = 3$. فعندما $y = x = 1$ ، فإن $\frac{dz}{dt}$ تساوي:

(أ) 7 (ب) 8 (جـ) 4 (د) 5

س١٥) قيمة k التي تجعل الدالة: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 2x}{x\tan 3x} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$ ، متصلة عند $x = 0$ هي:

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) $4/3$ (د) $2/3$

س١٦) إذا كان $x^2 + 2y^2 = 3$ ، فإن قيمة y'' عند النقطة $(1,1)$ تساوي:

(أ) $-3/4$ (ب) $-1/2$ (جـ) 1 (د) 3

س١٧) قيمتا h, k التي تجعل الدالة: $f(x) = \begin{cases} k\sin x, & x \geq 0 \\ x + h, & x < 0 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ هما:

(أ) $h=0, k=0$ (ب) $h=0, k=1$ (جـ) $h=1, k=1$ (د) $k=1$ وجميع قيم h

س١٨) معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(0,1)$, $(4,1)$ وأحد رأسيه $(1,1)$ هي:

(أ) $(y-1)^2 - 3(x-2)^2 = 3$ (ب) $(y-1)^2 + 3(x-2)^2 = 3$

(جـ) $(y-1)^2 = 3(x-2)$ (د) $3(x-2)^2 - (y-1)^2 = 3$

س١٩) النقاط الحرجة للدالة $f(x)=\cos x-\sin x$ على الفترة $[0, \pi]$ توافق قيم x:

(أ) 0 (ب) $\pi/2$ (جـ) $3\pi/4$ (د) π

س٢٠) قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة: $f(x)=x+(1/x)$ على الفترة $[1/2, 2]$ ، هي:

(أ) $3/2$ (ب) 0 (جـ) 1 (د) -1

الجزء الثاني: أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول: جد y' فيما يلي:

(أ) $y = \sin^2 \sqrt{x^2 + 1}$ (ب) $y = x \cot^{-1} x^2$

السؤال الثاني: جد مركز القطع التالي وبؤرتيه ورأسيه، ثم ارسمه:

$$9x^2 + 25y^2 - 18x + 50y = 191$$

السؤال الثالث: إذا كان $x \geq 0$، $y \geq 0$ وكان $x + y = 3$ ، فأوجد القيمة العظمى للمتغير z حيث: $z = x^2y$.

السؤال الرابع: عين قيم كل من a, b, c حتى يكون للدالة:

$$f(x) = ax^3 + x^2 + bx + c$$

قيمة صغرى محلية عند النقطة (1,0) ونقطة انقلاب عند $x = 2$

النموذج السادس
اختبار نهائي

الجزء الأول

ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من ١ إلى ٢٠ في الجدول التالي:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة										

رقم السؤال	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
رمز الإجابة										

س١) مجموعة حل المتباينة: $2 \leq |x - 4|$ ، هي:

(أ) $(6,\infty)$ (ب) $[2,6]$ (جـ) $\varnothing$ (د) $(-\infty,4)$

س٢) مجموعة حل المتباينة: $(x-1)^3(x^2+2) > 0$ ، هي:

(أ) $(-2,1)$ (ب) $(-\infty,2)\cup(1,\infty)$ (جـ) $(1,\infty)$ (د) R

س٣) مجموع حل المتباينة: $\frac{5}{(x-6)} < \frac{3}{(x-2)}$ ، هي:

(أ) $(-\infty,2)$ (ب) $R-\{2,6\}$ (جـ) $(-4,2)\cup(6,\infty)$ (د) $(6,\infty)$

س٤) مجال الدالة: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$ ، هو:

(أ) $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$ (ب) $[4,\infty)$ (جـ) R (د) $R-\{0,4\}$

س٥) الدالة العكسية للدالة: $f(x) = \frac{x+1}{1+2x}$ ، هي:

(أ) $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1+2x}$ (ب) $f^{-1}(x) = \frac{2(x-1)}{x+1}$

(جـ) $f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x+1}$ (د) $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{1-2x}$

س٦) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-5x+6}{\sqrt{x-2}}$ ، هي:

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) -1 (د) ∞

س٧) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cot 3x}{\sin 4x}$ هي:

(أ) $3/4$ (ب) 1 (جـ) 0 (د) $1/12$

س٨) $\lim_{x\to\pi/2} \cos x \cdot \csc(\cos x)$ هي:

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) π/2 (د) ∞

س٩) إذا كان $f(x) \le g(x) \le h(x)$ في جوار x=1 و $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} h(x) = 22$ ، فإن $\lim_{x\to1}(18 + g(x))$ ، هي:

(أ) 40 (ب) 22 (جـ) 19 (د) 18

س١٠) قيمة k التي تجعل الدالة: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin kx}{x} & , x \ne 0 \\ 3k - 2 & , x = 0 \end{cases}$ ، متصلة هي:

(أ) 2/3 (ب) −2/3 (جـ) 1 (د) 0

س١١) مجال الدالة f، حيث: $f(x) = \dfrac{\sin^{-1} x}{\cos^{-1} x}$ هو:

(أ) R (ب) [−1,1] (جـ) [0, π/2] (د) [−1,1)

س١٢) مجموعة قيم x الموافقة للنقاط الحرجة للدالة f: $f(x)=x(x-4)^{1/3}$ هي:

(أ) {4} (ب) R − {4} (جـ) {3,4} (د) {3}

س١٣) ميل المماس للمنحنى: $yx^2 + y^2 = x + 1$ عند النقطة (1,1) هو:

(أ) −1/3 (ب) −1/2 (جـ) 0 (د) 1

س١٤) القيمة العظمى المطلقة للدالة f: $f(x) = \sin x + \cos x$ على الفترة [0, π/2] هي:

(أ) 2 (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) 0 (د) 1

س١٥) الخطوط المقاربة الأفقية والرأسية للدالة f، حيث: $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 - 4}$ هي:

(أ) x = ±2, y = 3 (ب) x = ±2 (جـ) x = 2, y = 0 (د) x = 3, y = ±2

س١٦) نقاط الانقلاب للدالة f، حيث: $f(x) = 3x^5 - 5x^4$ ، هي:

(أ) (0,0) (ب) (3,5) (جـ) (1, −2) (د) (0,0), (1, −2)

س١٧) إذا كان معدل تزايد طول ارتفاع مثلث هو 3 ، ومعدل تزايد طول قاعدته هو 2 ، فإن معدل تزايد مساحته في اللحظة التي يكون فيها طول ارتفاعه 10 وطول قاعدته 12 ، هو:

(أ) 3 (ب) 8 (جـ) 20 (د) 28

س١٨) المستقيمات المقاربة للقطع الزائد: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$ ، هي:

(أ) y = 4x + 1, y = −4x + 1 (ب) y = 1 + x, y = 1 − x

(جـ) y = 4, x = 2 (د) y = 1 − 2x, y = 1 + 2x

س١٩) دليل القطع المكافىء: $y^2 - 2y + 4x = 3$ ، هو:

(أ) $x = 0$ (ب) $x = 2$ (جـ) $y = 0$ (د) $y = 2$

س٢٠) إذا كانت بؤرتا القطع الناقص هما: $(1,0)$, $(1,4)$ ومحوره الأكبر 6 ، فمعادلته هي:

(أ) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{16}=1$ (ب) $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{5}=1$

(جـ) $\frac{(y-2)^2}{9}+\frac{(x-1)^2}{5}=1$ (د) $\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{5}=1$

الجزء الثاني

أجب عن الأسئلة التالية:

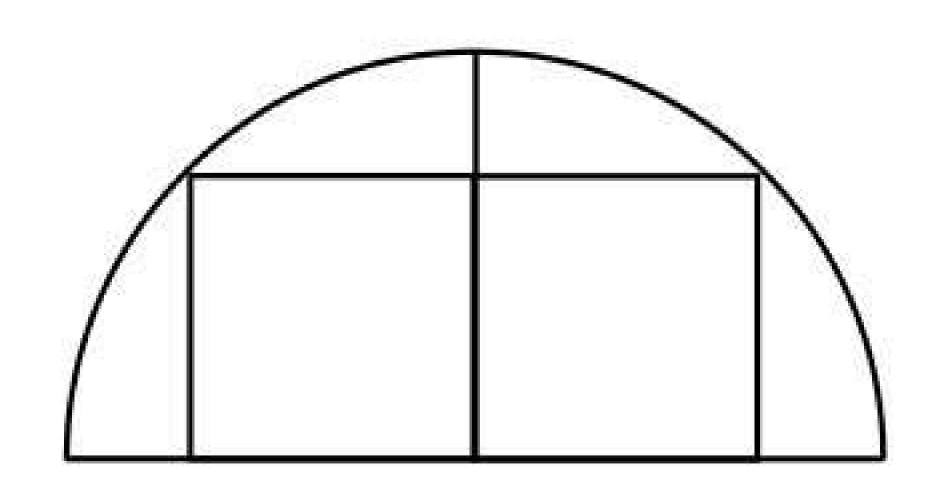
السؤال الأول: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان:

(أ) $y = x^2\sin^3(3x)$

(ب) $y = \sin^{-1}(\sqrt{x}) + \sec^2 x$

(جـ) $\tan(xy) = 1 + y^2$

السؤال الثاني: أوجد بعدي المستطيل الذي مساحته أكبر ما يمكن بحيث يمكن حصره في النصف العلوي من الدائرة $x^2 + y^2 = 16$، كما هو موضح في الشكل:



السؤال الثالث: إذا كان $n \in N$ ، فأثبت أن $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

السؤال الرابع: إذا كان $f(x) = 6x^2 - x^4 - 5$ ، فأوجد:

(أ) فترات التزايد

(ب) فترات التقعر لأعلى

(جـ) نقاط الانقلاب، ثم ارسم بيان الدالة.

النموذج السابع
اختبار نهائي

الجزء الأول

ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من ١ إلى ٢٠ في الجدول التالي:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة										

رقم السؤال	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
رمز الإجابة										

س١) مجموعة حل المتباينة: $|2x-3|<1$ هي:

(أ) IR (ب) $(1,2)$ (جـ) $[1,2]$ (د) $IR-[1,2]$

س٢) مجموعة حل المتباينة: $x+\frac{4}{x}<0$ هي:

(أ) IR (ب) $(0,\infty)$ (جـ) $(-\infty,0)$ (د) $IR-\{0\}$

س٣) مجموعة حل المتباينة $|x-3|<|x-2|$ هي:

(أ) $(-\infty,5/2)$ (ب) $(5/2,\infty)$ (جـ) $IR-\{3,2\}$ (د) $IR-(2,3)$

س٤) إذا كان: $f(x)=\frac{1}{x}+3$ ، فإن $f^{-1}(x)$ تساوي:

(أ) $\frac{1}{x-3}$ (ب) $-\frac{1}{x+3}$ (جـ) غير موجودة (د) $x-3$

س٥) مجال f، حيث: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{-x^2-x+2}}$ ، هو:

(أ) $R-[-2,1)$ (ب) $[-2,1)$ (جـ) $(-1,2)$ (د) $(-2,1)$

س٦) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$ ، هي:

(أ) 1 (ب) $4/3$ (جـ) 0 (د) ∞

س٧) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{x\tan 4x}$ ، هي:

(أ) $25/4$ (ب) 0 (جـ) -1 (د) ∞

س٨) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x+1}$ ، هي:

(أ) -2 (ب) 0 (جـ) 2 (د) ∞

س٩) الدالة f، حيث: $f(x)=|2x-3|$ عند $x = 3/2$:

(أ) متصلة وقابلة للاشتقاق (ب) غير متصلة وقابلة للاشتقاق

(جـ) غير متصلة وغير قابلة للاشتقاق (د) متصلة وغير قابلة للاشتقاق

س١٠) قيمة k التي تجعل الدالة: $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^2}+1 x\neq 0\\ k \quad x=0\end{cases}$ متصلة عند x=0 ، هي:

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) $2/3$ (د) $3/2$

س١١) المشتقة الرابعة للدالة: $f(x)=\frac{1}{1+x}$ عند $x = 0$ ، هي:

(أ) 22 (ب) 0 (جـ) 24 (د) $\frac{1}{(1+x)^{-4}}$

س١٢) بؤرتا القطع: $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{5}=1$ ، هما:

(أ) $(4,3), (-2,3)$ (ب) $(1,3), (1,-3)$

(جـ) $(3,4), (3,-2)$ (د) $(1,4), (1,-2)$

س١٣) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(1\pm2, -1)$ وأحد رأسيه $(4, -1)$ هي:

(أ) $x^2+2y^2+4x=0$ (ب) $5x^2+4y^2+2x+3y=0$

(جـ) $5x^2+9y^2-10x+18y-31=0$ (د) $x^2+2y^2+1=0$

س١٤) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}$

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) ∞ (د) غير موجودة

س١٥) الخطوط المقاربة الأفقية والرأسية للدالة: $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+1}$ ، هي:

(أ) $x = 1, y = 2$ (ب) $y = 1$ (جـ) $y = 2$ (د) $x = -1, y = -2$

س١٦) معادلة المماس للمنحنى: $f(x) = 2 + x\cos 2x$ ، عند $x = 0$ هي:

(أ) $y + x - 2 = 0$ (ب) $y - x - 2 = 0$

(جـ) $x - y - 2 = 0$ (د) $x - y - 1 = 0$

س١٧) النقاط الحرجة للدالة: $f(x)=x+\sqrt{1-x}$ هي عندما x تساوي:

(أ) $1, 3/4$ (ب) $4/3, 1$ (جـ) $3/4, -1$ (د) 1

س١٨) قيمة k التي تجعل الدالة: $f(x) = \tan x + k\sin x$ تحقق نظرية رول على الفترة $[0, \pi/4]$ ، هي:
(أ) 0 (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) $-\sqrt{2}$ (د) غير موجودة

س١٩) إن القيمة الصغرى المطلقة للدالة: $f(x)=x^3-3x+1$ على الفترة $[0,2]$ ، هي:
(أ) 3 (ب) -5 (جـ) 1 (د) -1

س٢٠) إذا كان $y^2 - x - y + 1 = 0$ وكان معدل تغير x هو $\frac{dx}{dt} = 2$ ، فإن معدل تغير y عند النقطة (1,1) هو:
(أ) 2 (ب) -1 (جـ) 1 (د) -2

الجزء الثاني

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول: أثبت أن مشتقة الدالة: $f(x) = \tan^{-1} x$ هي:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

السؤال الثاني: أوجد فترات التزايد –التناقص– التقعر للأعلى وللأسفل –التحدب– القيم القصوى المحلية– نقاط الانقلاب للدالة: $f(x)=x^4-2x^2+3$ ، ثم ارسم منحنى الدالة.

السؤال الثالث: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان:

(أ) $y = x\sec^2(2x)$

(ب) $y = \sec^{-1}(\sqrt{x}) + x\sin 3x$

(جـ) $x^2y + y^2x = 2$

السؤال الرابع: ارسم القطع التالي:

$x^2 + 2y - 4x + 6 = 0$ محددًا جميع عناصره.

إجابات نماذج الاختبارات

النموذج الأول

جـ، جـ، جـ، أ، د، ب، أ، أ، جـ، أ، د، أ، جـ، ب، أ، د، أ، ب، جـ، د

النموذج الثاني

جـ، د، جـ، أ، ب، جـ، ب، د، د، ب، د، د، أ

النموذج الثالث

أ، أ، ب، د، ب، د، ب، ب، أ، ب، جـ، جـ، جـ، د، أ

النموذج الرابع

ب، أ، أ، جـ، أ، جـ، ب، جـ، جـ، جـ، ب، جـ، جـ، أ، ب، جـ، أ، ب، أ، أ،

النموذج الخامس

ب، ب، أ، جـ، د، جـ، أ، د، جـ، أ، أ، ب، د، أ، جـ، أ، ب، د، جـ، جـ

النموذج السادس

ب، جـ، جـ، أ، د، أ، د، ب، أ، جـ، د، جـ، أ، ب، أ، جـ، د، د، ب، جـ

النموذج السابع

ب، جـ، ب، أ، د، ب، أ، أ، د، د، جـ، أ، جـ، أ، جـ، ب، أ، جـ، د، أ

ملحق
جداول للصيغ الرياضية

١) طول قوس منحني

(أ) باستخدام الإحداثيات القطبية: $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$ ، $r = f(\theta)$

(ب) باستخدام الإحداثيات الوسيطية:

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \text{ ، } x = f(t)\,,\ y = g(t)$$

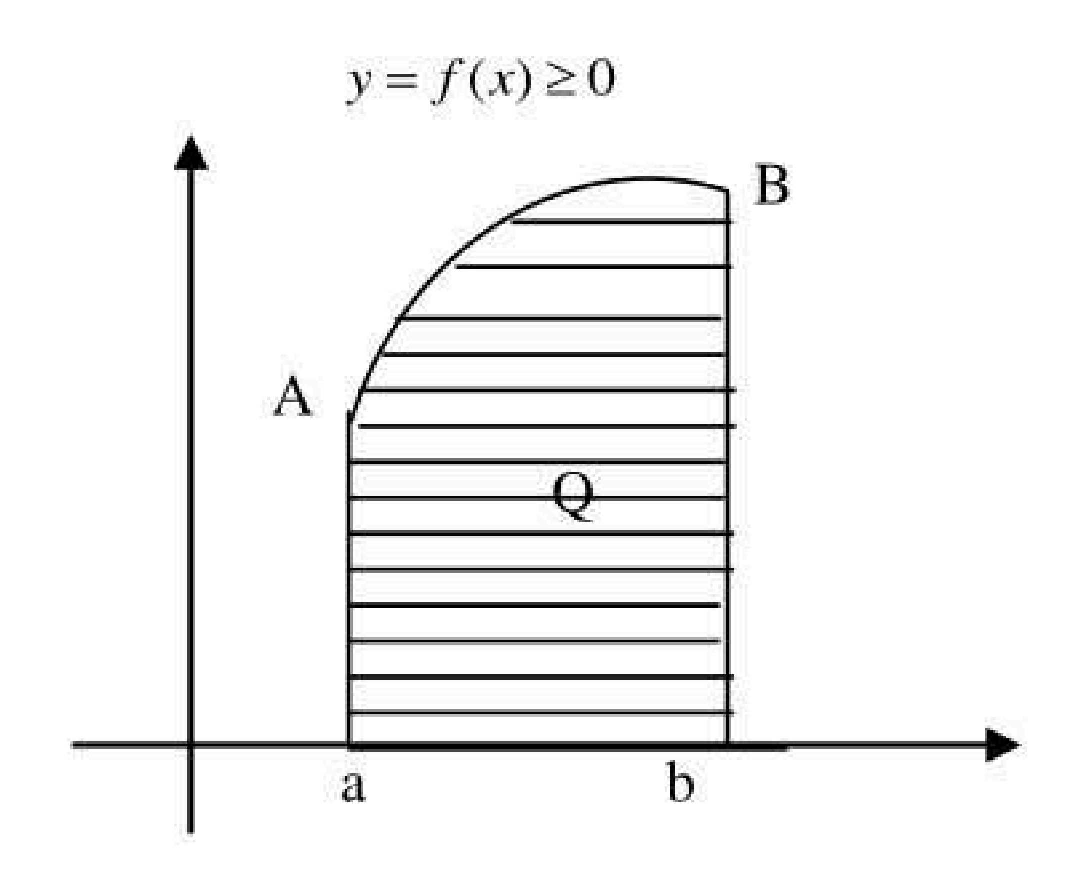
(ج) باستخدام الإحداثيات الديكارتية: $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ ، $y = f(x)$

(د) باستخدام الإحداثيات الديكارتية: $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$ ، $x = g(y)$

٢) المنطقة Q من النوع

الأول:

هي من الشكل المرافق، وهي واقعة فوق القطعة [a,b] وتحـت المنحني: $y = f(x) \geq 0$.



(أ) مساحة المنطقة Q: $\int_a^b y\,dx$.

(ب) الحجم الناتج من دورانها حول المحور x: $\pi\int_a^b y^2\,dx$.

(ج) الحجم الناتج من دورانها حول المحور y (طريقة الشرائح الأسطوانية):

$2\pi\int_a^b xy\,dx$ $(a \geq 0)$.

(د) مساحة السطح الدوراني الناتج من دوران القوس AB حول المحور x:

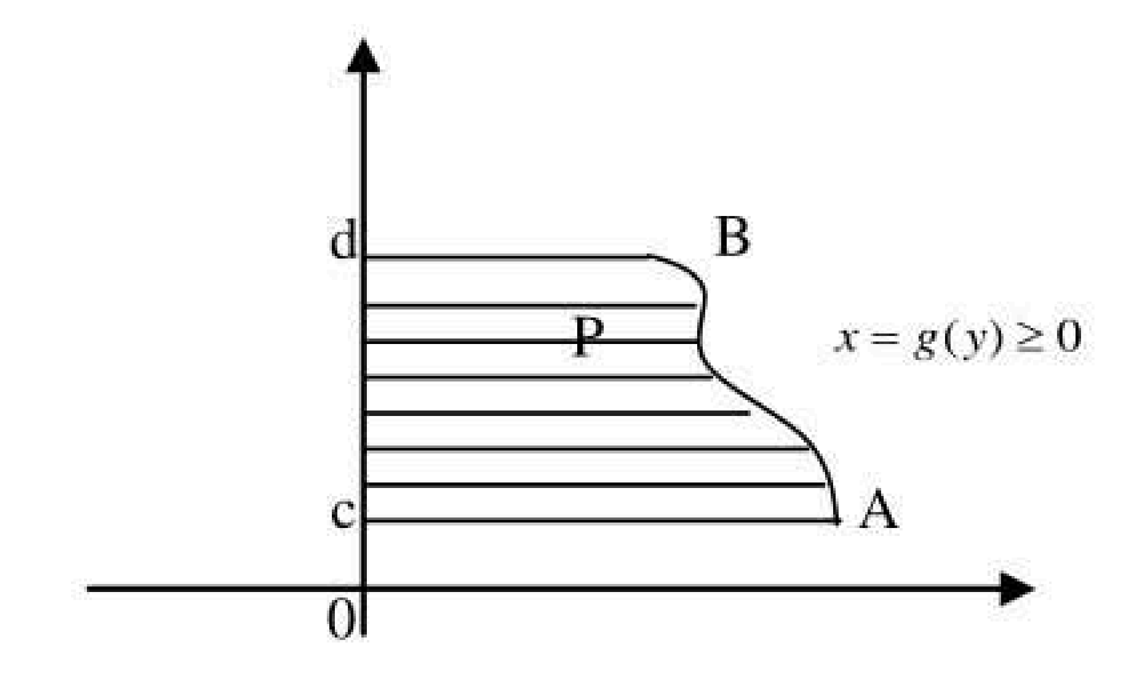
$2\pi\int_a^b y\,ds$.

(ds: لها إحدى الصيغ التالية: $\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta$ ، $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ ، $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$).

٣) المنطقة P من النوع الثاني:

هي من الشكل المرافق، وهي محصورة بين المنحني:

$x = g(y) \geq 0$



والمستقيمين:

y = c ، y = d ومحور الصادات.

(أ) مساحة المنطقة P : $\int_c^d x\,dy$

(ب) الحجم الناتج من دورانها حول المحور y: $\pi\int_c^d x^2\,dy$.

(ج) الحجم الناتج من دورانها حول المحور x (طريقة الشرائح الأسطوانية):

$$2\pi\int_c^d xy\,dy \quad (c \ge 0) .$$

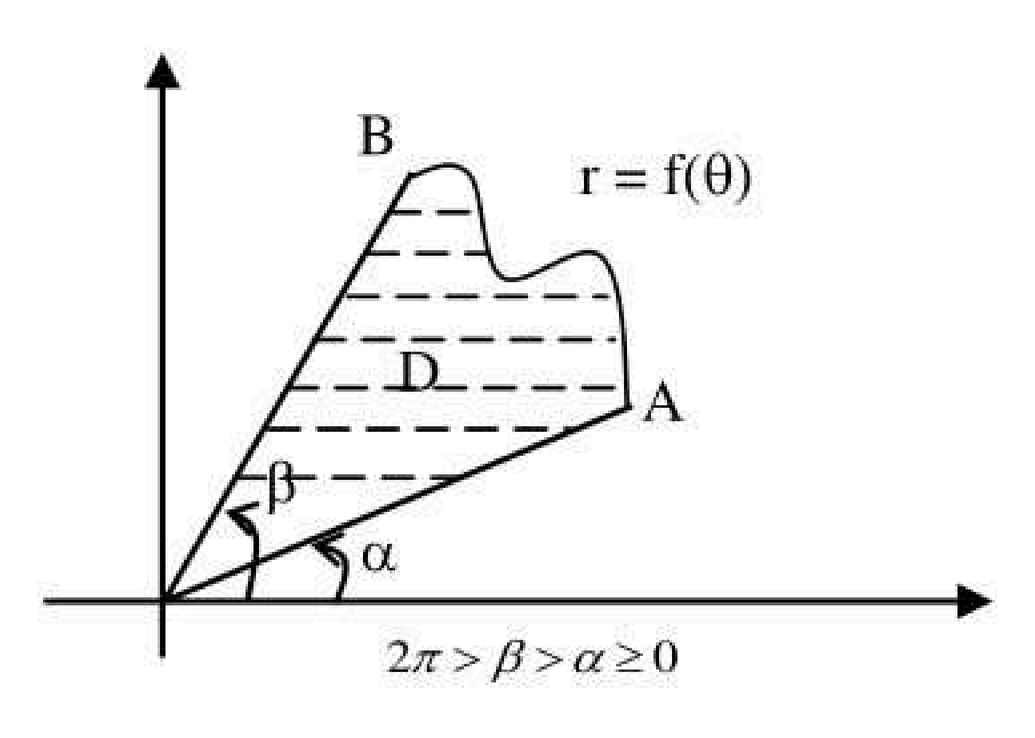
(د) مساحة السطح الدوراني الناتج من دوران القوس $\overset{\frown}{AB}$ حول المحور y:

$$2\pi\int_c^d x\,ds .$$

(ds: لها إحدى الصيغ التالية: $\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$ ، $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ ، $\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$).

٤) المنطقة D من النوع الثالث:

هـي مـن الشـكل المرافـق وهـي محصـورة بـين المستقيمين: $\theta=\alpha$ ، $\theta=\beta$ والمنحنـي القطبـي: $r=f(\theta)$.



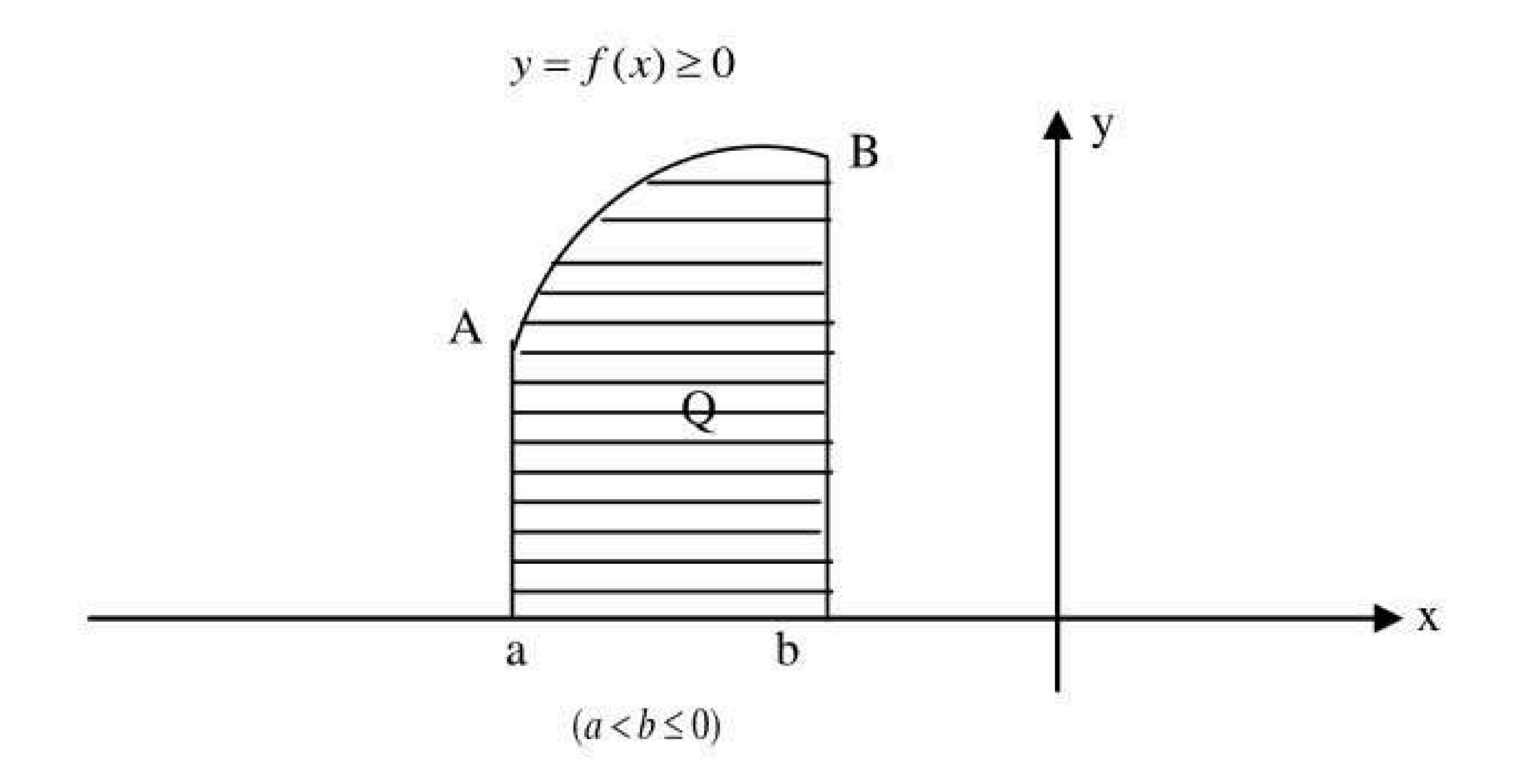
(أ) مساحة المنطقة D: $\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2 d\theta$.

(ب) الحجم الناتج من دوران D حول المحور القطبي:

$$\int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta\,d\theta \quad (\pi > \beta > \alpha \ge 0) .$$

ملحوظة

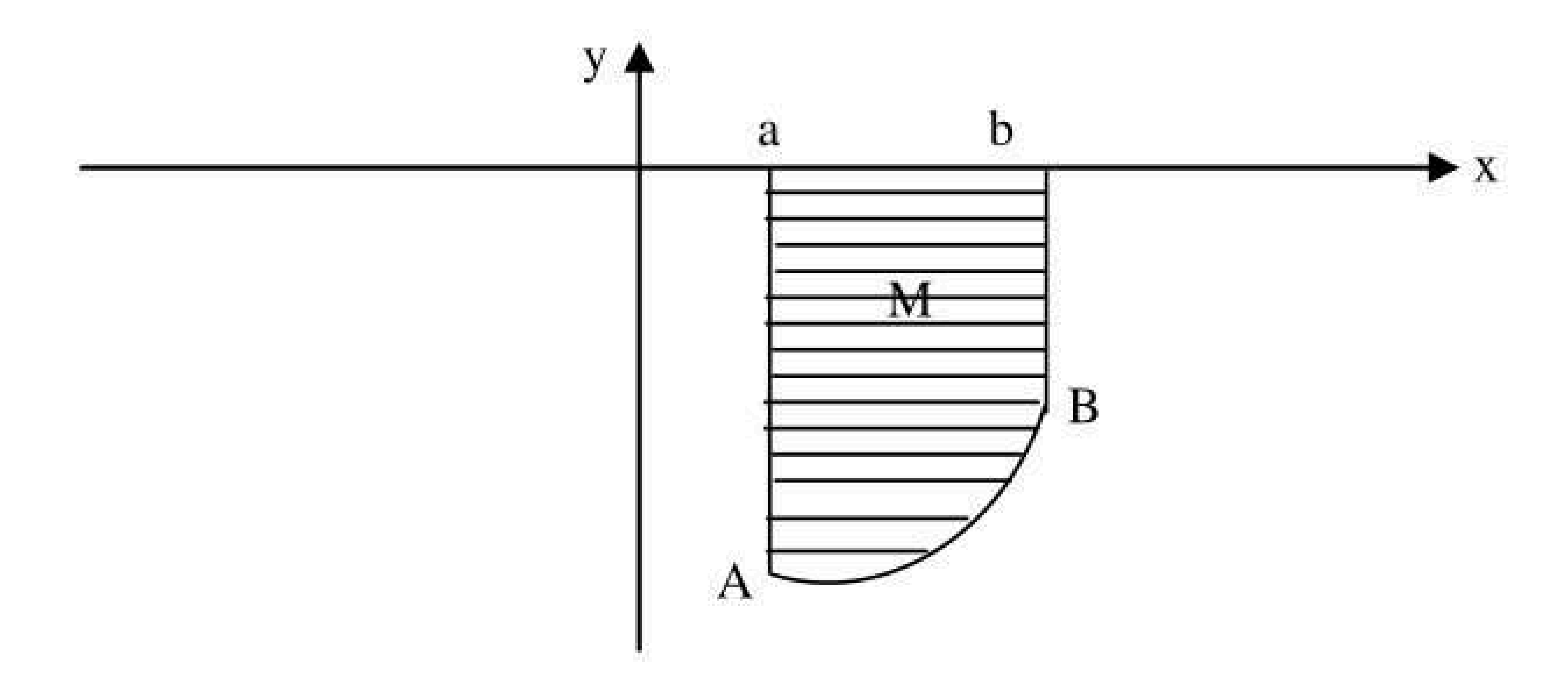
(أ) إذا كانت منطقة التكامل Q من النوع الأول:



فإن الحجم الناتج من دوران Q حول المحور y (طريقة الشرائح الأسطوانية) يعطى بالصيغة:

$$(a < b \leq 0) \quad 2\pi \int_a^b |x|\, y dx = -2\pi \int_a^b xy dx$$

(ب) إذا كانت منطقة التكامل M نظيرة Q بالنسبة للمحور x، فإن:



١) مساحة المنطقة M، هي: $\int_a^b |y|\, dx = -\int_a^b y dx$

٢) مساحة السطح الدوراني الناتج من دوران القوس $\overset{\frown}{AB}$ حول المحور x، هي:

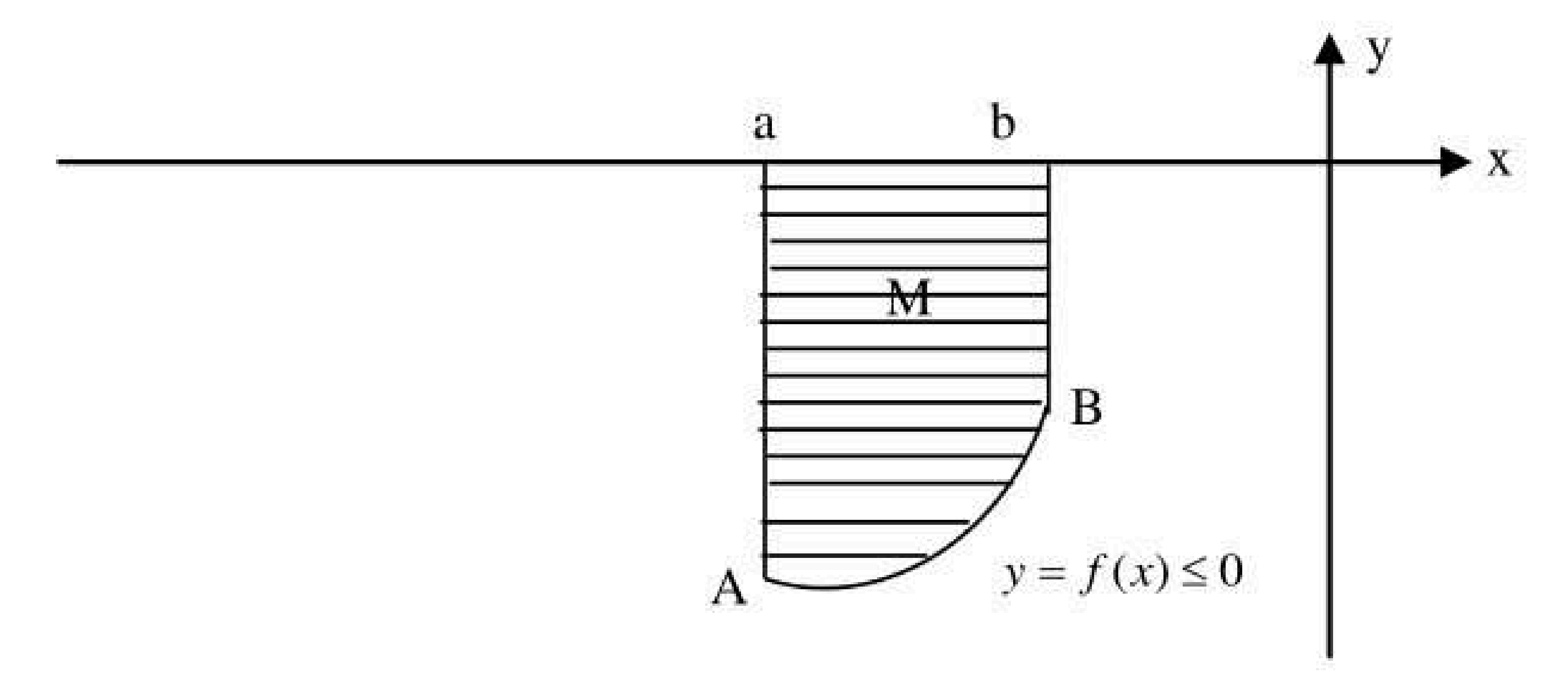
$$2\pi\int_a^b |y|\,ds = -2\pi\int_a^b y\,ds$$

٣) الحجم الناتج من دوران المنطقة M حول المحور y (طريقة الشرائح الأسطوانية)، هو:

$$(b > a \geq 0)\quad 2\pi\int_a^b x|y|\,dx = -2\pi\int_a^b yx\,dx$$

وإذا كانت: $a < b \leq 0$ ، فإن الحجم يساوي:

$$2\pi\int_a^b |x||y|\,dx = 2\pi\int_a^b xy\,dx$$



بالمثل نحصل على الصيغ الرياضية الموافقة، إذا أخذنا منطقة التكامل من الشكل N نظير المنطقة P (من النوع الثاني) بالنسبة للمحور y.

تمارين عامة

١) $\int \frac{dx}{2x^2-4x+9}$

٢) $\int \frac{x-5}{x^2-2x+2}dx$

٣) $\int \frac{x^3}{x^2+x+\frac{1}{2}}dx$

٤) $\int \frac{dx}{x(x^2+5)}$

٥) $\int \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}$

٦) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

٧) $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$

٨) $\int \frac{dx}{x^4-2x^2+1}$

٩) $\int \frac{xdx}{(x^2-x+1)^3}$

١٠) $\int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2}$

١١) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3}dx$

١٢) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

١٣) $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx$

١٤) $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})^2}$

١٥) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}}dx$

١٦) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$

١٧) $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}dx$

١٨) $\int \frac{xdx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$

١٩) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}$

٢٠) $\int \frac{x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$

٢١) $\int \frac{dx}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}}$

٢٢) $\int \sqrt{x^2-9}dx$

٢٣) $\int \sqrt{x-4x^2}dx$

٢٤) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

٢٥) $\int x\sqrt{x^2+2x+2}dx$

٢٦) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

٢٧) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$

٢٨) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

٢٩) $\int \frac{5x}{\sqrt{1+x^4}}dx$

٣٠) $\int \cos^4 xdx$

٣١) $\int \frac{dx}{\cos x\sin^5 x}$

٣٢) $\int \frac{1+\sqrt{\cot x}}{\sin^2 x}dx$

٣٣) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx$

٣٤) $\int \csc^5 5x dx$

٣٥) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

٣٦) $\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx$

٣٧) $\int \tan^3\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx$

٣٨) $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x - 5}$

٣٩) $\int \frac{dx}{2 + 3\cos^2 x}$

٤٠) $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + 2\sin^2 x}$

٤١) $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$

٤٢) $\int \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)}$

٤٣) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x + 4\tan x + 1}} dx$

٤٤) $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{a^2 + \sin^2 ax}} dx$

٤٥) $\int \frac{x dx}{\cos^2 3x}$

٤٦) $\int x \sin^2 x dx$

٤٧) $\int x^2 e^{x^3} dx$

٤٨) $\int x e^{2x} dx$

٤٩) $\int x^2 \ln\sqrt{1 - x} dx$

٥٠) $\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

٥١) $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx$

٥٢) $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$

٥٣) $\int \frac{dx}{(\tan x + 1)\sin^2 x}$

٥٤) $\int \sinh x \cosh x dx$

٥٥) $\int \frac{\sinh\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x}} dx$

٥٦) $\int \frac{\sinh x \cosh x}{\sinh^2 x + \cosh^2 x}$

٥٧) $\int \frac{x}{\sinh^2 x} dx$

٥٨) $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x}$

٥٩) $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13} dx$

٦٠) $\int \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^{\frac{1}{4}}} dx$

٦١) $\int \frac{2^x}{1 - 4^x} dx$

٦٢) $\int (x^2 - 1) 10^{-2x} dx$

٦٣) $\int \sqrt{e^x + 1}\, dx$

٦٤) $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$

٦٥) $\int x^3 \arcsin\frac{1}{x} dx$

٦٦) $\int \cos(\ln x) dx$

٦٧) $\int (x^2 - 3x) \sin 5x dx$

٦٨) $\int x \arctan(2x + 3) dx$

٦٩) $\int \arcsin\sqrt{x} dx$

٧٠) $\int |x| dx$

الإجابـــات

١) $\frac{1}{\sqrt{14}}\arctan\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{7}}$ ٢) $\ln\sqrt{x^2-2x+2}-4\arctan(x-1)$

٣) $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\arctan(2x+1)$

٤) $\frac{1}{5}\ln\sqrt{\frac{x^2}{x^2+5}}$ ٥) $2\ln\left|\frac{x+3}{x+2}\right|-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$

٦) $\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right|-\frac{1}{x+1}\right)$

٧) $\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ ٨) $\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{1-x^2}+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)$

٩) $\frac{1}{6}\frac{x-2}{(x^2-x+1)^2}+\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

١٠) $\frac{x(3+2\sqrt{x})}{1-2\sqrt{x}}$ ١١) $-\frac{1}{x}-\frac{4}{3x\sqrt{x}}-\frac{1}{2x^2}$

١٢) $\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$ ١٣) $\sqrt{2x}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x)^5}$

١٤) $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}$ ١٥) $\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$

١٦) $-2(\sqrt[4]{5-x}-1)^2-4\ln(1+\sqrt[4]{5-x})$

١٧) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ ١٨) $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$

١٩) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}$ ٢٠) $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

٢١) $\frac{1}{x^2+4x}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)$ ، $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\right|-\frac{1}{8\sqrt{3}}\arcsin\frac{2(x+1)}{x+4}$

٢٢) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|$

٢٣) $\frac{1}{16}(8x-1)\sqrt{x-4x^2}+\frac{1}{64}\arcsin(8x-1)$

٢٤) $\ln\left|\frac{x}{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}\right|$

٢٥) $\frac{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}{3}-\frac{(x+1)}{2}\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$

٢٦) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^2}$ ٢٧) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right|$

٢٨) $-\frac{1}{3}\ln|z-1|+\frac{1}{6}\ln(z^2+z+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\left(z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}\right)$

٢٩) $\frac{5}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})$ ٣٠) $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$

٣١) $\ln|\tan x|-\cot^2 x-\frac{1}{4}\cot^4 x$ ٣٢) $-\cot x-\frac{2\sqrt{(\cot x)^3}}{3}$

٣٣) $\frac{5}{12}(\cos^2 x-6)\sqrt[5]{\cos^2 x}$

٣٤) $-\frac{\cos 5x}{20\sin^4 5x}-\frac{3\cos 5x}{40\sin^2 5x}+\frac{3}{40}\ln\left|\tan\frac{5x}{2}\right|$

٣٥) $\frac{\tan^3 x}{3}+\frac{\tan^5 x}{5}$ ٣٦) $\frac{1}{4}\sin 2x$

٣٧) $\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ ٣٨) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{4\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$

٣٩) $\frac{1}{\sqrt{10}}\arctan\left(\frac{2\tan x}{\sqrt{10}}\right)$ ٤٠) $\arctan(2\tan x+1)$

٤١) $\frac{1}{2}\ln|\tan x+\sec x|-\frac{1}{2}\csc x$

٤٢) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)$

٤٣) $\ln\left|\tan x+2+\sqrt{\tan^2 x+4\tan x+1}\right|$

٤٤) $\frac{1}{a}\ln\left(\sin ax+\sqrt{a^2+\sin^2 ax}\right)$ ٤٥) $\frac{1}{3}x\tan 3x+\frac{1}{9}\ln|\cos 3x|$

٤٦) $\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}$

٤٧) $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)$ ٤٨) $\frac{1}{3}e^{x^3}$

٤٩) $\frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x}-\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{x^3}{18}-\frac{x^2}{12}-\frac{x}{6}$

٥٠) $\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

٥١) $\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{2}-\frac{1}{10}\sin\frac{5x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$ ٥٢) $-\frac{1}{1+\tan x}$

٥٣) $\ln|1+\cot x|-\cot x$ ٥٤) $\frac{\sinh^2 x}{2}$

٥٥) $-2\cosh\sqrt{1-x}$ ٥٦) $\frac{1}{5}\ln\cosh 2x$

٥٧) $-x\coth x+\ln|\sinh x|$ ٥٨) $\frac{1}{2e^x}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln|e^x-2|$

٥٩) $\frac{1}{2}\arctan\frac{e^x-3}{2}$ ٦٠) $\frac{4}{7}\sqrt[4]{(e^x+1)^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(e^x+1)^3}$

٦١) $\frac{1}{\ln 4}\ln\frac{1+2^x}{1-2^x}$

٦٢) $-\frac{10^{-2x}}{2\ln 10}\left(x^2-1+\frac{x}{\ln 10}+\frac{1}{2\ln^2 10}\right)$

٦٣) $2\sqrt{e^x+1}+\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$ ٦٤) $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|-\frac{\arctan x}{x}$

٦٥) $\frac{1}{4}\left(x^4\arcsin\frac{1}{x}+\frac{x^2+2}{3}\sqrt{x^2-1}\right)$ ٦٦) $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)$

٦٧) $\frac{1}{5}\left(-x^2\cos 5x+\frac{2}{5}x\sin 5x+3x\cos 5x+\frac{2}{25}\cos 5x-\frac{3}{5}\sin 5x\right)$

٦٨) $\frac{1}{2}\left[(x^2-2)\arctan(2x+3)+\frac{3}{4}\ln(2x^2+6x+5)-\frac{x}{2}\right]$

٦٩) $\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$ ٧٠) $\frac{x|x|}{2}$

المراجـع

المراجع العربية

إبراهيم ديب سرميني. *حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية – الجزء الثاني "حساب التكامل"* الناشر: المؤلف. الطبعة الثانية (١٤٢٥هـ).

إبراهيم ديب سرميني. مصطفى خليل دملخي وسعدون إبراهيم عثمان البراهيم. *"مقدمة في المعادلات التفاضلية العادية"* . الناشر: المؤلفون. الطبعة الثانية (١٤٣٣هـ).

محمد عادل سودان، سلمان عبدالرحمن السلمان وإبراهيم ديب سرميني. *حساب التفاضل والتكامل الجزء الأول "مدخل في حساب التفاضل"*. الناشر: جامعة الملك سعود. الطبعة الخامسة (١٤٢٣هـ).

المراجع الإنجليزية

Anton, H., *Calculas with Analytic Geometry*. John Wiley, New York, 1980.

Ellis, R. **Gulick, D.,** *Calculas with Analytic Geometry.* Harcourt Brace Jovanoxich Incm., New York, 1978.

Sherman, K., Stein, *Calculas with Analytic Geometry*. Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1977.

Swokowski, Olinick Pence. *Calculas, 6th edition. PWS Publishing Company,* Boston, 1994.

James Stewart, Calculus Early Transcendentals. *4th Edition. Brooks/Cole Publishing Company,* Pacific Grove, CA, 1999.

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي - إنجليزي

أ

اتصال (استمرار)	Continuity
اتصال دالة	Continuity of a function
اتصال على فترة	Continuity on an interval
اتصال على فترة مغلقة	Continuity on a closed interval
اتصال على مجموعة	Continuity on a set
عدم اتصال	Discontinuity
المساحة	Area

ب

بسط	Numerator
بيان	Graph
بيان دالة	Graph of function

ت

تغير المتحول	Change of variable

ج

جدول	Table

ح

حاصل ضرب	Product

د

Function(s)	دالة (دوال)
Composite function	دالة التركيب
Sine function	دالة الجيب
Inverse of sine function	دالة الجيب العكسية
Tangent function	دالة الظل
Derivative function	دالة المشتقة
Constant function	دالة ثابتة
Cosine function	دالة جيب التمام
Polynomial function	دالة كثيرة حدود
Real-valued function	دالة حقيقية (عددية)
Periodic function	دالة دورية
Even function	دالة زوجية
Cotangent function	دالة ظل التمام
Inverse function	دالة عكسية
Odd function	دالة فردية
Increasing function	دالة متزايدة
Decreasing function	دالة متناقصة
Inverse trigonometric function	دالة مثلثية عكسية
Concave downward function	دالة محدبة للأسفل
Bounded function	دالة محدودة
Concave upward function	دالة مقعرة
Anti derivative function	دالة أصلية

ز

Pair	زوج
Ordered pair	زوج مرتب

ط

Length of an interval	طول فترة
Length of a line segment	طول قطعة مستقيمة

ع

Number	عدد
Even number	عدد زوجي
Natural number	عدد طبيعي
Prime number	عدد أولي

ف

Interval	فترة
Open closed interval	فترة مغلقة من اليمين
Closed interval	فترة مغلقة
Closed open interval	فترة مغلقة من اليسار
Open interval	فترة مفتوحة

ق

Differentiable	قابلة للاشتقاق
Integrable	قابلة للتكامل
Absolute value	قيمة مطلقة
Average value	قيمة متوسطة

ك

Polynomial	كثيرة حدود

م

Origin	مبدأ الإحداثيات (نقطة الأصل)
Continuous	متصلة (مستمرة)
Variable	متغير
Independent variable	متغير مستقل
Symmetric	تناظر
Set	مجموعة

مجموعة الأعداد الحقيقية	Set of real numbers
مجموعة الأعداد السالبة	Set of negative numbers
مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة	Set of negative integer numbers
مجموعة الأعداد الصحيحة	Set of integer numbers
مجموعة الأعداد الطبيعية	Set of natural numbers
مجموعة الأعداد القياسية (الكسرية)	Set of rational numbers
مجموعة الأعداد الموجبة	Set of positive numbers
مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة	Set of positive integer numbers
مجموعة جزئية	Subset
مجموعة خالية	Empty set
مجموعة فعلية	Proper set
محاور إحداثية	Coordinate axes
مدى دالة	Range function
مربع كامل (تام)	Perfect square
مستوى الإحداثيات	Coordinate plane
مشتقة	Derivative
مميز ثلاثي حدود	Discriminant of trinominal
منحنى	Curve
ميل القاطع	Slope of secant
محور الدوران	Axis of revolution

ن

نظام إحداثي	Coordinate system
نظرية القيمة المتوسطة	Mean-value theorem
نقطة انقلاب	Inflection point
نهاية	Limit
نهاية عن يسار	Left-hand limit
نهاية عن يمين	Right-hand limit

ثانياً: إنجليزي – عربي

A

Absolute value	قيمة مطلقة
Asymptote	مقارب

B

Bounded function	دالة محدودة

C

Closed interval	فترة مغلقة
Closed open interval	فترة مغلقة من اليسار
Composite function	دالة التركيب
Concave downward function	دالة محدبة
Concave upward function	دالة مقعرة
Constant function	دالة ثابتة
Continuity	اتصال (استمرار)
Continuity of a function	اتصال دالة
Continuity on a closed interval	اتصال على فترة مغلقة
Continuity on a set	اتصال على مجموعة
Continuity on an interval	اتصال على فترة
Continuous	متصلة (مستمرة)
Coordinate axes	محاور إحداثية
Coordinate plane	مستوى الإحداثيات
Coordinate system	نظام إحداثي
Cosine function	دالة جيب التمام
Cotangent function	دالة ظل التمام
Curve	منحنى

D

Decreasing function	دالة متناقصة
Definite integration	تكامل محدد
Derivative	مشتقة
Derivative function	دالة المشتقة
Difference of two sets	الفرق بين مجموعتين
Differentiable	قابلة للتفاضل
Discontinuity	عدم اتصال
Discriminant of trinominal	مميز ثلاثي حدود
Domain of definition function	مجال (مجموعة تعريف) دالة

E

Empty set	مجموعة خالية
Even function	دالة زوجية
Even number	عدد زوجي
Exponential function	الدالة الأسية
Extreme value	قيمة قصوى

F

Function(s)	دالة (دوال)
Fundamental theorem of calculus	النظرية الأساسية في التكامل

G

General exponential function	الدالة الأسية العادية
Graph	بيان
Graph of a function	بيان دالة

I

Identity function	دالة محايدة
Implicit differentiation	التفاضل الضمني
Increasing function	دالة متزايدة

Indefinite integration	تكامل غير محدد
Independent variable	متغير مستقل
Inequality	متراجحة (متباينة)
Inflection point	نقطة انقلاب
Integrals of rational functions	تكاملات الدوال الكسرية
Integration by parts	تكامل بالتجزيء
Integration by substitution	تكامل بالتعويض
Intersection of sets	تقاطع مجموعات
Interval	فترة
Inverse function	دالة عكسية
Inverse of sine function	دالة الجيب العكسية
Inverse trigonometric function	دالة مثلثية عكسية

L

Left-hand limit	نهاية عن يسار
Length of a line segment	طول قطعة مستقيمة
Length of an interval	طول فترة
Limit	نهاية
Logarithmic and exponential functions	الدوال الأسية واللوغاريتمية
Logarithmic differentiation	التفاضل اللوغاريتمى

M

Mean-value theorem	نظرية القيمة المتوسطة

N

Natural logarithmic function	الدالة اللوغاريتمية الطبيعية
Natural number	عدد طبيعى
Norm	نظيم
Norm of partition	نظيم تجزئة
Number	عدد

Numerator	بسط

O

Odd function	دالة فردية
Open closed interval	فترة مغلقة من اليمين
Open interval	فترة مفتوحة
Ordered pair	زوج مرتب
Origin	مبدأ الإحداثيات (نقطة الأصل)

P

Pair	زوج
Partial fraction decomposition	التحليل إلى كسور جزئية
Perfect square	مربع كامل (تام)
Period of function	دور دالة
Periodic function	دالة دورية
Polynomial	كثيرة حدود
Polynomial function	دالة كثير حدود
Product	حاصل ضرب
Proper set	مجموعة فعلية
Properties	خواص

R

Range function	مدى دالة
Real-valued function	دالة حقيقية (عددية)
Regular partition	تجزئة منتظمة
Local maximum value	قيمة عظمى محلية
Local minimum value	قيمة صغرى محلية
Riemann sum	مجموع ريمان
Right-hand limit	نهاية عن يمين

S

Set	مجموعة
Set of negative integer numbers	مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة
Set of integer numbers	مجموعة الأعداد الصحيحة
Set of natural numbers	مجموعة الأعداد الطبيعية
Set of negative numbers	مجموعة الأعداد السالبة
Set of positive numbers	مجموعة الأعداد الموجبة
Set of real numbers	مجموعة الأعداد الحقيقية
Set of positive integer numbers	مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة
Set of rational numbers	مجموعة الأعداد القياسية (الكسرية)
Sine function	دالة الجيب
Slope of secant	ميل القاطع
Subintervals	فترات جزئية
Subset	مجموعة جزئية
Symmetric	متناظران (تان)
Surface of revolution	سطح دوراني

T

Table	جدول
Tangent function	دالة الظل
Techniques of integration	طرق التكامل
The cylindrical shell method	طريقة الشريحة ا لأسطوانية
The Disc method	طريقة الأقراص
Trigonometric integrals	تكاملات مثلثية
Trigonometric substitutions	تعويضات مثلثية

U

Union of sets	اتحاد مجموعات

V

متغير	Variable
حجم	Volume

كشاف الموضوعات

ث

ج

ح

خ

د